

# 渐开线园柱齿轮变形量 $f_{sho}$ 的计算

熊 滨 生

(机 械 系)

**摘要:** 按照GB3480—83中的一般方法计算渐开线园柱齿轮的承载能力, 需要计算齿轮在单位载荷下沿齿宽方向的相对变形量 $f_{sho}$ , 其计算公式可按国标中相应的力学模型查出。本文给出另外四种常用的齿轮不同安装形式的力学模型, 并对齿轮—轴进行了弯曲变形和扭转变形分析, 得出这四种力学模型的 $f_{sho}$ 计算公式。

**关键词:** 相对变形量、承载能力

## 1 前 言

渐开线园柱齿轮承载能力的计算方法, 涉及到齿轮的设计、制造、工艺材料、检验等各方面因素的影响。GB3480—83(见参考文献〔1〕)从理论上解决了上述承载能力的计算问题。参考文献〔2〕中给出几种基本的力学模型及各自相应的 $f_{sho}$ (单位载荷作用下渐开线园柱齿轮的相对变形)计算公式。而下述四种力学模型也是广大机械设计者所经常遇到的, 笔者经过详细推导, 得出各自的 $f_{sho}$ 计算公式, 此公式适用于直齿和单斜齿园柱齿轮。

## 2 力学模型的建立

由齿轮在轴上的安装形式建立力学模型如图1所示。可将支承齿轮的轴看成等截面悬臂轴, 两支承点之间跨距为 $l$ , 齿轮1中心与支点对称中心距离为 $S$ , 悬臂端齿轮2中心与轴的右支点之间的距离为 $S_1$ , 齿轮1及齿轮2受的切向载荷分别为 $F_{t1}$ 与 $F_{t2}$ 且分别作用于各自齿宽中点。设实心轴直径等于齿轮1分度园直径 $d_1$ , 齿轮1、齿轮2的齿宽均为 $b$ , 齿轮1与齿轮2上的单位齿宽平均载荷分别为 $w_{m1}$ 与 $w_{m2}$ 。

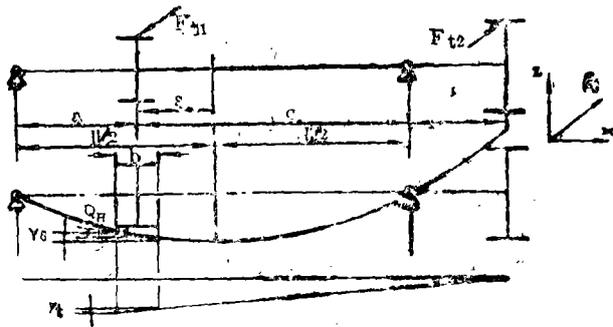


图 1

## 3 公式推导过程

齿轮在单位载荷下沿齿宽方向的相对变形 $f_{sho}$ 计算公式推导过程

本文1988年4月20日收到

### 3. 1 弯曲变形

由弯曲变形叠加原理, 在小变形前提下, 单独作用于轴上的每一载荷所产生的变形可进行叠加, 叠加结果即为这些载荷共同作用时的变形。

图 1 中  $y_b$  为弯曲变形产生的齿向啮合误差在整个齿宽内的挠度差, 近似等于齿宽中点  $H$  处斜率与齿宽  $b$  的乘积。  $F_{t1}$  为作用于齿轮 1 的切向载荷,  $F_{t1}$  使齿轮——轴产生弯曲变形, 由此引起齿轮 1 的挠度差为  $y_{b1}$ 。  $F_{t2}$  为作用于齿轮 2 的切向载荷,  $F_{t2}$  使齿轮——轴产生弯曲变形, 由此引起齿轮 1 的挠度差为  $y_{b2}$ 。

其中

$$F_{t1} = W_{m1} \cdot b$$

$$F_{t2} = W_{m2} \cdot b$$

其中  $W_{m1}$  为齿轮 1 上单位齿宽平均载荷  $W_{m2}$  为齿轮 2 上单位齿宽平均载荷

如图 1 所示情况

$F_{t1}$  引起的挠度为

$$y_1 = -\frac{(W_{m1} \cdot b)cx}{6EI} (1^2 - x^2 - c^2) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (1)$$

挠曲转角为

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy_1}{dx} = -\frac{(W_{m1}b)c}{6EI} (1^2 - c^2 - 3x^2) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2)$$

$F_{t1}$  引起齿轮 1 的挠度差为

$$y_{b1} = b \operatorname{tg}\theta_H = b \left( \frac{dy_1}{dx} \right)_H = b \cdot \left[ -\frac{W_{m1}b}{6EI} (1^2 - c^2 - 3x^2) \right] \quad (3)$$

