

# 任意平面域有限元网格划分技术<sup>\*</sup>

杨晓东 刘春太 申长雨 陈静波  
(郑州工业大学橡塑模具国家工程研究中心)

**摘 要** 在引入非 Delaunay 三角形,非 Delaunay 边概念基础上,将 Delaunay 三角化方法和前沿生成方法有机结合起来,对于任意单连通或多连通平面区域,提出了一个有效的内部区域节点生成方案,它不仅保证了局部和整体网格的质量,而且计算效率大大提高。本文工作已作为前处理机在注塑模 CAE 软件 Z-Mold 中实现。

**关键词** 平面网格划分; 前沿生成法; Delaunay 三角形

**中图分类号** TH 126 TB 115

## 0 引言

任意平面域的三角形网格自动剖分技术在过去的 20 年中已得到充分的发展。目前,最为流行的是 Delaunay 三角剖分方法和前沿生成算法(Advancing Front Technique)<sup>[1~3]</sup>。S. H. Lo<sup>[1]</sup>在引入非 Delaunay 三角形及准 Delaunay 三角形的基础上,将 Delaunay 三角剖分和前沿生成法有机地结合起来,充分利用了前沿生成法简单、有效和通用的性质,而且保证了三角形的 Delaunay 化。但它的均匀布点方案往往只能保证区域内部三角形的质量,而造成区域边界三角形形态较差。因此,如何生成既能保证局部最优,又能保证整体最优的内部节点生成方案也应该是三角形剖分时主要考虑的因素。

本文从正六边形结构出发,在平行线布点的基础上,调整平行线间距,并沿平行线由中间向两端布点,使内部节点呈六边形分布而保证内部三角形的质量。然后利用 Watson 算法<sup>[2]</sup>调整边界附近的节点从而提高边界附近三角形的质量。单元的生成采用了 Delaunay 基础上的前沿生成算法,同时引入 S. H. Lo<sup>[1]</sup>所采用的 Delaunay 三角形和非 Delaunay 三角形概念:

- (1)Delaunay 三角形,三角形外接圆上和外接圆内不含其它节点。
- (2)准 Delaunay 三角形,如果有其它节点位于三角形外接圆上。
- (3)非 Delaunay 三角形,如果有其它节点位于三角形外接圆内。

准 Delaunay 三角形和非 Delaunay 三角形可以统一认为是非 Delaunay 三角形,而构成这些三角形的边定义为非 Delaunay 边,对于非 Delaunay 边所生成的三角形必须进行交叉干涉检查。而 Delaunay 边所生成的三角形则无需再作交叉干涉检查。

对于任意的单连通和多连通区域,区域的边界可以认为是由一系列有向线段构成。对于多连通区域,外边界的线段按逆时针走向;而内边界按顺时针走向,边界线段构成初始前沿,并标记为非 Delaunay 边。前沿的记录采用队列的方法,队列的首部为当前待生成的边

\* 国家自然科学基金重点资助项目(19632004)

收稿日期:1997-09-04;修改稿返回日期:1998-06-30

第一作者 男 1967 年 2 月生 硕士学位 工程师

界段,新生成的有向线段将加入队列尾部,使得三角化过程逐步向区域内部推进。算法综合了前沿生成法和 Delaunay 三角化的优势,通过具体算例考证,在质量和效率上都取得比较满意的效果。

## 1 算法

### 1.1 内部区域节点的生成

利用平行线布点方法可以很容易地实现内部节点的正六边形分布,从而保证内部区域网格划分的等边三角形化。其步骤如下:

(1) 求出区域的  $Y$  向坐标的最大和最小值,并在它们之间假想地画上间距为  $0.866a$  且与  $X$  轴平行的直线。

(2) 求出任一平行线与边界的交点(偶数个),将交点按  $X$  坐标的增序排列,然后依次每两个分成一组,在每组交点之间的连线上布点。

(3) 求出两交点的中点,调整其位置使其位于上一条平行线邻近两节点连线的垂直平分线上,如图 1 所示,  $C$  点位于第  $i+1$  条平行线的中点处,  $A, B$  点为第  $i$  条平行线距  $C$  点最近的两个节点,在第  $i+1$  条平行上调整  $C$  点位置,使其位于  $A, B$  连线的垂直平分线上,如图 2 所示,“+”表示节点位置。

