

文章编号:1671-6833(2003)04-0105-04

结构弹性支承刚度识别的广义逆特征值法

金挺,林志兴,李永宁

(同济大学土木工程防灾国家重点实验室,上海 200092)

摘要:以带弹性支承的结构为对象,将结构刚度矩阵视为弹性支承刚度的线性函数,以广义逆特征值理论为基础,引入广义特征值导数,给出一种识别结构弹性支承刚度的方法.算例中,利用模态试验结果,根据前3阶实测固有频率,用Newton-Raphson法求解以支承刚度为参数的非线性方程组,求出弹性支承刚度,并分析模态试验结果误差对支承刚度识别的影响.误差分析表明,如果模态试验结果具有足够的精度,用本文方法能够准确地实现结构边界支承刚度识别.

关键词:参数识别;广义逆特征值;弹性支承刚度

中图分类号:O 321 文献标识码: A

0 引言

工程实际中会遇到已知结构动力特性要求确定结构参数的问题,这样的逆问题包括结构动力学设计和结构参数识别<sup>[1]</sup>.本文将结构参数识别归为广义逆特征值问题,视结构刚度矩阵为弹性支承刚度的线性函数,以结构具有通过模态试验测得的几个低阶固有频率为准则,建立非线性方程组,用Newton-Raphson法求解.

1 支承刚度识别问题的数学描述

结构的刚度矩阵是由结构本身与边界支承决定的<sup>[2]</sup>.如图1结构,设自由度为 $n$ ,边界弹性支承为 $j$ 个, $\{k\}_{j \times 1}$ 是由 $j$ 个待识别的结构边界弹性支承刚度组成的列向量.

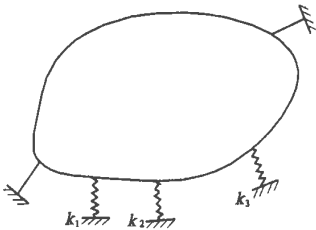


图1 弹性支承结构

Fig. 1 Structure with elastic supports

矩阵 $[K]_{n \times n}$ 是结构的刚度矩阵,则 $[K]_{n \times n}$ 可表示为

[K]\_{n \times n} = \sum\_{i=1}^j k\_i [K\_i]\_{n \times n} + [K\_0]\_{n \times n} \tag{1}

式中: $k_i$ 为第 $i$ 个边界弹性支承刚度 $[K_i]_{n \times n}$ 是一个除了对角线上某个元素为1其余均为0的矩阵,它表征了弹性支承在结构的刚度矩阵中所占的位置; $[K_0]_{n \times n}$ 表示没有弹性支承时结构的刚度矩阵.

设矩阵 $[M]_{n \times n}$ 是结构的质量矩阵,与结构的边界弹性支承无关.

设 $\{\lambda\}_{s \times 1}$ 是 $[K]_{n \times n}$ 相对于 $[M]_{n \times n}$ 按升序排列的广义特征值列向量,显然第 $p$ 阶特征值 $\lambda_p$ 是 $\{k\}_{j \times 1}$ 的函数

\lambda\_p = \lambda\_p(\{k\}\_{j \times 1}) \tag{2}

若 $\{f\}_{s \times 1}$ 是模态试验测得的按升序排列的 $s$ 阶固有频率向量,则可以建立下面的非线性方程组:

\chi(\{k\}\_{j \times 1})\_{s \times 1} - (2\pi f)^2\_{s \times 1} = 0 \tag{3}

2 广义特征值导数

用Newton-Raphson法求解非线性方程组(3)时,需要计算广义特征值的导数,即结构固有频率关于弹性支承刚度的灵敏度.可将广义特征值导数写成如下矩阵形式

[\lambda'\_p]\_{s \times j} = \left[ \frac{\partial \lambda\_p(k\_1, k\_2, \dots, k\_j)}{\partial k\_i} \right]\_{s \times j} \tag{4}

式中: $\lambda'_p$ 表示当结构第 $i$ 个边界弹性支承刚度发生单位变化时,结构第 $p$ 阶固有频率的改变量.

