文章编号：1007-6492(1999)02-0012-03

粘弹性本构关系在注塑模CAE中的应用

李海梅，申长雨，陈静波，董斌斌

（郑州工业大学橡塑模具国家工程研究中心，河南 郑州 450002）

摘　要：比较了微分型、积分型粘弹性本构方程的特点，并对二者的等价性进行了证明．对选用的积分型粘弹性本构方程，根据注塑成型的特点进行简化、修正，并推导了其递推公式，便于粘弹性本构关系下有限元计算公式的推导和程序研制，为注塑模CAE中塑件残余应力计算和翘曲变形分析提供了理论基础．

关键词：粘弹性；注塑成型；注塑模CAE；本构关系

中图分类号：TB 115　　**文献标识码**：A

注塑模CAE的目标是通过对塑料材料性能的研究和注塑成型工艺过程的模拟，为制品设计、材料选择、模具设计、注塑成型工艺的制定及过程的控制提供科学依据．CAE技术中数学模型的选用对注塑模CAE预测结果的合理性与可靠性有非常重要的作用．粘弹性本构关系较好地反映了塑料的材料特性，在流动、保压、残余应力和翘曲变形分析等方面都有应用．通常，流动、保压分析多用微分形式的本构方程，残余应力和翘曲变形分析多用积分形式的本构方程[1]．本文比较了微分型、积分型粘弹性本构方程的特点，并对二者的等价性进行了证明．对选用的积分型粘弹性本构方程，根据注塑成型的特点进行了简化、修正，推导了便于有限元程序实现的递推公式，为注塑模CAE中塑件残余应力计算和翘曲变形分析提供了理论基础．

1　微分形式与积分形式的粘弹本构关系

1.1　微分算子形式

粘弹性材料的力学性质明显地依赖于温度和时间．这里考虑线性粘弹性材料本构方程的微分算子形式、积分形式的表示方法．

各向同性材料的应力应变关系的微分算子形式为[2]

$$P(D)\sigma(t) = Q(D)\varepsilon(t),$$

$$P(D) = \sum_{k=0}^{n} P_k D^k,$$

$$Q(D) = \sum_{k=0}^{n} q_k D^k. \tag{1}$$

式中：P_k，q_k 为材料常数；σ_{ij}，ε_{ij} 为应力、应变；D 表示算子 $\frac{d}{dt}$．

在单向拉伸应力状态下，从上面的微分算子公式中可得到一些常用模型的材料常数．微分算子表示的二元件Maxwell模型能反映高聚物的瞬态弹性、应力松弛现象，但无法反映蠕变现象．二元件Voigt模型能反映高聚物的蠕变现象，但无法描述瞬时弹性、应力松弛现象．三元件Poynting模型、Kelvin标准线性固体模型、Jeffreys模型、Lethersich模型既能反映应变的瞬时弹性，又能反映应变的推迟弹性．与二元件模型相比，三元件模型基本上反映了高聚物的力学响应，但反映的弹性响应不够完全，所以又有四元件Burgrs模型的应用．对于时间范围跨度大的材料要采用多元件的广义模型(如广义Maxwell模型、广义Voigt模型)才能真实地模拟材料的粘弹性力学性能．以微分算子表示的本构方程是以离散型的力学元件(虎克弹簧、牛顿粘壶)模拟为出发点的，微分方程只涉及应力、应变及它们各阶导数的当前值，不需要大量的以往历史时刻的数据，求解时有利于采用数值方法，但微分算子本构方程中的各个系数或力学元件的有关参数(如模量及粘度系数)必须通过实验数据的拟和求出．要较好地计算高聚物的应力、应变，不仅要解高阶微分方程式，还要根据实验获

收稿日期：1998-12-05；**修订日期**：1999-01-19

基金项目：国家自然科学基金资助项目(19632004)

作者简介：李海梅(1969-)，女，辽宁省沈阳市人，郑州工业大学讲师，博士，主要从事注塑模CAD/CAE方面的研究．

得的松弛模量 $E(t)$ 曲线和蠕变柔量 $F(t)$ 曲线反算微分算子的各个有关系数，计算工作量很大.

1.2 积分形式

各向同性材料应力应变关系的积分形式为[2]

$$s_{ij} = \int_{-\infty}^{t} G_1(t-\tau)\frac{\mathrm{d}e_{ij}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \ , \tag{2a}$$

$$\sigma_{kk} = t - G_2(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \ . \tag{2b}$$

式中：s_{ij}，e_{ij} 是应力、应变偏量；σ_{kk}，ε_{kk} 是体平均应力、体平均应变；G_1 是松弛函数；G_2 是与膨胀状态有关的体积模量.

式(2a)，(2b)可认为是 Boltzman 叠加原理的表述：现时的应力由全部应变增量的响应值叠加确定. 满足 Boltzman 叠加原理的积分形式又称遗传积分，具有时间平移不变性、衰减记忆性、卷积积分对称性、非回退性的遗传积分性质.

