

文章编号:1007-6492(2001)03-0104-04

求最小支撑树的方法探讨

周丽¹, 黄哲浩², 王博¹, 贺北方¹

(1. 郑州大学环境与水利学院, 河南 郑州 450002; 2. 温州浅滩围涂工程建设指挥部, 浙江 温州 325000)

摘 要: 针对关系矩阵表示的复杂网络图, 分析构成其最小支撑树的元素特点, 提出两种求最小支撑树的方法: 直接生成法和表上作业法。两种方法不需要作出复杂的网络图, 而直接从关系矩阵中生成最小支撑树, 从而能有效克服传统方法需绘网络图之不便。经实例研究, 两种方法在求解复杂问题的最小支撑树时有独到之处。

关键词: 最小支撑树; 关系矩阵; 网络图

中图分类号: O 157.6 **文献标识码:** A

0 引言

最小支撑树问题是运筹学重要内容之一, 求解这类问题的通用方法是破圈法和避圈法。若问题复杂, 涉及的对象很多, 给出的矩阵很庞大, 要想画出网络图相当困难, 此时无法用上述两方法求问题的最小支撑树。针对这种情况, 本文提出不需画出网络图而直接从关系矩阵得到最小支撑树的方法: 直接生成法和表上作业法。

1 预备知识

定义 1 设 V 为点的集合, E 为边的集合, 图 $G_1 = \{V_1, E_1\}$, 图 $G_2 = \{V_2, E_2\}$, 且 $V_1 = V_2, E_1 \subset E_2$, 若 G_1 是树图, 则称 G_1 是 G_2 的部分树。

定义 2 图的所有部分树中, 边长总和最短的树叫该图的最小部分树(也叫最小支撑树)。

定理 1 图中任一个点 i , 若 j 是与 i 相邻点中距离最近的点, 则边 $[i, j]$ 一定含在该树的最小支撑树内^[1]。

推论 把图的所有点分成 V 和 \bar{V} 两个集合, 则两集合之间连线的最短边一定包含在最小支撑树内^[1]。

若把 n 个点两两之间的关系用 $n \times n$ 阶矩阵 R_0 表示, 0 表示某一点与它本身的关系, ∞ 表示两点不直接相连, 即没有关系, 则 R_0 是一个对称矩阵, 研究时只取其上三角矩阵记作 R 。根据树图

的定义, 易知 n 个点的无圈连通图有 $n-1$ 条边, 又因为最小支撑树是所有边长之和最短的树图, 易知这 $n-1$ 条边对应上三角关系矩阵中的 $n-1$ 个尽可能小的数。有以下定理:

定理 2 具有 n 个点的图的最小支撑树所对应的边是该图的上三角关系矩阵中 $n-1$ 个数值相对较小且不构成圈的元素。

定理 3 设 $G = \{V, E\}$ 为 n 个点 m 条边的无向图, 则 G 是树图, 与下列命题等价。

G 中没有圈, 但在 G 中任两个不同点 u, v 之间增添边 $[u, v]$ 所得图含唯一的一个圈^[2]。

上三角关系矩阵 R 的主对角线上的元素全为 0, 因而一个 0 代表一个点。每个 0 所在的行和列表示这个点与所有点的关系。矩阵 R 中的每一个元素所在的行和列各对应主对角线上的一个 0, 也就是说一个元素联系两个点。当 R 中 m 个元素构成图是树图时, 则这 m 个元素所在的行和列对应的主对角线上的 $m+1$ 个 0 表示这个树图所涉及的点。根据定理 3, 若 R 中另一元素位于这 $m+1$ 个 0 中某两个 0 的行和列方向的交叉处, 则增添这一元素后必然在树图中形成圈。若这一元素只是位于 $m+1$ 个 0 中某一个 0 的行或列方向上但并不位于任两个 0 的行和列方向的交叉处, 也就是新增添的这一元素所对应的边只是与原树图中的某一点相连, 加上以后并不构成圈, 可见增添这一元素后的图仍是树图。易得以下定理。

收稿日期: 2001-03-01; 修订日期: 2001-06-16

基金项目: 河南省自然科学基金资助项目(004041000)

作者简介: 周丽(1976-), 女, 湖北省武汉人, 郑州大学硕士研究生, 主要从事水资源系统分析及工程经济方面的研究。

定理4 若矩阵 R 中 m 个元素构成的图是树图,将这 m 个元素所对应的主对角线上的 0 所在的行和列均用直线涂去,则纳入另一元素仍然构成树图的充要条件是这个元素在直线上且并不位于直线的交叉处.