(4) 由  $C$  点向两端布点,各分点间距恒为  $a$  同时按下述条件进行取舍判断:

距离边界上任意线段两个端点的距离大于  $0.5a$ 。

距离边界上任意线段两个端点的距离大于  $0.8l_i$ , 其中  $l_i$  为边界段长度。

同时满足上述两个条件的分点取作内部节点。所有内部节点用链表结构储存,称作内部节点表。内部节点一旦连入三角形就将其从内部节点表中删除。

### 1.2 边界附近节点分布的调整

由于边界几何形状的不同,使得边界附近节点的分布难于符合正六边形结构,影响边界附近三角形的质量。过密的节点分布往往会形成一些扁平的三角形,过疏的节点分布又会造成外接圆半径较大的狭长三角形。这些三角形中大部分形态不好,质量不高。为此,在不牺牲内部三角形质量的前提下,在边界处分布较少的节点,再利用 Watson 方法在边界区域 Delaunay 三角形外接圆内部引入新的节点来改善边界区域的节点分布。具体地讲,首先对初始前沿进行 Delaunay 三角化,但不将生成的三角形计入三角形表,也不破坏初始前沿表,只将新生成的节点加入内部节点表中。其步骤如下:

(1) 从初始前沿队列的首部取出有向边  $AB$ ,按 1.3 中所述三角形生成方法找到节点  $C$ ,使  $ABC$  构成 Delaunay 三角形。

(2) 判断三角形三条边的长度,若任一条边大于  $1.4a$ ,或者边  $AC$  与  $BC$  的夹角  $ACB < 30^\circ$ ,考察其外接圆圆心  $O$  作为内部节点的可能性。若点  $O$  满足 1.1 中第(4)条所述条件,增加  $O$  点为内部节点,如图 2 所示,用“+”表示新增加的内部节点位置。

(3) 判断是否到队列尾部,若是则结束,否则转入(1)继续循环。

### 1.3 三角形生成

在按上述方法已经生成内部节点和边界节点后,按前沿生成法形成 Delaunay 三角形。在开始时,生成前沿等于区域的边界,并全部记为非 Delaunay 边。主要步骤如下:

(1) 从前沿队列首部取出有向边  $AB$ ,从内部节点表和前沿节点表形成候选点集,候选

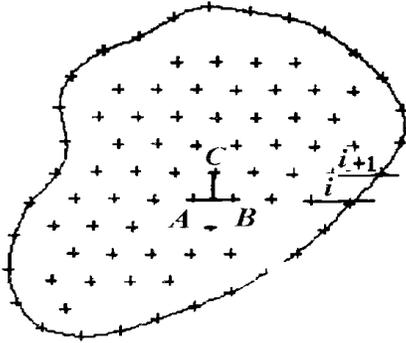


图1 由中间向两端布点

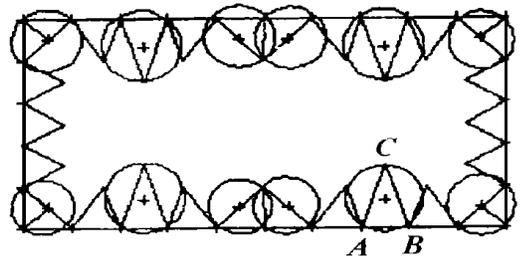


图2 在边界附近添加新的节点

点必须位于有向边  $AB$  左侧的邻域内一般取  $3a$  的范围既可。将候选点坐标及顶角值一并记入当前候选节点链表中。

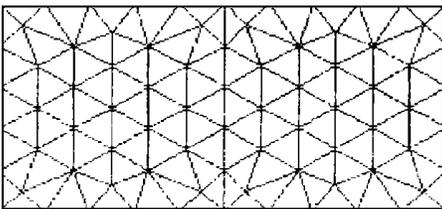
(2)取出当前候选链表中顶角值最大的点  $C$ ，若  $AB$  为 Delaunay 边，直接转入(3)执行。

若  $AB$  为非 Delaunay 边，此时需进行前沿交叉干涉判断，若边  $AC, BC$  与前沿不相交，转入(3)执行。若边  $AC, BC$  与前沿相交，从当前候选链表中删除此点。重复执行取点过程，直到取出一个点(不妨仍称为  $C$  点)，使得边  $AC, BC$  与前沿不相交。