积分形式表示的线性粘弹性材料的应力应变关系，可以直接利用实验数据，不需要反算，计算量较少，而且与微分算子表达式相比能更确切地表达粘弹性材料的力学性能.

1.3 等价性的证明

微分算子形式、积分形式表示的线性粘弹性应力应变关系是等价的，根据文献[2]的思路，下面给出二者等价性的证明.

式(2a)的 Laplace 变换为

$$\bar{s}_{ij} = s\bar{G}_1\bar{e}_{ij}, \tag{3}$$

将式(1)中的应力应变的全量形式用偏量代替，有

$$P(D)s_{ij}(t) = Q(D)e_{ij}(t) \ , \tag{4}$$

上式中 $P(D)$，$Q(D)$ 意义同前. 对式(4)进行 Laplace 变换，有

$$P(s)\bar{s}_{ij}(s) - \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{N}p_k\sum_{r=1}^{k}s^r s_{ij}^{(k-r)}(0) =$$

$$Q(s)\bar{e}_{ij}(s) - \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{N}q_k\sum_{r=1}^{k}s^r e_{ij}^{(k-r)}(0) \ , \tag{5}$$

其中：

$$P(s) = \sum_{k=1}^{N}p_k(s)^k, Q(s) = \sum_{k=1}^{N}q_k(s)^k, \tag{6}$$

式(5)中，$s_{ij}^{(k-r)}$ 表示 $s_{ij}(t)$ 的 $k-r$ 阶导数在 $t=0$ 时的值，对 $e_{ij}(t)$ 也有类似的关系.

式(5)和式(3)只要满足下面的条件关系式，则二者等价.

$$sG_1 = Q(s)/P(s) \ , \tag{7a}$$

$$\sum_{r=k}^{N}p_r s_{ij}^{(k-r)}(0) = \sum_{r=k}^{N}q_r e_{ij}^{(k-r)}(0) \ ,$$

$$(k = 1,2,3,\cdots,N) \ . \tag{7b}$$

式(7b)为初值补充了一个必要条件，该条件说明应力、应变的初始条件不完全独立.

类似地可以证明粘弹性应力应变关系中与膨胀相关的体平均应力、体平均应变的微分算子形式等价于松弛积分形式，这样就完成了各向同性线性粘弹性应力应变关系微分算子形式、积分形式等价性的证明.

2 积分型热粘弹性本构方程及递推公式

2.1 塑件的热粘弹性本构方程

在塑件的积分型热粘弹本构方程中采用如下基本假设：(1) 不计结晶、取向、流动残余应力，聚合物的初始应力为零；(2) 聚合物是各向同性的热流变性简单材料；(3) 聚合物的应力应变值足够小，可以用线性粘弹性本构方程描述.

塑料的热粘弹性本构方程为

$$s_{ij} = \int_0^t G_1(\xi-\xi')\mathrm{d}e_{ij}(t) \ , \tag{8}$$

$$s = \int_0^t G_2(\xi-\xi')\mathrm{d}[e(t) - e_{th}(t)] \ , \tag{9}$$

式中：G_1，G_2 为松弛函数；t 为时间；s_{ij}，e_{ij} 为应力偏量、应变偏量；s，e 为体平均应力、体平均应变；e_{th} 为热应变；$\xi(t)$ 为修正的时间标量，表达式为

$$\xi(t) = \int_0^t \Phi(T)\mathrm{d}\tau \ , \tag{10}$$

其中移位函数 $\Phi(T)$ 表达式为[3]

$$\log\Phi = \frac{c_1(T-T_g)}{c_2+T-T_g} \ , \tag{11}$$

式中：T_g 是参考温度；c_1，c_2 为材料常数；T 为温度. 式(9)中的热应变为

$$e_{th} = \int_{T_0}^{T}\alpha(T)\mathrm{d}T \ , \tag{12}$$

式中：T_0 为参考温度. $\alpha(T)$ 的表达式为

$$\alpha(T) = \alpha_g + (\alpha_l - \alpha_g)\mathrm{d}T_f/\mathrm{d}T \ , \tag{13}$$

式中：α_g，α_l 为聚合物玻璃态、液态的线性热膨胀系数. 虚拟温度 T_f 为[4]

$$T_f = T + \int_{\xi(T)}^{\xi(T_0)} m(\xi-\xi')\frac{\partial T}{\partial \xi'}\mathrm{d}\xi' \ , \tag{14}$$

式中：$m(T)$ 为结构松弛函数.

