

# 采样锁相环系统中的混沌行为

王俊昆 高金峰 黄冬梅

(计算机及自动化系)

**提 要:** 本文从计算机模拟和理论分析两方面研究了通信与控制系统中广泛采用的采样锁相环系统的混沌行为。得到了系统环路增益、采样周期与混沌区域之间的关系。

**关键词:** 混沌、锁相环

近年来,物理、化学、天文、生物以至经济学等学科的研究者对于非线性系统中混沌现象的研究愈来愈深入,有关非线性电路与系统中混沌行为的研究,从八十年代初以来,也取得了很大的进展<sup>[1][2][3]</sup>。本文从理论和计算机模拟两方面研究了通信与控制系统中广泛采用的采样锁相环系统。得到了系统环路增益、采样周期与系统混沌区域之间的关系。文中第一部分给出采样锁相环的系统模型。并分别给出一些必要的定义和定理,理论与计算机模拟的结果。

## 1 系统模型

图1所示为采样锁相环系统的相位模型<sup>[4]</sup>。系统采用零阶保持器,其中 $r$ 为输入, $T'$ 为采样周期。

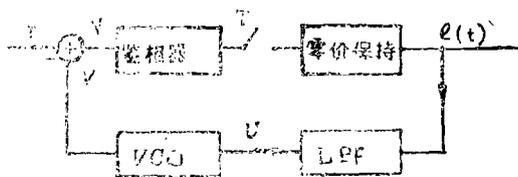


图1

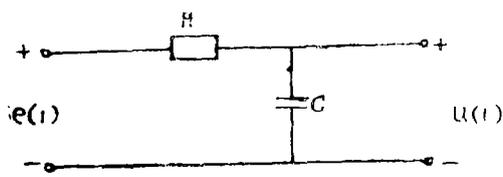


图2

若LPF采用RC积分器,则输入为 $e(t)$ ,输出为 $u(t)$ 。

在第 $k$ 个采样周期内, $u(t)$ 与 $e(t)$ 的关系为:

$$u(t) = (u(kT') - e(kT')) e^{-\frac{t-kT'}{RC}} + e(kT') \quad (1)$$

在式中令 $\tau = \frac{t}{RC}$ ,  $T = \frac{T'}{RC}$ 将参数归一化后有:

$$u(\tau) = (u(kT) - e(kT)) e^{-(\tau-kT)} + e(kT) \quad (2)$$

以 $\tau = (k+1)T$ 代入式(2)后有:

收到日期: 1989.03.03.

$$u(k+1) = (u(k) - c(k)) e^{-T} + e(k) \quad (3)$$

现在求VCO的输出与输入关系:

$$\begin{aligned} V(\tau) &= V(kT) + K_0 \int_{kT}^{\tau} u(t) dt \\ &= V(kT) + K_0 (u(kT) - e(kT)) (1 - e^{-(\tau - kT)}) \\ &\quad + K_0 e(kT) (\tau - kT) \end{aligned} \quad (4)$$

以 $\tau = (k+1)T$ 代入式(4)有离散化结果:

$$V(k+1) = V(k) + K_0 (1 - e^{-T}) U(k) + K_0 (T + e^{-T} - 1) e(k) \quad (5)$$

其中 $K_0$ 为VCO的增益系数。

在式(3)和式(5)中令 $a = e^{-T}$ , 并设:

$$x_1(k) = V(k), \quad x_2(k) = U(k)$$

将有:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + a_{12} x_2(k) + b_1 e(k) \\ x_2(k+1) &= a_{21} x_1(k) + a_{22} x_2(k) + b_2 e(k) \\ y(k) &= (C_1 \ 0) (x_1(k) \ x_2(k))^T \\ e(k) &= f(r - y(k)) \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $a_{12} = K_0(1 - a)$ ,  $a_{22} = a$ ,  $a_{21} = 0$ ,  $b_1 = K_0(T + a - 1)$ ,  $b_2 = 1 - a$ ,  $c = 1$ 。

为方便, 并不失一般性, 设 $r = 0$ , 鉴相器具有下式的鉴相特性:

$$e(k) = K_d \left( -y(k) + \left| y(k) + \frac{\pi}{2} \right| - \left| y(k) - \frac{\pi}{2} \right| \right) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} n\pi &< y(k) < (n+2)\pi \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

