

文章编号:1671-6833(2005)03-0089-05

图像小波系数的自相似性在图像去噪中的应用

范文兵, 陈 静, 甄姬娜

(郑州大学信息工程学院, 河南 郑州 450052)

摘 要: 讨论了图像小波系数的四叉树结构及统计规律, 指出在四叉树各层节点的小波系数具有自相似性, 利用这种自相似性建立混合高斯模型对小波系数进行描述; 此外, 四叉树层与层间的节点之间具有相关性, 利用小波域系数间的自相似性信息和相关性建立隐式马尔科夫树模型(HMT), 用于去除图像信号中的高斯白噪声, 并利用 Lenna 图像进行试验仿真; 与传统的低通滤波方法相比, 该方法在滤除噪声的同时更好地保存了图像的细节和边缘信息. 结论表明, 隐式马尔科夫树(HMT)模型较精确的体现了图像的特征, 具有较好的去噪效果.

关键词: 小波变换; Mallat 算法; 隐马尔科夫树模型; 图像去噪

中图分类号: TN 911.73 文献标识码: A

0 引言

小波理论和多尺度分析是一种恒 Q 分析, 通过自动调整时频分析窗口的大小对信号进行聚焦, 被誉为数字显微镜. 小波变换提供了同时分析信号的奇异性和变化趋势的方法, 具有良好的局部化特性和处理非平稳信号的能力^[1,2].

图像的小波分解提供了解释图像信息的一种简单的分层理论框架, 图像的细节以不同的分辨率描述了景物的不同物理结构. 图像信号经过小波变换后可以用小波系数来描述, 小波系数体现原图像信息性质, 图像信息的局部特征可以通过处理小波系数而改变.

笔者通过对自然图像的小波分解系数的统计分析, 指出小波系数的四叉树结构中存在一种自相似性, 并利用这种自相似性建立隐式马尔科夫树模型(HMT)对噪声图像进行滤波, 获得了优于传统滤波方法的效果.

1 图像的 Mallat 分解

1987 年, Mallat 将计算机视觉领域的多尺度(多分辨率)分析方法引入到小波分析中, 不仅统一了前人关于小波函数的构造、信号的小波变换分解与重建, 还给出了相应的算法, 即著名的 Mallat 分解、重建算法^[3], 这个算法在小波分析中具有相当于傅里叶分析中的 FFT 同等的地位.

Mallat 塔式分解算法

C_m^{j+1} = \sum_{k \in z} \bar{h}_{k-2m} C_k^j \tag{1}

C_m^{j+1} = \sum_{k \in z} \bar{g}_{k-2m} C_k^j \tag{2}

Mallat 塔式分解重构算法

C_j^k = \sum_{m \in z} C_m^{j+1} \bar{h}_{k-2m} + \sum_{m \in z} D_m^{j+1} \bar{g}_{k-2m} \tag{3}

其中, \bar{h}_{k-2m} 和 \bar{g}_{k-2m} 分别是 h_{k-2m} 和 g_{k-2m} 在 l^2 空间中的对偶算子. Mallat 算法写成滤波器形式, 如图 1 所示.

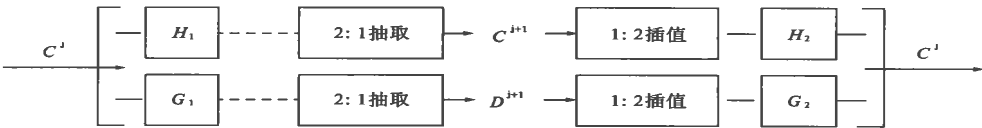


图 1 Mallat 算法的滤波器解释
Fig. 1 The filter description of Mallat

对于图像的 Mallat 分解而言,如果使用可分离滤波器,可用一维方式来处理:先对所有的行作一次小波分解,对所得结果再按列作一次小波分解,得到 4 个子带,如图 2 所示,其中 L 表示低频带,H 表示高频带.可对 LL1 层进一步分解,如果作 M 层分解,可得到 $3M+1$ 个子带.图 3 为图像的三层小波分解,得到了 10 个子带.

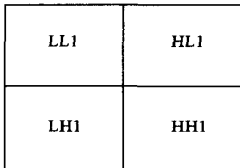


图 2 二维小波分解

Fig. 2 Two dimension wavelet decomposition

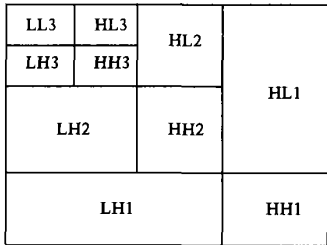


图 3 二维三层小波分解

Fig. 3 Two dimension wavelet decomposition of three floors

2 小波系数的四叉树结构

二维图像的 Mallat 塔式分解得到的小波系数具有明显的四叉树树状结构.对图像数据作一次二维分解,可得到 LL1、HL1、LH1 及 HH1 4 个子带.其中第一个子带表示了图像的初略轮廓,提供了图像的主要信息;后 3 个子带分别在水平、垂直及对角线方向对图像细节进行补充,4 个子带合在一起,提供了图像的完整信息.可以认为,LL1 子带中的每一点跟 HL1、LH1 及 HH1 中相应位置的点一起,提供了原始图像相应区域的完整信息,其中 HL1 起主要的作用.它们具有树状层次结构,每一个树根有 3 个分支,成为三叉树.树根提供了低频轮廓图像信息,3 个分支则提供了行、列及对角线方向的图像细节.