2.2 积分型本构关系的递推公式

设式(8)，(9)中的松弛函数为 G_1，G_2，式(14)中 $m(T)$ 的表达式为

$$G_1(t) = 2\mu\varphi(t) \ , G_2(t) = 3\kappa\varphi(t) \ ,$$

$$m(t) = -\theta(t) \ , \tag{15}$$

其中：$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{p}g_k\exp(-t/\tau_k)$ ，

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^{c} c_k \exp(-t/\tau_k) , \qquad (16)$$

式中：τ_k 为松弛时间；g_k，c_k 是材料常数.

则式(8)，(9)，(14)可用级数和的形式表示

$$s_{ij}(t) = 2\mu \sum_{k=1}^{m} g_k \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi - \xi'}{\tau_k}\right) \mathrm{d}e_{ij}(t), \qquad (17)$$

$$s(t) = 3\kappa \sum_{k=1}^{m} g_k \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi - \xi'}{\tau_k}\right) \mathrm{d}[e(t) - e_{th}(t)] \qquad (18)$$

$$T_f - T = -\sum_{k=1}^{p} c_k \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi - \xi'}{\tau_k}\right) \mathrm{d}T(t) . \qquad (19)$$

3个表达式的积分项可用如下的方程统一描述

$$y(t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi - \xi'}{\tau}\right) \mathrm{d}x(t) . \qquad (20)$$

式(20)中的 $y(t)$ 可表示 $s_{ij}, s, T_f - T$；$x(t)$ 表示相应的 e_{ij}, e, T.

将与离散的时间 t_i 相对应的 $y(t_i)$ 记为 y_i，利用遗传积分的特点，则对于时刻 t_{n+1}，有

$$y_{n+1} = Y_1 y_n + Y_2(x_{n+1} - x_n) , \qquad (21)$$

其中：$Y_1 = \exp(-\triangle\xi/\tau)$；

$Y_2 = [1 - \exp(-\triangle\xi/\tau)] \cdot \tau/\triangle\xi$；

$\triangle\xi = \xi_{n+1} - \xi_n$.

利用式(21)，则式(8)，(9)，(14)有如下递推形式

$$s_{ij}(t_{n+1}) = \sum_{k=1}^{m} Y_1{}^k s_{ij}{}^k(t_n) + 2\mu \sum_{k=1}^{m} g_k Y_2{}^k \delta e_{ij}, \qquad (22)$$

$$s(t_{n+1}) = \sum_{k=1}^{m} Y_1{}^k s_{ij}{}^k(t_n) + 3\kappa \sum_{k=1}^{m} g_k Y_2{}^k \delta(e - e_{th}) , \qquad (23)$$

$$T_f = T - \sum_{k=1}^{p} \{ Y_1{}^k \theta^k(t_n) + c_k Y_2{}^k [T(t_{n+1}) - T(t_n)] \} , \qquad (24)$$

其中：
$$\delta e_{ij} = e_{ij}(t_{n+1}) - e_{ij}(t_n) ;$$
$$\delta e = e(t_{n+1}) - e(t_n) ;$$
$$\delta e_{th} = e_{th}(t_{n+1}) - e_{th}(t_n) .$$

这样，遗传积分的影响仅仅需要用到前一时刻的应力，大大减少了数据的存储量.

3 结束语

本文的积分型热粘弹性本构方程及其递推公式已在注塑件热残余应力计算中应用，并完成了相关的有限元程序的研制，有限元的数值计算结果比较合理[5]. 但文中的热粘弹本构方程没考虑塑料的流动、取向效应，应进一步研究各向异性的粘弹本构方程，以及与流动、保压分析的集成.

参考文献

[1] AKKERMAN R. Towards simulation of nonisothermal viscoelastic flows by finite elements[A]. Numerical Methods in Industrial Forming Processes[C]. Chenot Rotterdam: Balelkema, 1992. 329 - 334.

[2] CHRISTENSE R M. 粘弹性力学引论[M]. 郝松林，老 亮译. 北京：科学出版社，1990.

[3] FERRY J D. Viscoelastic Properties of Polymers (2nd)[M]. New York: John Wiley & Sons, 1970.

[4] NARAYANASWAMY O S. A model of structural relaxation in glass[J]. Journal of the American Ceramic Society, 1971, 53(10): 491 - 498.

[5] 李海梅. 注塑件翘曲变形研究及其数值模拟[D]. 大连：大连理工大学，1998.

Applications of Viscoelastic Constitutions for CAE of Injection Molding

LI Hai - mei, SHEN Chang - yu, CHEN Jing - bo, DONG Bin - bin

(NERC of Plastic and Rubber Mold & Die, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: The comparison of difference and integrate equations of viscoelastic constitutions are discussed in this paper, and then the equivalence proof of two constitution equations is given. According to the features of injection molding, two - dimension thermoviscoelastic integrate models have been simplified and modified to reduce storage space of hereditary integral items, and to obtain the recurrence formula which is helpful to FEM program code, which provide theory basis for calculation of residual stress and warping analysis of CAE for injection molding.

Key words: viscoelastic; injection molding; CAE of injection mold; constitution equations