第15卷 第3期 郑州工学院学报 Vol.15 No.3
1994年 9 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Sep. 1994

两种确定最优组合权系数方法的比较研究*

王明涛

(郑州工学院管理系)

摘 要: 组合预测的关键是确定加权系数，本文提出两种计算最优加权系数的方法并对之加以比较研究，通过实例说明其应用情况。

关键词: 加权系数，优化组合，组合预测。

中图分类号: O224: C931

组合预测是目前预测科学研究的热门课题之一。也是应用十分广泛的预测方法之一，组合预测的关键是确定各个单一预测方法的加权系数。本文在文献[1]，[4]的基础上提出了两种确定加权系数的方法，并对之进行了比较分析。

1 确定最优权系数的理论基础

设对同一个预测问题，有 m 种预测方法，有 n 个实际观测值

Y_t－－实际观测值 $t=1, 2, \cdots, n$

fit－－第i种方法的预测值 $i=1, 2, \cdots, m$; $t=1, 2, \cdots, n$

$e_{it}=Y_t \ \ f_{it}$－－第i种方法的预测误差

K_i－－第i种方法的加权系数 $i=1, 2, \cdots, m$;

$f_t=K_1d_{1t}+K_2f_{2t}+\cdots+K_mf_{mt}=\sum_{i=1}^{m}K_if_{it}$－－ 加权平均预测值，

$t=1, 2, \cdots, n$;

$e_t=Y_t-f_t$－－组合预测方法的预测误差

最优组合权系数确定的基本原则是使组合预测误差的平方和最小，即

$$J=\sum_{t=1}^{n}e_t^2=\sum_{t=1}^{n}[Y_t-(K_1f_1t+K_2f_2t+\cdots+K_mf_mt)]^2\rightarrow Min$$

---

* 收稿日期: 1994--01--02

2　确定最优权系数的两种方法

2.1　文献[1]中唐小我老师提出的方法（简称唐法）。

设 $\sum_{i=1}^{m} K_i = 1$ 　则

$$e_t = Y_t - f_t = \sum_{i=1}^{m} K_i Y_t - \sum_{i=1}^{m} K_i f_{it} = \sum_{i=1}^{m} K_i L(Y_t - f_{it}) = \sum_{i=1}^{m} K_i e_{it}$$

记 $E_i = [e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{im}]^T$.　$e = [E_1, E_2, \cdots, E_n]$

$R = [1, 1, \cdots, 1]^T$ 　$K = [K_1, K_2, \cdots, K_m]^T$

再记

$$E = e^T e = \begin{bmatrix} \sum_1^n e_{1t}^2 \sum_1^n e_{it} e_{2t} \cdots \sum_1^n e_1 t \cdot e_{mt} t \\ \sum_1^n e_2 t \cdot e_1 t \sum_1^n e_2 t^2 \cdots \sum_1^n e_{2t} e_{mt} \\ \sum_1^n e_{mt} e_{1t} \sum_1^n e_{mt} e_{2t} \cdots \sum_1^n e_{mt}^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

则组合预测误差平方和 $J = \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = K^T E K$

由 $\sum_{i=1}^{m} K_i = 1$ 　则　$R^T K = 1$

引入拉格朗日乘子 λ，则 $J = R^T E K + \lambda(R^T K - 1)$

假定 E_i 是线性独立的，从而 E 总是可逆矩阵。

$$求 \quad \frac{\partial T}{\partial K} = 0 \qquad 则 K = \frac{E^{-1} R}{R^T E^{-1} R} \tag{2}$$

$$J_{min} = \frac{1}{R^T E^{-1} R} \tag{3}$$

2.2　回归确定法

“唐法”是从单个预测方法的预测误差 e_{1t} 为出发点计算组合权系数。除此之外，我们还可以从单个预测方法的预测值出发求得组合权系数 K。

基本思路：将每种方法的预测 f_{it} 作为自变量，其预测值作为自变量的值，构造：

$$Y_t = K_1 f_{1t} + K_2 f_{2t} + \cdots + K_m f_{mt} + e_t$$

用多元线性回归法直接求得 k_i 值($i = 1,2,\cdots,m$)。

根据文献[4]