式中 $K_d$ 为鉴相器的鉴相增益。

在下面的讨论中, 将主要讨论式(6)和式(7)构成的系统。

## 2 基本概念和定理

在这一节中将给出一些有关的概念和混沌存在的充分条件。

首先讨论离散时间系统:

$$x(k+1) = F(x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

其中 $x(k) \in R^n$ , 映射 $F: R^n \rightarrow R^n$ 是分段线性的。对映射 $F: R^n \rightarrow R^n$ 和整数 $k$ , 若设 $F^k$ 是 $F$ 的 $k$ 次迭代, 且 $\bar{x} = F^p(\bar{x})$ 和 $\bar{x} \neq F^k(\bar{x})$ ,  $1 \leq k \leq p-1$ 成立, 则称点 $\bar{x}$ 是以 $p$ 为周期的 $p$ 周期点。当 $p=1$ , 即 $\bar{x} = F(\bar{x})$ 则称 $\bar{x}$ 为不动点。用 $B(x, r)$ 表示以点 $x$ 为中心 $r$ 为半径的闭球域。以 $\text{int}S$ 表示集合 $S$ 的内部。 $DF(x)$ 表示 $F$ 在点 $x \in R^n$ 的雅可比矩阵。若 $\bar{x} \in R^n$ 是式(8)的不动点, 且存在正数 $r$ 使 $F$ 在球域 $B(\bar{x}, r)$ 内可微, 若另有 $x \in B(\bar{x}, r)$ 、 $DF(x)$ 的所有特征值的绝对值均大于1, 称点 $\bar{x}$ 为式(8)的膨胀(expanding)

不动点。若有点  $x_r \in B(\bar{x}, r)$  ( $x_r \neq \bar{x}$ ) 和正整数  $M$ , 使得  $F^M(x_r)$  可微且  $\det DF^M(x_r) \neq 0$ , 此时称澎涨不动点为 Snapback repeller。

有关混沌的定义很多, 现给出[5]中的定义:

**定义 1:**

若离散时间系统(8)满足下述条件:

i) 对任意正整数  $N$ , 当  $P > N$  时系统(8)有周期为  $P$  的  $P$  周期点。

ii) 存在一不可数不规则 (Scramble) 集合  $S$  满足下述条件:

①  $F(S) \subset S$

② 任意  $x \neq y$  且  $x, y \in S$ , 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{SUP} \| F^k(x) - F^k(y) \| > 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Inf} \| F^k(x) - F^k(y) \| = 0$$

③ 对任意  $x \in S$  和式(8)的周期点  $y$ , 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{SUP} \| F^k(x) - F^k(y) \| > 0$$

则称系统(8)是混沌的。

为给出系统混沌的充分条件, 假定  $\bar{x}$  是式(8)的不动点,  $F$  在  $\bar{x}$  的邻域内可微,  $DF(\bar{x})$  的特征值的绝对值均不等于 1。此时  $\bar{x}$  为双曲不动点。其局部稳定流形和不稳流形定义为:

$$W_{\text{LOC}}^S(\bar{x}) = \{x \in B(\bar{x}, \varepsilon); \lim_{k \rightarrow \infty} F^k(x) = \bar{x}\}$$

$$W_{\text{LOC}}^U(\bar{x}) = \{x \in B(\bar{x}, \varepsilon); \lim_{k \rightarrow -\infty} F^k(x) = \bar{x}\}$$

其中  $\varepsilon \in R'$  且是正常数,  $F|B(\bar{x}, \varepsilon)$  为微分同胚。

**定理一: [5]**

设  $\bar{x}$  为式(8)的双曲不动点, 则式(8)混沌的充分条件为:

i)  $W_{\text{LOC}}^U(\bar{x})$  的维数  $U$  大于零。

ii) 存在点  $x_0 \in W_{\text{LOC}}^U(\bar{x})$  ( $x_0 \neq \bar{x}$ ) 和正整数  $M$ , 使  $F^M$  在点  $x_0$  可微, 且  $F^M(x_0) \in$