$\{\lambda_p, \{\varphi_p\}_{n \times 1}\}$ 是结构的第 $p$ 阶特征值和特征向量,且 $\{\varphi_p\}_{n \times 1}$ 对质量矩阵正交,有

$$([K]_{n \times n} - \lambda_p [M]_{n \times n}) \{\varphi_p\}_{n \times 1} = 0 \quad (5)$$

$$\{\varphi_p\}_{1 \times n}^T [M]_{n \times n} \{\varphi_p\}_{n \times 1} = 1 \quad (6)$$

根据文献[3],有

$$\lambda'_p = \{\varphi_p\}_{1 \times n}^T (K'_{JJ} - \lambda_p M'_{JJ}) \{\varphi_p\}_{n \times 1} \quad (7)$$

对于结构弹性支承刚度识别问题,  $[M] = 0$ , 由式(1)知  $[K] = [K_0]$ , 所以上式简化为

$$\lambda'_p = \{\varphi_p\}_{1 \times n}^T [K_0]_{n \times n} \{\varphi_p\}_{n \times 1} \quad (8)$$

### 3 Newton-Raphson 法求解非线性方程组

Newton-Raphson 法解得第  $m$  步弹性支承刚度解为  $\{k^m\}_{j \times 1}$ , 则特征值列向量存在偏差  $\{\Delta \lambda^m\}_{s \times 1}$ :

$$\{\Delta \lambda^m\}_{s \times 1} = \{\chi\}_{s \times 1} \{k^m\}_{j \times 1} - \{(2\pi f)^2\}_{s \times 1} \quad (9)$$

令

$$\{g^m\}_{s \times 1} = \{\Delta \lambda^m\}_{s \times 1} / \{(2\pi f)^2\}_{s \times 1},$$

式中:“ $\cdot / \cdot$ ”表示两个向量对应元素相除;  $\{g^m\}_{s \times 1}$  表示第  $m$  步特征值偏差与目标特征值的比值.

第  $m$  步等效误差的大小  $Error^m = \{g^m\}_{1 \times s} \times \{g^m\}_{s \times 1}$ , 则对  $Error$  求微分有

$$dError^m = 2 \{g^m\}_{1 \times s} \times \{[\lambda'_p]_{s \times j} \cdot / \{(2\pi f)^2\}_{s \times 1}\} dk^m_{j \times 1} = \{A^m\}_{1 \times j} \times dk^m_{j \times 1} \quad (10)$$

第  $m$  步弹性支承刚度的修正值  $\{\Delta k^m\}_{j \times 1}$ :

$$\{\Delta k^m\}_{j \times 1} = \frac{Error \times \{A^m\}_{1 \times j}^T}{\{A^m\}_{1 \times j} \{A^m\}_{j \times 1}^T} \quad (11)$$

$$\{k^{m+1}\}_{j \times 1} = \{k^m\}_{j \times 1} - \alpha \{\Delta k^m\}_{j \times 1} \quad (12)$$

为了使整个迭代过程不致发散, 上式中用  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) 来控制每一步增量.

### 4 算法流程

(1) 用有限元方法计算  $[K_0]_{n \times n}$ ,  $[M]_{n \times n}$ ;

(2) 选择初值,  $\{k^0\}_{j \times 1} \cdot step = 0$ ;

(3) 按式(1)计算  $[K]_{n \times n}$ , 计算广义特征值列向量  $\{\lambda\}_{n \times 1}$ , 并按升序排列, 同时将对质量正交化的振型向量矩阵  $\{\eta\}_{n \times n}$  与  $\{\lambda\}_{n \times 1}$  对应排列;

(4) 检查收敛条件, 如果  $Error$  足够小, 停止计算;

(5) 按式(8)计算特征值导数  $\lambda'_p$ , 按式(11)计算增量  $\{\Delta k\}_{j \times 1}$ ;

(6) 按式(12)计算  $\{k\}_{j \times 1}$ ;

(7)  $step = step + 1$ , 重复步骤(2)~(7).

### 5 算例

文献[4]用模态试验获得带弹性支承梁的前

三阶固有频率, 并用 REDUCE 语言识别了弹性支承刚度. 本文将其中带有三个弹性支承的简支梁作为算例. 如图 2, 一根  $400 \text{ mm} \times 25 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$  的等截面简支梁, 梁的弹性模量  $E = 2.058 \times 10^{11} \text{ Pa}$ , 密度  $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 线弹簧的刚度已知,  $k_1 = 23\,226 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 33\,810 \text{ N/m}$ ,  $k_3 = 25\,578 \text{ N/m}$ .