记，$t = 1,2,\cdots,n$

$f_{11}, f_{12}, \cdots, f_{1n}$

$f_{21}, f_{22}, \cdots, f_{2n}$

$\cdots$

$f_{m1}, f_{m2}, \cdots, f_{mn}$

为m种方法的预测值

$Y_1, Y_2, \cdots Y_n$为n个观测值 $F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{m1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix}$

$$Y = (Y_1 Y_2 \cdots Y_n)^T \qquad K = (K_1 K_2 \cdots K_m)^T$$

则，$$J = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = (Y - FK)^T \cdot (Y - FK) \tag{4}$$

2.2.1 无约束多元线性回归法

这是指对权系数K无任何约束，这时，要求一组K_i，$i = 1, 2, \cdots, m$

使$J = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \to Min$，则

$$\frac{\partial J}{\partial K} = 0$$

$$-2F^T(Y - FK) = 0 \qquad K = (F^T F)^{-1} F^T Y$$

记$A = F^T F \qquad B = F^T Y$ 则 $K = A^{-1} B$ (5)

$$J_{min} = Y^T Y - Y^T F A^{-1} F^T Y \tag{5$'$}$$

2.2.2 有约束时多元线性回归法

这是指对权系数K有约束，为区别记为K_R 即要求$\sum_{i=1}^{m} K_{Ri} = 1$

记 $R = [1, 1, \cdots, 1]_{1 \times m}$ 约束条件等价为$RK_R = 1$ (6)

引入拉格朗日乘子λ，则 $J = (Y - FK_R)^T (Y - FK_R) + \lambda(RK_R - 1)$

要使J最小，则 $\frac{\partial J}{\partial K_R} = 0$

$$-2F^T(Y - FK_R) + \lambda R^T = 0 \tag{7}$$

$$2K_R = 2(F^T F)^{-1} F^T Y - \lambda (F^T F)^{-1} R^T = 2A^{-1} B - \lambda A^{-1} R^T \tag{8}$$

(8)式两边同时乘R $\quad 2RK_R = 2RA^{-1}B - \lambda RA^{-1}R^T$ (9)

将（6）式代入（9）式则

$$\lambda=\frac{2(RA^{-1}B-1)}{RA^{-1}R^{T}} \tag{10}$$

将（10）式代入（8）式，，则

$$K_{R}=A^{-1}B-\frac{A^{-1}R^{T}(RA^{-1}B-1)}{RA^{-1}R^{T}}=K-\frac{A^{-1}R^{T}(RK-1)}{RA^{-1}R^{T}} \tag{11}$$

3 两种方法比较研究

3.1 两种方法的理论基础相同

无论是哪种方法，它们的出发点均使组合预测误差平方和 $J=\sum_{t=1}^{n}e_{t}^{2}\to Min$。它们的不同之处在于处理问题的着眼点不同。“唐法”着眼于单个预测误差 e_{it}，通过构造 E 矩阵，用公式 $K=\frac{E^{-1}R}{R^{T}E^{-1}R}$ 求出系数 K；而回归确定法着眼点是单个预测方法的预测值，通过构造 A，B 矩阵，用公式 $K=A^{-1}B$ 或（11）式，求得系数 K。

3.2 两种方法均不能保证 $0\leqslant K_{i}\leqslant 1$，$i=1,2,\cdots,m$。

两种方法匀无 $0\leqslant K_{i}\leqslant 1$ 的约束，故在实际应用中，不能使 K_{i} 在 $[0,1]$ 之间。“唐法”和有约束的回归确定法虽然有 $\sum_{i=1}^{m}K_{i}=1$ 的约束，但无 $K_{i}\geqslant 0$ 的限制，故不能保证 $0\leqslant K_{i}\leqslant 1$，这样使 $\sum_{i=1}^{m}K_{i}=1$ 的约束显得意义不明确。

3.3 实际应用中两种方法出现了较大差别

我们将两种方法分别用于《河南省化工行业专门人才预测研究》课题中，得出的结论很不相同。

①数据资料

表 1

f_{it}	年份						
	1980	1982	1984	1986	1988	1990	1992
f_{1t}	5865.28	6435.57	7943.94	10390.4	13274.9	18097.5	23358.2
f_{2t}	5967.44	6527.73	8016.0	10432.2	13776.4	18048.6	23248.8
f_{3t}	4921.74	6488.58	8566.22	11154.7	14254.0	17864.1	21985.0
f_{4t}	5266.75	6888.72	8915.62	11347.4	14184.2	17425.9	21072.4
f_{5t}	4348.8	6520.19	9015.65	11835.2	14978.8	18446.5	22238.3
y_{t}	6014.0	6781.0	8076.0	9215.0	14120.0	18689.0	22665.0