$W_{\text{LOC}}^S(\bar{x})$ 。

iii) 存在一个嵌在  $W_{\text{LOC}}^U(\bar{x})$  中的  $U$  维域  $B^U$ , 使当  $B^U$  是  $x_0 \in W_{\text{LOC}}^U(\bar{x})$  的邻域时,

$F^M | B^U: B^U \rightarrow R^n$  是一个嵌入且  $F^M(B^U)$  在  $F^M(x_0)$  处与  $W_{Loc}^S(\bar{x})$  横截。

对所讨论的式(8), 当  $U = n$  时, 定理一退化为 Marotto 定理。

为便于应用, 考虑具有下式特征的离散时间系统:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f(x_1(k), \varepsilon_1 x_2(k), \varepsilon_2 x_2(k), \dots, \varepsilon_m x_2(k)) \\ x_2(k+1) &= L_1 x_1(k) + L_2 x_2(k) + g(x_1(k), \varepsilon_{m+1} x_2(k), \dots, \\ &\quad \varepsilon_{m+1} x_2(k)) \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

式中:  $x_i \in R^{n_i}$ ,  $L_1 \in R^{n_1 \times n_1}$ ,  $L_2 \in R^{n_1 \times n_2}$ ,  $\varepsilon_i \in R^1$ , ( $i=1, 2, \dots, m+1$ ),  $f: R^{n_1} \times R^{n_2} \rightarrow R^{n_1}$ ,  $g: R^{n_1} \times R^{n_2} \rightarrow R^{n_2}$  均为分段线性函数。  $n = n_1 + n_2$ , 且  $n_1 \neq 0$ 。当式(9)中  $\varepsilon_i = 0$  ( $i=1, 2, \dots, m+1$ ) 时, 式(9)成为:

$$x_1(k+1) = f^*(x_1(k)) \quad (10)$$

$$x_2(k+1) = L_1 x_1(k) + L_2 x_2(k) + g^*(x_1(k)) \quad (11)$$

其中:

$$\begin{aligned} f^*(x_1(k)) &= \Delta f(x_1(k), 0, 0, \dots, 0) \\ g^*(x_1(k)) &= \Delta g(x_1(k), 0, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (12)$$

式(10)和(11)可合并写成:

$$x(k+1) = F(x(k)) \quad (13)$$

式中:

$$\begin{aligned} x(k) &= \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_2(k) \end{pmatrix} \\ F(k) &= \begin{pmatrix} f^*(x_1(k)) \\ \vdots \\ L_1 x_1(k) + L_2 x_2(k) + g^*(x_1(k)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

若设式(13)的不动点为原点  $O = [O_1^T, O_2^T]^T$ , 并不失去一般性。若还有  $Df^*(O_1)$  和  $Dg^*(O_1)$  存在且  $Df^*(O_1)$  的特征值的绝对值大于1,  $Dg^*(O_1)$  的特征值的绝对值小于1。有下面的引理。

**引理一:**

对任意  $x_1$  若  $Dg^*(x_1)$  存在时使  $Df^*(x_1)$  也存在, 则当  $O_1$  是式(10)的 Snapback repeller 时, 式(13)混沌。

引理一还可以作如下拓展:

如果原点  $O_1$  是式(10)的 Snapback repeller, 就会存在正整数  $M$  和点  $x_{1,r} \in B(O_1, \varepsilon)$  ( $\varepsilon$  是充分小的正数) 使  $f^{*M}(x_{1,r}) = O_1$ 。若对于任意整数  $i$  有  $Dg^*(f^i(x_{1,r}))$  存在, 则式(13)混沌。

引理一的证明见文献[5]。

**定理二:** [5]

若引理一成立, 且式(10)有 Snapback repeller, 则存在正数  $\varepsilon^*$ , 当  $\varepsilon_i$  满足  $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon^*$   $i=1, 2, \dots, m+1$  成立时, 式(9)是混沌的。