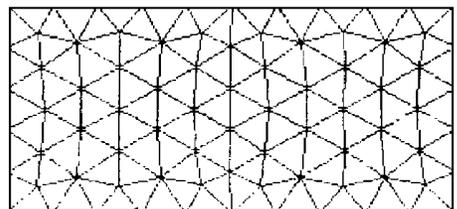
(3)三角形生成。将  $\triangle ABC$  记入三角形表，若  $\triangle ABC$  为 Delaunay 三角形，有向边  $AC$  和  $CB$  记为 Delaunay 边，若  $\triangle ABC$  为非 Delaunay 三角形，有向边  $AC$  和  $CB$  记为非 Delaunay 边。

(4)更新前沿队列。首先从前沿队列中删去有向边  $AB$ 。然后，判断  $C$  点类型，若为当前内部节点表中的点，将有向边  $AC, CB$  及其 Delaunay 属性一并记入前沿队列表中；若  $C$  点为前沿上的点，判断有向边  $AC, BC$  是否与前沿中已有的有向边重合，若重合说明  $AC$  或  $BC$  本身处于前沿上，将其从队列中删去，若不重合则将  $AC$  或  $BC$  及其 Delaunay 属性加入队列中。

(5)判断前沿队列是否为空，若是则结束循环，否则转入(1)继续执行。



(a) 未光滑,  $\alpha_{ave} = 0.95, \alpha_{min} = 0.81$



(b) 光滑后,  $\alpha_{ave} = 0.98, \alpha_{min} = 0.92$

图3 矩形区域, 节点数: 80, 单元数: 128

如图3所示, 一个矩形区域的划分结果及其 Laplace 光滑后的结果, 其中  $\alpha$  表征三角形  $ABC$  的质量, 它的定义如下:

$$\alpha = 2\sqrt{3} \frac{\|CA \times CB\|}{\|CA\|^2 + \|CB\|^2 + \|AB\|^2}$$

当  $\alpha = 1$  时对应于等边三角形,  $\alpha$  值越小三角形质量越差。  
 (C)1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www

## 2 算例

图 4 为任意曲线构成的多连通区域,  $\alpha$  的平均值为 0.98, 最小值为 0.70, 486 微机用时 45 秒。

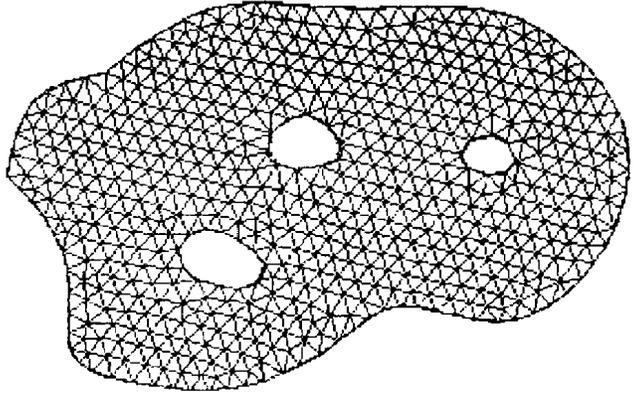


图 4 任意曲线构成的多连通区域,  
节点数: 607, 单元数: 1102

## 参考文献

- 1 Lo S H. Delaunay triangulation of non-convex planar domains. *Int J Numer Methods Eng.* 1989, 28: 2695~2707
- 2 Watson D F. Computing the  $n$ -dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. *Comput J.* 1981, 24: 167~172
- 3 Lo S H. A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains. *Int J Numer Methods Eng.* 1985, 21: 1403~1426

## Generation of Finite Element Mesh for Arbitrary Planar Domains

Yang Xiaodong Liu Chuntai Shen Changyu Chen Jingbo  
(Zhengzhou University of Technology)

**Abstract** With the introduction of “non-Delaunay” triangle and “non-Delaunay” segment, this paper integrates the most popular mesh generation technique, namely the Delaunay triangulation algorithm and the method of advancing front. An efficient scheme for generating interior nodes over any planar domains is presented, which ensures good quality mesh. The present work has been implemented in the form of a pre-processor in the injection mold CAE package Z-Mold.

**Keywords** planar mesh; delaunay triangle; advancing front technique