2 直接生成法与表上作业法

2.1 直接生成法

直接生成法不需画出原问题的网络图,只需根据各对象间的关系矩阵,直接得到最小支撑树.该方法是从小到大的顺序,逐步画线连接其对应的点,看其是否构成圈,直至找到 $n-1$ 个较小的边,构成最小支撑树为止.直接生成法求最小支撑树的步骤如下:

(1) 从上三角关系矩阵 R 中找出数值最小的非零元素 r_{ij} ,画圈连接 r_{ij} 对应的 i 点和 j 点,边 $[i, j]$ 为最小支撑树的第 1 条边,在 R 中去掉 r_{ij} ,记为 $R_1 = R - r_{ij}$.

(2) 从矩阵 R_1 中找出数值最小非零元素 r_{pq} ,在上图中连接 r_{pq} 对应的 p 点和 q 点,看其是否构成圈.若不是,则边 $[p, q]$ 为最小支撑树的第 2 条边.在 R 中去掉 r_{pq} ,记为 $R_2 = R_1 - r_{pq}$;否则从关系矩阵 R_1 去掉元素 r_{pq} ,再从剩下元素中找到不构成圈的最小非零元素 r_{mn} ,边 $[m, n]$ 为最小支撑树的第 2 条边,在 R_1 中去掉 r_{mn} ,记为 $R_2 = R_1 - r_{mn}$.

(3) 如此重复第 2 步,直到在该图中出现第 $n-1$ 条边,这时所得的树图即最小支撑树.

2.2 表上作业法

上述的直接生成法是从上三角关系矩阵中找出元素,一步步画出最小支撑树.从中可看出:当关系矩阵的阶数很高、问题涉及的对象很多时,用直接生成法一步步找元素画图求最小支撑树的工作量大且作图复杂,为克服这一弊端可以采用表上作业法求最小支撑树.

表上作业法是在直接生成法的基础上,去掉作图这一步,直接在表上得到构成最小支撑树的 $n-1$ 个数.该方法的关键是如何判断一元素与其它元素是否构成闭合回路.这一问题可由定理 4 圆满解决.表上作业法求最小支撑树的步骤如下:

(1) 从上三角矩阵 R 中找出最小非零元素 r_{ij} ,将其对应的主对角线上的两个 0 所在的行和列用直线涂去,并将 r_{ij} 用“□”框起来.

(2) 在上三角矩阵 R 中,从被直线涂去了的元素中找出一个满足以下条件的非零元素:①没

有被“□”框起来;②数值最小;③不位于直线的交叉处.将其用“□”框起来,并将其对应的主对角线上的两个 0 所在的行和列用直线涂去(已涂去了的不需再涂).

(3) 如此重复第 2 步,直到被“□”框起来的数有 $n-1$ 个为止.这 $n-1$ 个数就构成最小支撑树的 $n-1$ 条边.

3 算例

已知 8 口海上油井,相互间距离如表 1 所示.已知 1 号井离海岸最近,为 5 海里.问从海岸经 1 号井铺设油管将各油井连接起来,应如何铺设使输油管长度为最短(为便于计量和检修,油管只准在各井位处分叉).

表 1 8 口油井间距离

井号	2 #	3 #	4 #	5 #	6 #	7 #	8 #
1 #	1.3	2.1	0.9	0.7	1.8	2.0	1.5
2 #		0.9	1.8	1.2	2.6	2.3	1.1
3 #			2.6	1.7	2.5	1.9	1.0
4 #				0.7	1.6	1.5	0.9
5 #					0.9	1.1	0.8
6 #						0.6	1.0
7 #							0.5

首先,用点表示各油井,关系矩阵表示它们相互间的距离,最优解为网络图的最小支撑树.

3.1 避圈法或破圈法求解

先画出整个问题的网络图,用避圈法或破圈法求出最小支撑树,如图 1 所示.满足题意的最短油管铺设长度为 10.2 海里.

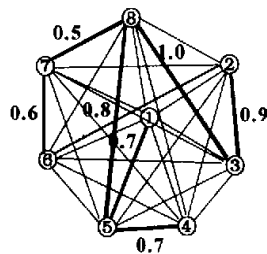


图 1 8 口油井的网络图和最小支撑树
Fig.1 The web graph and the minimum spanning tree of 8 oil wells

从此看出,原网络图共有 $(1+7) \times 7/2 = 28$ 条边,虽然不算很复杂,却也相当繁琐.