考虑输出反馈控制系统:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} U(k) \\ Y(k) = [c_1 c_2] X(k) \\ U(k) = r - f(Y(k)) \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $x_i(k) \in R^{n_i}$ ,  $X(k) = [x_1(k) x_2(k)]^T$ ,  $Y(k) \in R^m$ ,  $U(k) \in R^l$ ,  $A_{ii} \in R^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in R^{n_i \times l}$ ,  $C_i \in R^{m \times n_i}$  ( $i=1, 2$ ),  $r \in R^l$ ,  $f: R^m \rightarrow R^l$  为分段线性函数。

现考虑降价系统:

$$x_1(k+1) = A_{11}x_1(k) + B_1[r - f(C_1x_1(k))] \quad (15)$$

应用定理二可证明下面的定理。

**定理三:**

若式(15)有Snapback repeller且 $A_{22}$ 所有特征值的绝对值小于1, 则存在正数 $\varepsilon$ 当 $A_{12}$ 和 $C_2$ 满足 $\|A_{12}\| < \varepsilon$ 和 $\|C_2\| < \varepsilon$ 时, 式(14)混沌。

### 3 混沌区域的确定

本部分我们将运用上节给出的概念和定理, 来讨论式(6)和式(7)组成的系统。为了讨论方便将式(6)和式(7)构成的系统重写如下:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + a_{12}x_2(k) + b_1e(k)$$

$$x_2(k+1) = a_{22}x_2(k) + b_2e(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

$$e(k) = K_d[-y(k) + |y(k) + \frac{\pi}{2}| - |y(k) - \frac{\pi}{2}|]$$

$$n\pi < y(k) \leq (n+2)\pi \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16)$$

式中:  $x_i \in R^1$  ( $i=1, 2$ ),  $y \in R^1$ ,  $a_{12} = K_0(1-a)$

$$a_{22} = a, \quad b_1 = K_0(T+a-1), \quad b_2 = (1-a)$$

现在来考查 $y(k) \in (-2\pi, 2\pi)$ 的区域。显然, 式(16)在此区域内有三个不动点, 分别为:

$$\bar{X}^{(1)} = \left( \frac{(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)\pi K_d}{(1 - K_d b_1)a_{22} + a_{12}K_d b_2} \quad \frac{((1 - K_d b_1)b_2 + K_d b_2^2)K_d \pi}{(1 - K_d b_1)a_{22} + a_{12}K_d b_2} \right)^T$$

$$\bar{X}^{(2)} = (0 \quad 0)^T$$

$$\bar{X}^{(3)} = \left( -\frac{(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)\pi K_d}{(1 - K_d b_1)a_{22} + a_{12}K_d b_2} \quad -\frac{((1 - K_d b_1)b_2 + K_d b_2^2)K_d \pi}{(1 - K_d b_1)a_{22} + a_{12}K_d b_2} \right)^T$$

在区域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内, 式(16)有

$$|a_{22}| < 1 \tag{17}$$

当  $a_{12} = 0$  时, 有降阶系统:

$$x_1(k+1) = g_1(x_1(k)) = \begin{cases} (1 - K_d b_1) x_1(k) + K_d b_1 \pi & \frac{\pi}{2} < x_1(k) < \frac{3\pi}{2} \\ (1 + K_d b_1) x_1(k) & |x_1(k)| < \frac{\pi}{2} \\ (1 - K_d b_1) x_1(k) - K_d b_1 \pi & -\frac{3\pi}{2} < x_1(k) < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{18}$$

现在我们讨论式(18)的不动点  $\bar{x}_1^{(2)} = 0$  在何条件下, 对应于式(16)的不动点  $\bar{x}^{(2)} = [00]^T$  为 Snapback repeller.

在不动点  $\bar{x}_1^{(2)}$  的邻域  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  内, 对任意的  $x_1$  有  $dg(x_1)/dx_1$  存在, 且  $dg(x_1)/dx_1 = 1 + K_d b_1 > 1$  ( $b_1 > 0$ ). 由于  $g_1^{-1}(\frac{\pi}{4}) = (1 + K_d b_1) \frac{\pi}{4} > 0$ , 所以, 只要  $g_1^2(\frac{\pi}{4}) < 0$ , 就会在区域  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  内存在一个点  $X_1$ , 使  $g_1^2(\frac{\pi}{4}) = 0$ . 即当方程

$$(1 - K_d b_1)(1 + K_d b_1) \frac{\pi}{4} + K_d b_1 \pi < 0 \tag{19}$$

满足时, 由第二节知, 式(16)有 Snapback repelle, 存在.