本课题中，我们采用了五种预测方法，然后进行组合预测。各种方法自1980年—1992年专门人才预测值及观测值如表1

② 用两种方法分别进行(f_{1t}, f_{2t})，(f_{1t}, f_{2t}, f_{3t})，$(f_{1t}, f_{2t}, f_{3t}, f_{4t})$，$(f_{1t}, f_{2t}, f_{3t}, f_{4t}, f_{5t})$，四种组合预测，其组合权系数及组合预测误差平方和计算结果如表2。

表 2

组合	权系数		$J_{min}=\sum_{t=1} e_t^2$	
	$K=A^{-1}B$	$K=E^{-1}R/R^TE^{-1}R$	回归确定法	唐法
$f_t^{(1)}=K_1f_{1t}$	$K_1=1$	$K_1=1$	0.58849E+07	0.58849E+07
$f_t^{(2)}=K_1f_{1t}+K_2f_{2t}$	$K_1=0.5083$ $K_2=0.4948$	$K_1=0.52834$ $K_2=0.47166$	0.58763E+07	0.58699E+07
$f_t^{(3)}=K_1f_{1t}+K_2f_{2t}+K_3f_{3t}$	$K_1=0.0329$ $K_2=1.1410$ $K_3=-0.1763$	$K_1=0.0376$ $K_2=1.1386$ $K_3=-0.1761$	0.57283E+07	0.571534E+07
$f_t^{(4)}=K_1f_{1t}+K_2f_{2t}+K_3f_{3t}+K_4f_{4t}$	$K_1=2.1026$ $K_2=0.0175$ $K_3=-0.5971$ $K_4=0.4089$	$K_1=0.07611$ $K_2=1.1011$ $K_3=-0.1847$ $K_4=0.0075$	0.19807E+10	0.571546E+07
$f_t^{(5)}=K_1f_{1t}+K_2f_{2t}+K_3f_{3t}+K_4f_{4t}+K_5f_{5t}$	$K_1=9.7823$ $K_2=-2.5947$ $K_3=5.1997$ $K_4=0.4967$ $K_5=-3.5335$	$K_1=68.161$ $K_2=-62.960$ $K_3=-23.289$ $K_4=14.860$ $K_5=4.2275$	0.15523E+12	0.410609E+07

注：f_{1t}为五种预测方法中预测误差平方和最小者.

这里要说明的是，回归确定法确定的无约束和有约束条件下的权系数，在进行组合预测时，组合误差平方和的变化趋势基本相同，故为分析简单，只考虑无约束条件下权系数的确定方法。

两种方法计算的最小组合预测误差平方和随组合数变化曲线如图1

图1表明，用前三种方法进行组合预测时，两种计算权系数的方法得出的权系数及组合预测平方和基本相同，且组合预测误差平方和随预测方法的加入呈下降态势，但当第四、五种预测方法加入时，两种计算权系数的方法得出的组合预测误差平方和变化却呈相