3.2 直接生成法求解

据题意可得 8 个点之间的上三角关系矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1.3 & 2.1 & 0.9 & 0.7 & 1.8 & 2.0 & 1.5 \\ & 0 & 0.9 & 1.8 & 1.2 & 2.6 & 2.3 & 1.1 \\ & & 0 & 2.6 & 1.7 & 2.5 & 1.9 & 1.0 \\ & & & 0 & 0.7 & 1.6 & 1.5 & 0.9 \\ & & & & 0 & 0.9 & 1.1 & 0.8 \\ & & & & & 0 & 0.6 & 1.0 \\ & & & & & & 0 & 0.5 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 从 R 中找出最小非零元素为 $r_{78} = 0.5$, 作图连接 7 点和 8 点, 边 $[7, 8]$ 为最小支撑树的第 1 条边, 如图 2. 从 R 中去掉 r_{78} , 记 $R_1 = R - r_{78}$.

(2) 从 R_1 中找出最小非零元素为 $r_{67} = 0.6$, 在图 2 中继续作图连接 6, 7 点, 没有构成圈, 所以边 $[6, 7]$ 为最小支撑树的第 2 条边, 从 R_1 中去掉 r_{67} , 记 $R_2 = R_1 - r_{67}$.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1.3 & 2.1 & 0.9 & 0.7 & 1.8 & 2.0 & 1.5 \\ & 0 & 0.9 & 1.8 & 1.2 & 2.6 & 2.3 & 1.1 \\ & & 0 & 2.6 & 1.7 & 2.5 & 1.9 & 1.0 \\ & & & 0 & 0.7 & 1.6 & 1.5 & 0.9 \\ & & & & 0 & 0.9 & 1.1 & 0.8 \\ & & & & & 0 & 0.6 & 1.0 \\ & & & & & & 0 & 0.5 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

⑧ — 0.5 — ⑦

图 2 直接生成法求最小支撑树的过程

Fig. 2 The process of getting the minimum spanning tree using the method of directly getting

(3) 重复第 2 步, 得第 3, 4, 5 条边分别为 $r_{15} = 0.7$, $r_{45} = 0.7$, $r_{58} = 0.8$. 下一步的最小非零元素为 0.9, 有 r_{14} , r_{23} , r_{56} , r_{48} 边. 其中只有连接 2, 3 点不会形成回路, 其它边均形成回路. 故第 6 条边为 $r_{23} = 0.9$. 继续得第 7 条边 $r_{38} = 1.0$, 此时找到 7 个没有构成圈且数值尽可能小的非零元素, 图中出现了 7 条边, 形成了最小支撑树, 其中第 3, 4, 5, 6, 7 条边分别为边 $[1, 5]$ 、边 $[5, 4]$ 、边 $[5, 8]$ 、边 $[2, 3]$ 、边 $[3, 8]$, 如图 3 所示. 满足题意的油管路长为 10.2 海里.

3.3 表上作业法求解

(1) 从上三角矩阵 R 中找到最小非零元素为 $r_{78} = 0.5$, 将其用“□”框起来, 并将对应的主对角线上的两个 0 所在的第 7 行、第 7 列和第 8 行、第 8 列用直线涂去, 如图 4 所示.

(2) 从被直线涂去的元素中找出一个满足以下 3 个条件的非零元素: ① 没有被“□”框起来; ② 数值最小; ③ 不位于直线交叉处. 这个元素为 $r_{67} = 0.6$, 将其用“□”框起来, 并将对应的主对角线

上的两个 0 所在的第 6 行、第 6 列用直线涂去.

(3) 重复第 2 步, 直到有 7 个被“□”框起来的元素, 如图 5 所示. 这 7 个数依次为 r_{78} , r_{67} , r_{58} , r_{45} , r_{15} , r_{38} , r_{23} , 它们构成最小支撑树的 7 条边, 可见满足题意的油管路铺设方案就是这 7 个元素对应点的连接, 输油管长度为 10.2 海里.