考虑  $g_1(x)$  的定义域, 还应有下式成立:

$$g'_1\left(\frac{\pi}{4}\right) < \frac{2K_d b_1 \pi}{1 + K_d b_1} \tag{20}$$

综合考虑式(19)和式(20), 有:

$$2 + \sqrt{5} < K_d b_1 < 3 + 2\sqrt{2} \tag{21}$$

现在我们确定定理三中的  $\varepsilon$

由于式(16)不动点  $\bar{x}^{(2)}$  的局部稳定流形和不稳流形分别为:

$$W_{Loc}^s(\bar{x}^{(2)}) = \{[0, X_2]^T : X_2\}$$

$$W_{Loc}^u(\bar{x}^{(2)}) = \{[X_1, 0]^T : |X_1| < \frac{\pi}{2}\}$$

显然, 以初值  $x(0) = [\frac{\pi}{4}, 0]^T$  出发的轨线,  $X(1)$  和  $X(2)$  分别为:

$$X(1) = \begin{pmatrix} (1 + K_d b_1) \frac{\pi}{4} \\ K_d b_2 \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \quad \text{及}$$

$$X(2) = \begin{cases} (1 - (K_d b_1)^2) \frac{\pi}{4} + a_{12} K_d b_2 \frac{\pi}{4} + K_d b_1 \pi \\ - K_d b_2 (1 + K_d b_1) \frac{\pi}{4} + a_{22} K_d b_2 \frac{\pi}{4} + K_d b_2 \pi \end{cases}$$

若定义  $Q = X(1)$ ,  $R = X(2)$ , 当下式

$$(1 - (K_d b_1)^2) \frac{\pi}{4} + a_{12} K_d b_2 \cdot \frac{\pi}{4} + K_d b_1 \pi < 0 \quad (22)$$

成立时, 以  $Q, R$  为端点的直线与  $X_2$  轴截交。即从  $X(0) \in W_{Loc}^U(\bar{x}^{(2)})$  出发的轨线, 总有  $X(M) \in W_{Loc}^S(\bar{x}^{(2)})$  ( $M$  为正整数)。因此, 定理一得到满足。所以, 当式(21)和式(22)同时成立, 式(16)混沌。

在式(21)和式(22)中, 分别代入  $a_{12} = K_0(1-a)$ ,  $a_{22} = a$ ,  $b_1 = K_0 \times (T+a-1)$ ,  $b_2 = (1-a)$ 。并设

$$K_H = K_d K_0 \quad (23)$$

有:

$$\begin{aligned} & K_H^2 (T+a-1)^2 - 4K_H (T+a-1) - K_H (1-a)^2 - 1 > 0 \\ & 2 + \sqrt{5} < K_H (T+a-1) \\ & < 3 + 2\sqrt{2} \quad \dots\dots (24) \end{aligned}$$

其中  $K_H$  为环路总增益。

图(3)为  $K_H - T$  平面, 阴影部分对应于式(16)产生混沌的区域。

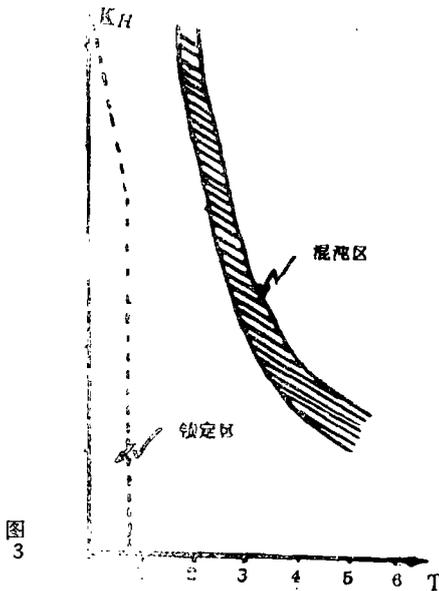


图3

#### 4 计算机模拟

在此给出式(16)的计算机模拟结果, 所有结果均去掉了暂态过程。经大量计算表明, 有如下几点结论:

① 对应于图3中阴影区域的  $K_H$  和  $T$  值, 系统均处于混沌状态, 与理论分析结果一致。图4对应参数为  $K_H = 5$ ,  $T = 1.7$ 。

② 在相同的参数下, 不同的初值, 有不同的运动轨道。图4和图5是同一参数下, 不同初值的结果。显然与混沌系统对初值敏感的结论一致。

③ 对图3所示阴影区域外邻近的区域, 仍有使式(16)存在混沌的参数。图6即是阴影邻近区域内参数对应的结果。

④ 对远离图(3)所示阴影部分  $T$  值较小的区域, 对应于图3中虚线包围部分, 无论初值怎样选取, 系统均收缩到不动点  $X^{(2)} = (0, 0)^T$ 。这一结论表明, 只要  $K_H$  和  $T$  值选择合适均能使系统(环路)处于锁定状态。

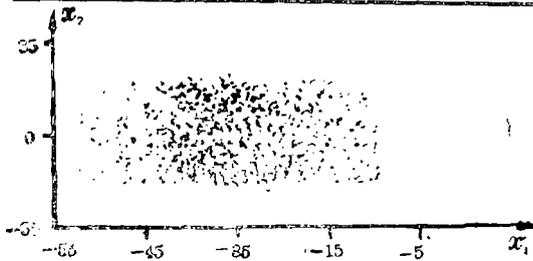


图 4

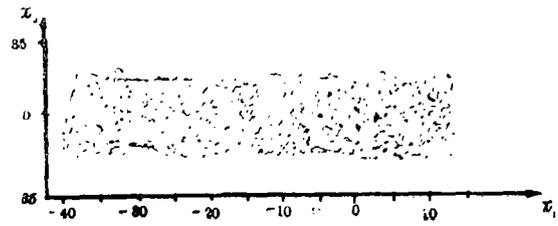


图 5

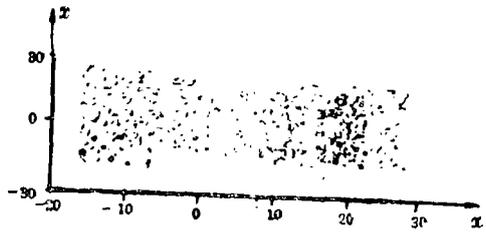


图 6

## 5 结 论

①本文确定了采样锁相环相位模型对应的差分方程。

②利用给出的理论结果, 导出了系统的混沌区域与环路增益, 采样周期之间的关系。

③计算机模拟结果与理论分析结果一致。同时表明用定理三求出的混沌范围不能包括所有产生混沌的参数。

④采样锁相环系统, 当环路增益及采样周期选择不适当时, 可使系统永远不能锁定, 一直处于跳周状态。

⑤本文的分析为选择 $K_H$ 和 $T$ 使环路迅速锁定提供了一定的参考价值。

有关环路的实验结果和采用其它低通滤波环节的结果将在以后的文章中陆续报道。

## 参 考 文 献

- [1] T.Matsumoto, L.O.Chua, and M.Komuro, "The double scroll", IEEE Trans. Circuits. Syst., Vol.CAS-32, PP.797-818.
- [2] TAKASHI MATSUMOTO, "Chaos In Electronic Circuits", IEEE.Pro.Vol.75, No.8.1987.
- [3] L.O.Chua and TAO Lin, "Chaos in Digital Filters" IEEE Trans., Circuits sys., Vol.CAS-35, No.6, 1988
- [4] 郑继禹等, "锁相环路原理与应用" 人民邮电出版社, 1984.
- [5] T.Ushio and K.Hirai, "Chaotic behavior In Piecewise-Linear Sampled-data Control systems", Int. J. Nonlinear Mech., Vol.20, No.5/6 PP.493-506, 1985.

## Chaotic Behavior of The Sampled Phase-locked loop System.

Wang Junkun and others

(Department of Computer and automation)

**Abstract:** In this paper, We study the chaotic behavior of the widely used second order sampled phase-locked loop systems in communication and control systems. Our approach is theoretical as well as computer experimental. We obtained the relation of the loop gain, Sample period and chaotic region of system.

**Keywords:** chaos, phase-locked loop