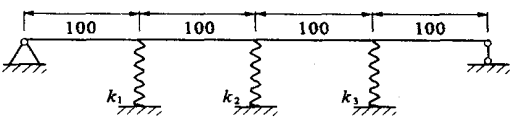


图 2 带弹性支承简支梁 单位:mm

Fig.2 Simple beam with elastic supports

按照本文算法用 Matlab 编写了程序, 分别根据文献[4]中模态试验测得的频率、ANSYS 计算出的频率及假设模态试验测得的频率存在更大误差的情况进行了支承刚度识别.

在确定式(1)中  $[K]_{n \times n} \downarrow [K_2]_{n \times n} \downarrow [K_3]_{n \times n}$  时, 用了以下方法. 用 ANSYS 有限元分析软件建立有限元模型, 选择整个模型生成一个超单元 (Superelement), 让 ANSYS 输出这个超单元的质量矩阵和刚度矩阵, 即为有限元模型的质量矩阵和刚度矩阵. 根据式(1),  $k_1 = 0 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 0 \text{ N/m}$ ,  $k_3 = 0 \text{ N/m}$ , 即没有弹性支承时, 有限元模型的质量矩阵是  $[K_0]_{n \times n}$ ;  $k_1 = 10\,000 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 0 \text{ N/m}$ ,  $k_3 = 0 \text{ N/m}$  时, 有限元模型的质量矩阵为  $[K_{1+0}]_{n \times n}$ , 则  $[K_1]_{n \times n} = ([K_{1+0}]_{n \times n} - [K_0]_{n \times n}) / 10\,000$ , 同样可以得到  $[K_2]_{n \times n}$ ,  $[K_3]_{n \times n}$ .

#### 5.1 由文献[4]中模态试验结果识别的支承刚度

文献[4]中模态试验测得的前三阶固有频率如表 1 所示.

表 1 模态试验测得的结构前三阶固有频率<sup>[4]</sup>

Tab.1 The lowest three frequencies in model test <sup>[4]</sup> Hz			
频率	$f_1$	$f_2$	$f_3$
模态试验	118.00	356.75	778.65

由文献[4]中模态试验结果识别出的支承刚度具有足够的精度, 如表 2 所示.

表 2 由模态试验结果<sup>[4]</sup>识别的支承刚度

Tab.2 Identified stiffness of supports using the modal test results <sup>[4]</sup>			
支承刚度	精确值/( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ )	识别值/( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ )	误差/%
$k_1$	23 226	22 870	-1.53
$k_2$	33 810	33 400	-1.21
$k_3$	25 578	25 905	1.28

### 5.2 模态试验结果误差对支承刚度识别结果的影响

模态试验得到的结果或多或少存在着一定的误差,为了研究模态试验结果误差对支承刚度识

别结果的影响,本文分别采用 ANSYS 计算出的频率及假设模态试验测得的频率存在更大误差的情况(Case 1,Case 2,Case 3),如表 3 所示,进行了支承刚度识别.

表 3 结构前三阶固有频率  
Tab .3 The lowest three frequencies of the stucture

频率	ANSYS 计算 /Hz	模态试验 <sup>[4]</sup> /Hz	误差 /%	Case 1 /Hz	Case 1 误差/%	Case 2 /Hz	Case 2 误差/%	Case 3 /Hz	Case 3 误差/%
$f_1$	117.99	118.00	0.01	119.17	1	120.35	2	123.89	5
$f_2$	356.72	356.75	0.01	360.29	1	363.85	2	374.56	5
$f_3$	789.46	778.65	-1.37	797.35	1	805.25	2	828.93	5

从表 4 可以看出,识别出的支承刚度误差随着频率误差的增加而增大,但均不超过 10%.因此如果模态试验测出的频率具有足够的精度,用本文的方法来识别结构边界支承刚度是可行的.

表 4 支承刚度的识别结果

Tab .4 Result of identification of the supports 'stiffness				
频率取值	支承刚度	精确值/ (N·m <sup>-1</sup> )	识别值/ (N·m <sup>-1</sup> )	误差/%
ANSYS 计算	$k_1$	23 226	22 870	-1.53
	$k_2$	33 810	33 821	0.03
	$k_3$	25 578	25 903	1.27
模态试验 <sup>[4]</sup>	$k_1$	23 226	22 870	-1.53
	$k_2$	33 810	33 400	-1.21
	$k_3$	25 578	25 905	1.28
Case 1	$k_1$	23 226	22 196	-4.43
	$k_2$	33 810	33 879	0.20
	$k_3$	25 578	26 167	2.30
Case 2	$k_1$	23 226	22 959	-1.15
	$k_2$	33 810	34 991	3.49
	$k_3$	25 578	26 923	5.26
Case 3	$k_1$	23 226	23 362	0.59
	$k_2$	33 810	35 555	5.16
	$k_3$	25 578	27 324	6.83