反趋势，“唐法”在稍稍上升后迅速下降，而回归确定法却明显上升。

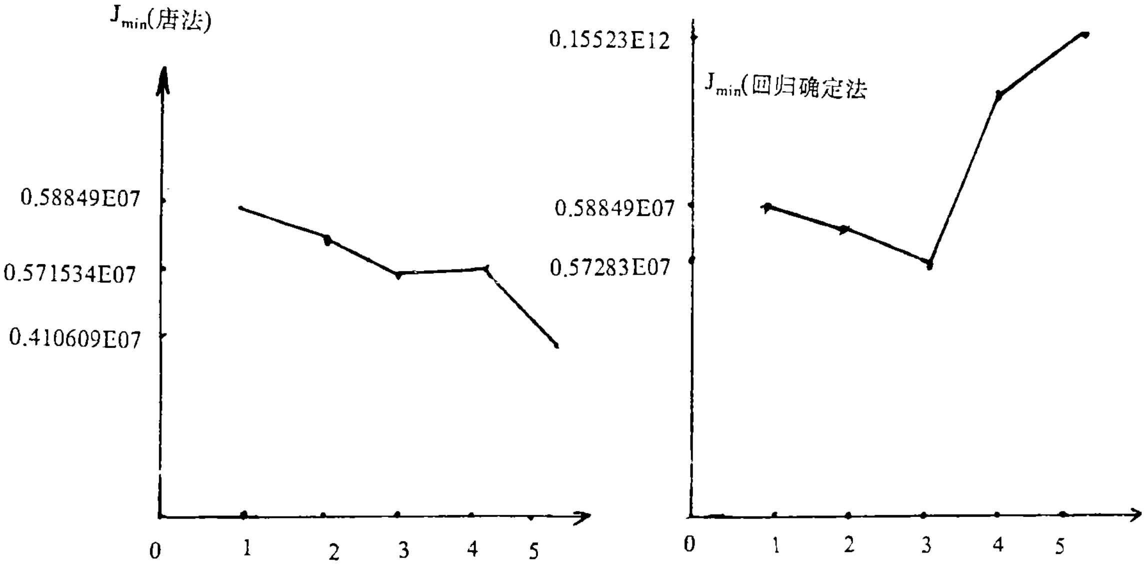

图 1

4　对两种方法的分析

4.1　从理论上讲，计算结果提出的问题，实质上是变结构组合预测的一个类型[5]。对“唐法”的变化趋势，文献[3]的第一部分已给出了详细的证明，并提出了当参加组合预测方法由 m 种增加到 m+1 种时，最优组合预测方法的预测误差平方和保持不变或减少的结论，在上例的计算中，由三组合增加到四组合时，计算的组合预测误差平方和稍稍上升是计算误差所致。回归确定法计算的组合误差变化趋势，理论证明如下（仅以无约束计算的权系数为例）

记

$$F_m=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{m1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix}=(f_1 f_2 \cdots f_m)$$

由式 (5)′，m 种方法组合时，最优预测方法的预测误差平方和为

$$J_m=Y_n^TY_n-Y_n^TF_mA_m^{-1}F_m^TY_n$$

则　$J_{m+1}=Y_n^TY_n-Y_n^TF_{m+1}A_{m+1}^{-1}F_{m+1}^TY_n$

下面分析J_{m+1}与J_m之间的关系：

$$A_{m+1}=F_{m+1}^TF_{m+1}=\begin{bmatrix} F_m^T \\ \cdots \\ f_{m+1} \end{bmatrix}[F_m \cdots f_{m+1}]=\begin{bmatrix} F_m^TF_m & F_m^Tf_{m+1} \\ f_{m+1}^TF_m & f_{m+1}^Tf_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$A_m = F_m^T F_m$$

记 $a = F_m^T f_{m+1}$ $a^T = f_{m+1}^T F_m$

$$d = f_{m+1}^T f_{m+1} - a^T A_m^{-1} a$$

引理1 A_{m+1}的逆矩阵为:

$$A_{m+1}^{-1} = \begin{bmatrix} A_m^{-1} + \dfrac{A_m^{-1} a a^T A_m^{-1}}{d} & -\dfrac{A_m^{-1} a}{d} \\ -\dfrac{a^T A_m^{-1}}{d} & \dfrac{1}{d} \end{bmatrix}$$

证明见文献[3]

$$F_{m+1} A_{m+1}^{-1} F_{m+1}^T = [F_m f_{m+1}] \begin{bmatrix} A_m^{-1} + \dfrac{A_m^{-1} a a^T A_m^{-1}}{d} & -\dfrac{A_m^{-1} a}{d} \\ -\dfrac{a^T A_m^{-1}}{d} & \dfrac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_m^T \\ f_{m+1}^T \end{bmatrix}$$

$$= F_m A_m^{-1} F_m^T + \frac{F_m A_m^{-1} a a^T A_m^{-1} F_m^{-1} - f_{m+1} a^T A_m^{-1} F_m^T}{d}$$