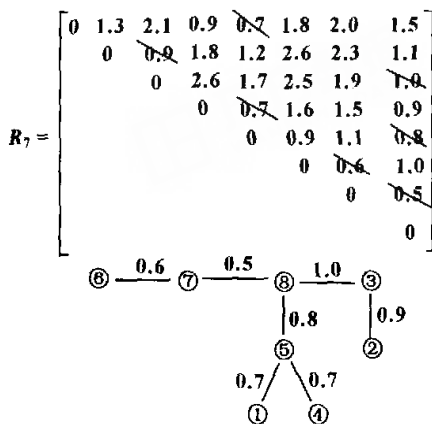


图 3 直接生成法求最小支撑树的结果

Fig. 3 The result of getting the minimum spanning tree using the method of directly getting

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1.3 & 2.1 & 0.9 & 0.7 & 1.8 & 2.0 & 1.5 \\ & 0 & 0.9 & 1.8 & 1.2 & 2.6 & 2.3 & 1.1 \\ & & 0 & 2.6 & 1.7 & 2.5 & 1.9 & 1.0 \\ & & & 0 & 0.7 & 1.6 & 1.5 & 0.9 \\ & & & & 0 & 0.9 & 1.1 & 0.8 \\ & & & & & 0 & 0.6 & 1.0 \\ & & & & & & 0 & 0.5 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

图 4 表上作业法求最小支撑树的过程

Fig. 4 The process of getting the minimum spanning tree using the method of performance on the table

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1.3 & 2.1 & 0.9 & 0.7 & 1.8 & 2.0 & 1.5 \\ & 0 & 0.9 & 1.8 & 1.2 & 2.6 & 2.3 & 1.1 \\ & & 0 & 2.6 & 1.7 & 2.5 & 1.9 & 1.0 \\ & & & 0 & 0.7 & 1.6 & 1.5 & 0.9 \\ & & & & 0 & 0.9 & 1.1 & 0.8 \\ & & & & & 0 & 0.6 & 1.0 \\ & & & & & & 0 & 0.5 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

图 5 表上作业法求最小支撑树的结果

Fig. 5 The result of getting the minimum spanning tree using the method of performance on the table

4 结束语

从算例中可看出,直接生成法可以直接从三角关系矩阵中寻找并画出最小支撑树图,不必画出整个网络图,直观简便;表上作业法适用于更复杂的情况,由关系矩阵直接求出构成最小支撑树的边,不需要画出网络图.而且,该方法易于用

计算机程序实现,结合计算机编程技巧可以大大降低工作量.

参考文献:

- [1] 胡运权.运筹学基础及应用[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1998.
- [2] 耿素云.集合论与图论(离散数学二分册)[M].北京:北京大学出版社,1998.

Preliminary Study on the Method of Getting Minimum Spanning Tree

ZHOU Li¹, HUANG Zhe-hao², WANG Bo¹, HE Bei-fang¹

(1. College of Environmental & Hydraulic, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2. Wenzhou Command Office of Qiantan Reclamation Project Construction, Wenzhou 325000, China)

Abstract: In this paper, aiming at the complicated web graph denoted by relation matrix, based on the analysis of the features of the elements constituting the minimum spanning tree, two methods of getting the minimum spanning tree, method of directly getting and performing on the table, have been put forward. By means of the two methods, the minimum spanning tree can be got directly without drawing the original web graph, which can effectively decrease the inconvenience of the traditional methods. Both the methods proved to be particularly useful in getting the minimum spanning tree.

Key words: minimum spanning tree; relation matrix; web graph

我国被《SCI》收录论文的语种分析

1999年中国作者在《SCI》核心期刊上共发表论文13357篇,比1998年的11456增加1901篇.语种分布由1998年的6种减少到5种,没有俄语论文.1998年,我国被《SCI》收录的中文论文为159篇,其中,154篇发表在《化学学报》(ACTA CHIMICA SIAICA)上,5篇发表在《中国药理学报》(ACTA PHARMACOLOGICA SINICA)上;而1999年中文论文上升到640篇,发表这些论文的期刊为:《化学学报》(207篇)、《中国药理学报》(3篇)、《高等学校化学学报》(中文版)(430篇).中文论文比例从1998年的1.39%增加到1999年的4.8%;相应地,英语论文比例从1998年的98.32%降低到1999年的95.16%.详细数据见表1.

表1 1999年《SCI》收录中国论文的语种分布

文种	英文	中文	法文	德文	日文	总计
论文数	12711	640	4	1	1	13357
比例	95.16%	4.80%	0.03%	0.01%	0.01%	100.00%

尽管我国被《SCI》收录的英文论文比例有所下降,但与1998年的11263篇英文论文数相比,1999年的英文论文数的绝对值仍然增加了1447篇.在被《SCI》收录的1442种发表我国论文的期刊中,英文期刊占了绝大多数,为1436种,占收录我国论文的期刊总数的99.58%.由此可见,良好的英文水平是科技工作者进行国际交流的重要工具.

(摘自1999年度《中国科技论文统计与分析》)