识别结果的误差主要有两部分组成,一部分来自计算误差,另一部分来自模态试验测得频率的误差.“ANSYS 计算”、“模态试验文献<sup>[4]</sup>”这两种情况,计算误差是主要的.“Case 1”、“Case 2”、“Case 3”这三种情况,假设模态试验测得的频率存在的误差造成了支承刚度识别结果更大的误差,这是因为支承刚度识别问题是非线性问题,由式(1)知,结构刚度矩阵由两部分组成,其中 $[K_0]_{n \times n}$

是不变的,因而频率微小的变化将完全反映在支承刚度 $k_i$ 上,从而导致识别支承刚度较大的误差.

### 6 结束语

本文从广义逆特征值角度研究了结构弹性支承刚度参数识别问题,将结构弹性支承刚度参数识别问题转化为含参数的广义特征值逆问题.本文方法可以用于桥梁结构的橡胶支座和墩柱的刚度识别,或其他结构边界弹性支承刚度的识别.

广义特征值逆问题是一个复杂的问题,用 Newton-Raphson 法求解时,其收敛性和收敛快慢不仅与支承刚度初值的选取有关,而且与实测频率的误差大小有关,最后识别结果的误差也将取决于实测频率的误差.

用模态试验来识别结构的参数是一种非常简便的方法,试验和试验处理均十分方便.与模态试验相结合的参数识别方法研究是当前土木工程领域的一大研究热点,也是今后发展方向.

### 参考文献:

[ 1 ] JOSEPH K T Inverse eigenvalue problem in structural design[J] .AIAA J , 1992,( 12 ) :2890~2896.  
[ 2 ] 李享荣,吴益敏,张 雷.试验模态分析及有限元相结合的方法识别结构的支承刚度[J] .上海大学学报,1996,2( 3 ) :274~281.  
[ 3 ] QIALVOI U Efficient computation of mode shape derivatives for large dynamic systems[J] .AIAA J , 1987( 10 ) :1384~1390.  
[ 4 ] 张 雷,李享荣.利用 REDUCE 语言识别结构系统的支承刚度[J] .上海力学,1995,16( 3 ) :244~249.

An Inverse Generalized Eigenvalue Method to Identify  
the Stiffness of Elastic supports of a Structure

JIN Ting , LIN Zhi -xing , LI Yong -ning

(SLDRCE of Tongji University ,Shanghai 200092,China)

**Abstract** : In this paper the author presents a method to identify the stiffness of elastic supports of a structure basing on inverse generalized eigenvalue theory .The structure stiffness matrix is regarded as a linear function of the stiffness of elastic supports ,and the generalized eigenvalue derivative is also introduced .In the end of this paper the example shows that using the modal test results the nonlinear equation sets ,which contain parameters of the stiffness of supports ,can be solved by Newton -Raphson 's method ,and the stiffness of elastic supports can be identified .The effect of the error in the modal test results on the identification of stiffness of elastic supports is also analyzed .The error analysis proves that this method can realize the exact identification of the structure boundary support stiffness if the modal test results are of enough accuracy .

**Key words** : parametric identification ;inverse generalized eigenvalue ;stiffness of elastic supports

我校六位青年教师获得 2004 年度河南省杰出青年科学基金资助

近日,2004 年度河南省杰出青年科学基金评审揭晓,我校有 6 人获得省杰出青年科学基金的资助,每人获得 16 万元的资助,资助期限为 3 年.

河南省杰出青年科学基金是由省内知名专家倡议,省政府于 1995 年批准设立,目的是促进我省青年科技人才的成长,加速培养造就一批较高学术水平的跨世纪学科带头人.该项基金由省科技厅、省委组织部、省财政厅、省教育厅、省人事厅等单位共同组织评审.设立 9 年来,我校有多名研究工作突出的青年骨干教师获得资助,有力地促进了我校基础研究水平的快速发展.

获得基金资助的六位教师分别是物理工程学院李德民博士,研究方向为基本粒子物理学;化学系张书胜教授,研究方向为电化学;材料工程学院吕新广博士,研究方向为印刷工程;水环学院李清富教授,研究方向为土木建筑结构;第一附属医院程敬亮主任医师,研究方向为医学影像学;基础医学院王淑玲博士,研究方向为病理生理学.