使齿轮 1 上单位齿宽平均载荷为单位载荷 (归一化), 则齿轮 1 的挠度差为

$$y_{b1} = \frac{y_{b1}}{W_{m1}} = \frac{b^2 c}{6EI} (1^2 - c^2 - 3x^2) \quad (4)$$

又由图 1 得

$$a = \left( \frac{1}{2} - S \right) = 1 \left( \frac{1}{2} - \eta \right) \quad (5)$$

$$c = 1 - a = 1 \left( \frac{1}{2} + \eta \right) \quad (6)$$

其中  $\eta = \frac{S}{1}$

令  $x = a$ , 且将 (5) (6) 代入 (4), 得

$$\begin{aligned} y_{b1} &= \frac{b^2 1 \left( \frac{1}{2} + \eta \right)}{6EI} \left[ 1^2 - 1^2 \left( \frac{1}{2} + \eta \right)^2 - 3 \cdot 1^2 \left( \frac{1}{2} - \eta \right)^2 \right] \\ &= \frac{32}{3\pi E} (1 - 4\eta^2) \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \quad (7) \end{aligned}$$

其中  $I = \frac{\pi d_1^4}{64}$

令  $N' = \frac{32}{3\pi E} (1 - 4\eta^2)$ , 得

$$y_{b01} = N' \frac{1s}{d_1^2} \left(\frac{b}{d_1}\right)^2 \quad (8)$$

齿轮 2 的切向载荷  $F_{t2}$  作用下引起的挠度为

$$y_2 = -\frac{(w_{m2}b)s_1}{6EI} x (1^2 - x^2)^2 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (9)$$

挠曲转角为

$$\text{tg}\theta = \frac{dy_2}{dx} = -\frac{(w_{m2}b)s_1}{6EI} (1^2 - 3x^2) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (10)$$

$f_{t2}$  作用引起齿轮 1 的挠度差为

$$f_{b2} = b \text{tg}\theta_H = b \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_H = b \cdot \left[-\frac{(w_{m2} \cdot b)s_1}{6EI} (1^2 - 3x^2)\right] \quad (11)$$

考虑到力矩平衡, 有

$$w_{m1} b d_1 = w_{m2} b d_2$$

$$w_{m2} = \frac{w_{m1}}{d_2/d_1} = \frac{w_{m1}}{n} \quad (12)$$

其中  $n = d_2/d_1$ ,  $n$  为齿轮 2 与齿轮 1 分度圆直径之比, 将(12)式代入(11)式, 归一化处理后齿轮 1 的挠度差为

$$y_{b02} = \frac{|y_{b2}|}{w_{m1}} = -\frac{b^2 \cdot s_1}{6EI n} (1^2 - 3x^2) \quad (13)$$

令  $x = a$ ,  $k = \frac{S_1}{S}$  且将(5)代入(13), 得

$$\begin{aligned} y_{b02} &= \frac{b^2 k S}{6EI n} [1^2 - 3a^2 \left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2] \\ &= \frac{32k}{3\pi E n} \left(\frac{1}{4} + 3\eta - 3\eta^2\right) \frac{1s}{d_1^2} \left(\frac{b}{d_1}\right)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

令  $N'' = \frac{32k}{3\pi E n} \left(\frac{1}{4} + 3\eta - 3\eta^2\right)$ , 得

$$y_{b02} = N'' \frac{1s}{d_1^2} \left(\frac{b}{d_1}\right)^2 \quad (15)$$

令  $N_1 = N' + N'' = \frac{32}{3\pi E} \left[ (1 - 4\eta^2) + \frac{k}{n} \left(\frac{1}{4} + 3\eta - 3\eta^2\right) \right]$

由叠加原理, 在切向载荷  $F_{t1}$  和  $F_{t2}$  作用下, 齿轮 1 的挠度差为

$$y_b = y_{b1} + y_{b2} \quad (16)$$

归一化处理

$$\begin{aligned} y_{bo} &= \frac{|y_b|}{w_{m1}} \\ &= |y_{bo1} + y_{bo2}| \\ &= \frac{32}{3\pi E} \left[ (1 - 4\eta^2) + \frac{k}{n} \left( \frac{1}{4} + 3\eta - 3\eta^2 \right) \right] \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \\ &= N_1 \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \quad (17) \end{aligned}$$

### 3.2 扭转变形

在扭矩T作用下, 齿轮1分度圆做切向扭转变形, 其扭转变形量按实心圆柱体齿宽两端相对值计算。设扭矩沿齿宽处处相等, 则齿轮1的扭转变形量为

$$y_t = \frac{Tb}{GI_t} \cdot r = \frac{(w_{m1}br) \cdot b \cdot r}{GI_t} \quad (18)$$