$$+ \frac{-F_m A_m^{-1} a f_{m+1}^T + f_{m+1} f_{m+1}^T}{d} \tag{12}$$

将 $a = F_m^T f_{m+1}$ $a^T = f_{m+1}^T F_m$ 代人（12）式，则

$$F_{m+1} A_{m+1}^{-1} F_{m+1}^T = F_m A_m^{-1} F_m^T - \frac{(I_n - F_m A_m^{-1} F_m^T) f_{m+1} f_{m+1}^T F_m A_m^{-1} F_m^T}{d}$$

$$+ \frac{(I_n - F_m A_m^{-1} F_m^T) f_{m+1} f_{m+1}^T}{d}$$

这里I_n为$n \times n$阶单位阵。

令 $G_m = I_n - F_m A_m^{-1} F_m^T (G_m^T = G_m)$

则 $$F_{m+1} A_{m+1}^{-1} F_{m+1}^T = F_m A_m^{-1} F_m^T + \frac{G_m f_{m+1} f_{m+1}^T G_m^T}{d} \tag{13}$$

将（13）式代人J_{m+1}则

$$J_{m+1} = Y_n^T Y_n - Y_n^T \left(F_m A_m^{-1} F_m^T + \frac{G_m f_{m+1} f_{m+1}^T G_m^T}{d}\right) Y_n$$

$$= J_m - Y_n^T \frac{G_m f_{m+1} f_{m+1}^T G_m^T}{d} Y_n$$

记　$H_m = Y_n^T \dfrac{G_m f_{m+1} f_{m+1}^T G_m^T}{d} Y_n$，$H_m$是一不定二次型，如上例

$m=2$时，$H_2 = 0.1902E+06$

$m=3$时，$H_3 = -0.1391E+07$

故 J_{m+1} 与 J_m 的关系是不确定的，也就是说，随着预测方法的增加，组合预测误差平方和可能下降，也可能上升，因而上述证明说明方法二计算结果的正确性。

4.2　从实际预测看

①五种预测方法在预测年度 1995 年的预测值及预测平均值如表 3

表 3

年份	预测法					
	f_{1t}	f_{2t}	f_{3t}	f_{4t}	f_{5t}	五种方法平均
1995	33,008	28,550	27,379	27,302	29,124	29.073

②两种确定最优权系数方法构成四种不同组合预测时，在预测年度 1995 的预测值如表 4。

表 4

年份	方法	$f_t^{(i)}$			
		$f_t^{(2)}$	$f_t^{(3)}$	$f_t^{(4)}$	$f_t^{(5)}$
1995	唐法	3.0896	28,902	29,076	34,4809
	回归法	3,0895	28,812	64,718	301,881

已知，河南省化工行业专门人才 1992 年为 2.2 万人，从表 4 看出，到 1995 年增加到 2.88 万人是可信的，而增加到 6 万人或 30 万人以上是绝对不可能的。因而“唐法”组合的最小点（5 组合）是不可信的；回归确定法指出的最小点（3 组合）可信度较大。

4.3　以上分析表明，“唐法”计算的最优组合权系数在实际应用中存在较大的缺陷，尤其是随着组合方法数的增加，由它计算的最小组合预测误差平方和会突然下降很多，表面上看是改进了预测精度，但实际预测结果甚至可能比经验预测还差；若干例子表明，回归确定法不存在这一问题，一般情况如图 1 所示，即随着组合方法数的增加，组合误差平方和下降。当组合误差平方和增加时，说明新增加的方法不能为减少组合预测方法的预测误差平方和作出贡献，这时可对该预测方法分配权系数为 0 或另作处理。总之在实际应用中，回归确定法比“唐法”更安全，同时，回归确定法对选择构成组合预测方法的单个预测法的指示性比“唐法”准确。

参　考　文　献

1 唐小我. 组合预测法研究. 预测. 1991(4)

2 赵文奇译. 二十年来的组合预测. 预测. 1991(3)
3 唐小我. 组合预测方法研究的若干新结果. 预测. 1992(5)
4 钟卫东. 程照熙. 回归群预测法. 预测. 1993(2)
5 谢如贤等. 变权重组合预测模型的建立与应用. 预测. 1992(2)

Comparison Research of Two Kinds of Methods of Determining the Optimal Weights of Combining forecasts

Wang Mintao
(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: The key of conbining forecasts is to determine the weightes of combining forecasts. In this paper two kinds of methods of determining the optimal weightes are preseted and their applications are illustrated by atual examples.

Keywords: Weightes, Combining forecasts.