其中  $T = w_{m1}br$

r为齿轮1分度圆半径

单位齿宽平均载荷  $w_{m1} = 1 \text{ N/mm}$ 时, 齿轮1的扭转变形为

$$y_{t0} = \frac{y_t}{w_{m1}} = \frac{b^2 r}{GI_t} \cdot r = \frac{b^2 r}{G \frac{\pi d_1^4}{32}} \cdot r = \frac{8}{\pi G} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \quad (19)$$

式中  $I_t = \frac{\pi d_1^4}{32}$

令  $M = \frac{8}{\pi G}$

则  $y_{t0} = M \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \quad (20)$

### 3.3 弯曲扭转的综合变形

如图1所示力学模型(情况1)

载荷单独作用的齿轮1的弯曲变形  $y_{b01}$  与  $y_{b02}$  方向相同, 所以叠加后的弯曲变形  $y_{b0} = y_{b01} + y_{b02}$ ; 图1为悬臂远传输扭矩情况, 弯曲变形  $y_{b0}$  与扭转变形  $y_{t0}$  方向相反, 所以齿轮1的弯曲扭转综合变形

$$\begin{aligned} f_{sho} &= |y_{t0} - y_{b0}| \\ &= \left| M \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 - N_1 \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \right| \end{aligned}$$

$$= M \left| 1 - \frac{N_1}{M} \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \right| \quad (21)$$

$$\text{令 } K_1 = -\frac{N_1}{M}$$

$$\text{则 } f_{sho} = M \left| 1 + K_1 \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \right| \quad (22)$$

#### 4 其余三种情况的弯曲扭转综合变形

其余三种情况与情况 1 的推导过程类似, 其推导过程不再赘述, 下面仅列出情况 2, 情况 3, 情况 4 与情况 1 的不同之处及推导的最后结论

##### 4.1 如图 2 所示情况

作用于齿轮 1 与齿轮 2 的切向载荷 $F_{t1}$ 与 $F_{t2}$ 方向相同, 单独弯曲变形量 $y_{b1}$ 与 $y_{b2}$ 方向相反, 所以齿轮 1 的弯曲变形

$$y_b = y_{b1} - y_{b2} \quad (23)$$

$$y_{bo} = \frac{|y_b|}{w_{m1}}$$

$$= |y_{bo1} - y_{bo2}|$$

$$= \frac{32}{3\pi E} \left[ (1 - 4\eta^2) - \frac{k}{n} \left( \frac{1}{4} + 3\eta - 3\eta^2 \right) \right] \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2$$

$$= N_2 \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \quad (24)$$

图 2 为悬臂远传输扭矩情况, 所以情况 2 中齿轮 1 的弯曲扭转综合变形

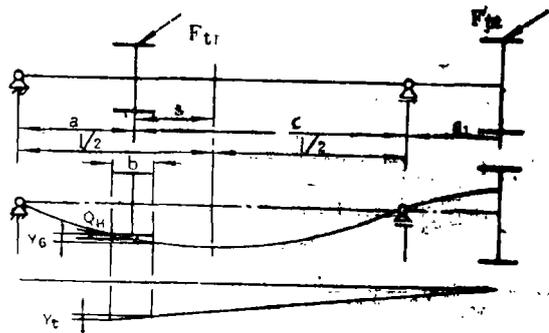


图 2

$$f_{sho} = |y_{to} - y_{bo}| = M \left| 1 - \frac{N_2}{M} \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \right| \quad (25)$$

$$\text{令 } K_2 = -\frac{N_2}{M}$$

$$\text{则 } f_{sho} = M \left| 1 + K_2 \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \right| \quad (26)$$

#### 4. 2 如图 3 所示情况

作用于齿轮 1 与齿轮 2 的切向载荷  $f_{t1}$  与  $f_{t2}$  方向相反, 单独弯曲变形量  $y_{b1}$  与  $y_{b2}$  方向相同 所以齿轮 1 的弯曲变形

$$y_b = y_{b1} + y_{b2} \quad (27)$$

$$y_{b0} = \frac{|y_b|}{w_{m1}}$$

$$= |y_{b01} + y_{b02}|$$

$$= \frac{32}{3\pi E} \left[ (1 - 4\eta^2) + \frac{k}{n} \left( \frac{1}{4} + 3\eta - 3\eta^2 \right) \right] \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2$$

$$= N_3 \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \quad (28)$$

图 3 为悬臂近传输扭矩情况, 弯曲变形  $y_{b0}$  与扭转变形  $y_{t0}$  方向相同, 所以齿轮 1 弯曲

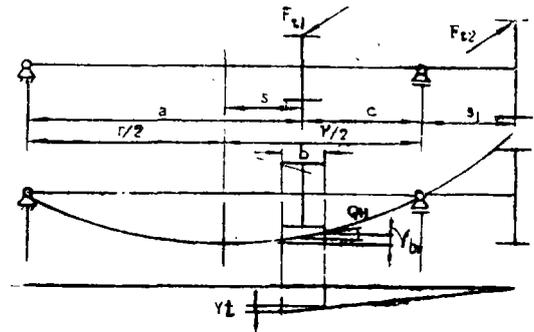


图 3

$$\text{扭转综合变形 } f_{sbo} = |y_{t0} + y_{b0}| = M \left| 1 + \frac{N_3}{M} \frac{1s}{d_1^2} \right| \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \quad (29)$$

$$\text{令 } K_3 = \frac{N_3}{M}$$

$$\text{则 } f_{sbo} = M \left| 1 + K_3 \frac{1s}{d_1^2} \right| \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \quad (30)$$

#### 4. 3 如图 4 所示情况

作用于齿轮 1 与齿轮 2 的切向载荷  $f_{t2}$  方向相同, 单独弯曲变形量  $y_{b1}$  与  $y_{b2}$  方向相反, 所以齿轮 1 的弯曲变形

$$y_b = y_{b1} - y_{b2} \quad (31)$$

$$y_{b0} = \frac{|y_b|}{w_{m1}}$$

$$= |y_{b01} - y_{b02}|$$

$$= \frac{32}{3\pi E} \left[ (1 - 4\eta^2) - \frac{k}{n} \left( \frac{1}{4} + 3\eta - 3\eta^2 \right) \right] \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2$$

$$= N_4 \frac{1s}{d_1^2} \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \quad (32)$$

图4为悬臂近传输扭矩情况, 所以情况4中齿轮1的弯曲扭转综合变形

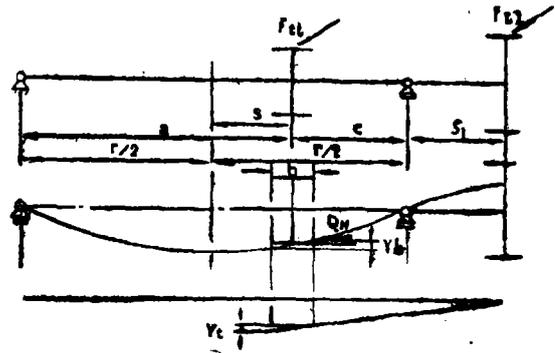


图 4

$$f_{sho} = |y_{to} + y_{bo}| = M \left| 1 + \frac{N_4}{M} \frac{ls}{d_1^2} \right| \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \quad (33)$$

$$\text{令 } K_4 = \frac{N_4}{M}$$

$$\text{则 } f_{sho} = M \left| 1 + K_4 \frac{ls}{d_1^2} \right| \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 \quad (34)$$

## 5 结 束 语

齿轮工作时, 其综合变形应包括受载情况下齿轮及其轴的弹性变形(弯曲变形和扭转变形)以及热变形, 轴承、箱体等变形。而齿轮在单位载荷下的相对变形 $f_{sho}$ 的公式是针对齿轮及轴的弹性变形情况推出的一个近似计算式。推导过程中直接引用了材料力学中的一些结论, 例如悬臂梁的挠曲线方程。

本文最后得到的结果, 即公式(22) (26) (30) (34)形式上与GB3480—83给出的公式保持一致, 便于有关机械设计人员参考。

笔者在撰写本文时, 得到郑州工学院冯澄宙教授的直接指导, 特此深表谢意。

## 参 考 文 献

- [1] 机械工业部基础标准情报网 机械工业基础标准汇编 (六) 齿轮 1985.3
- [2] 机械工业委员会基础标准情报网 机械工业六项互换性基础标准和机械制图宣贯讲义 (四) 1987.5
- [3] 刘鸿文主编 材料力学 人民教育出版社 1979.2
- [4] 濮良贵编 机械零件 高等教育出版社 1982
- [5] 曹仁政主编 机械零件冶金工业出版社 1985.6
- [6] 东北工学院《机械零件设计手册》编写组 机械零件设计手册 (上册) 冶金工业出版社 1980.11
- [7] 第一机械工业部重型机械标准 通用圆柱齿轮减速器图册 机械工业出版社 1990

# CALCULATION OF THE RELATIVE DEFLECTION $f_{sh0}$ OF INVOLUTE CYLINDRICAL GEARS

Xiong Binsheng

( Department Of Mechanical Engineering )

**Abstract.** According to the general method to calculate the load capacity of involute cylindrical gears in GB 3480—83, it is necessary to calculate the relative deflection  $f_{sh0}$  in the tooth wide direction of gears which are loaded with one unit load. The formulas used for calculating the relative deflection can be found by the mechanical model in GB 3480—83. In this article the other common types of mechanical model of gears which are assembled with different forms are shown. It is completed to analyze the bending deflection and torsional deflection of the gear—shaft. As the result, the calculation formulas of  $f_{sh0}$  about the four types of mechanical models have been obtained.

**key words,** Relative deflection, Load capacity