如果对 LL1 继续分解,可得到 LL2、HL2、LH2 及 HH2 4 个子带,它们一样也具有三叉树层次结

构.此时,HL2 及 HL1 构成信号在水平方向的逐次逼近细节,HL2 是粗尺度细节,HL1 是细尺度细节,HL1 的数据量(点数)是 HL2 的四倍.HL2 中的每一点跟 HL1 中相应位置的四点一起提供了原始图像相应区域在水平方向的细节信息,它们也具有树状层次结构,每一个树根有四个分支,称为四叉树.树根提供了粗尺度细节信息,分支则提供了细尺度下的细节.对 LL2 继续分解,得到一不断增长的四叉树,如图 4 所示.

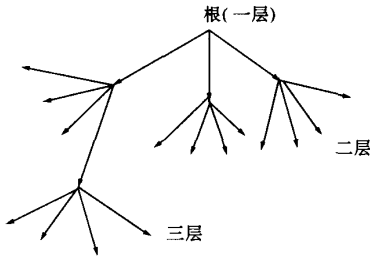


图 4 图像塔式分解的四叉树结构示意图

Fig. 4 The quad tree topology of image pagoda decomposition

在小波系数的树状结构中,每棵树的全部小波系数提供了原始图像一个区域的全部图像信息.树根(的系数)表征了该区域的平均能量(灰度值),第一层分支提供了粗尺度下的细节,第二层分支提供了较细尺度下的细节,第三层分支提供了更细尺度下的细节,以次类推.一棵树各节点之间在统计上是否相关,如何充分利用这种相关性,在噪声图像滤波中去除噪声的同时有保存图像的细节和边缘是基本而重要的,这是提高图像信噪比和去噪效果的一种方法.

3 小波系数的统计模型

在对小波系数进行处理时,必须充分考虑并利用其统计特性,只有这样,才能得到高效而合理的结果.图 5(a) 为 256×256 标准 *8bit* 灰度图 Lenna 在空间域和小波域的统计特性图.从图 5(b) 中可以看出经过小波变换后的图像小波系数近似高斯分布.假设,在某一次分解后的该特定尺度内,各小波系数服从统一分布规律.目前经常使用的小波系数模型是广义高斯分布模型,这是对自然图像在同一层内的小波系数分布进行统计得到的规律,Laplace 分布和高斯分布是它的两个特例.

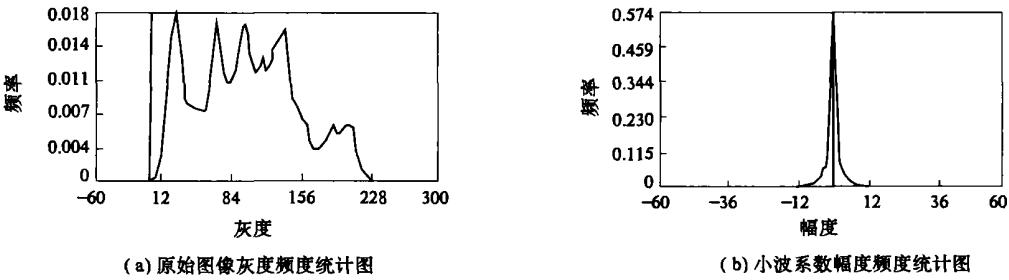


图 5 Lenna 统计特性图

Fig. 5 The statistical character of Lenna

4 小波域隐马尔科夫树模型(HMT)

由Lenna 图像的统计特性图可以看出, 图像小波系数近似高斯分布, 但是仅用单一的高斯模型来描绘小波系数的分布规律是不够的, 这是因为自然图像的边缘信号分布于远离均值的位置上, 而单一的高斯模型忽视了这部分数量很少但很重要的信号. 因此, 在HMT 中我们可以用m 个状态的混合高斯模型能够很精确地描绘小波系数的分布, 其中m 越大非高斯性描述就越精确, 但是随着状态数m 的增大, 计算复杂度也显著增加, 对模型的训练就越困难. 根据图像信号经小波分解后的特点, 采用两状态零均值的混合概率密度模型描述小波系数能够取得很好的效果, 而且计算量较小.

假设每个小波系数 c_i 都有一个无法观察到的状态 $S_i = \{S, L\}$, S_i 表示两个高斯混合源中是那个高斯源产生 c_i . 其中 S 表示方差为 σ_s^2 的高斯源, 而 L 表示方差为 σ_L^2 的高斯源. 小波系数的概率度函数可表示为

$$f(c_i) = P_i^S g(c_i; 0, \sigma_s^2) + P_i^L g(c_i; 0, \sigma_L^2) \quad (4)$$

式中: $g(x; \mu, \sigma^2)$ 是均值为 μ 、方差为 σ 的高斯分布; P_i^S 和 P_i^L 分别表示 c_i 属于 S 和 L 的概率, 并且满足 $P_i^S + P_i^L = 1$.

在四叉树结构中, 小波系数是大或小的可能性同父节点有较大的关系, HMT 通过系数中隐状态之间的相关性而获取了系数之间的相关性. 假设父节点 i 到子节点的状态跳转可以用状态变换矩阵 A_i 表示为

$$A_i = \begin{bmatrix} P_i^{S \rightarrow S} & P_i^{S \rightarrow L} \\ P_i^{L \rightarrow S} & P_i^{L \rightarrow L} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中: $P_i^{S \rightarrow S} + P_i^{S \rightarrow L} = 1, P_i^{L \rightarrow S} + P_i^{L \rightarrow L} = 1$. 可以看到HMT 模型中在每个节点 i 上有这些参数: 混合

高斯概率密度函数中的两个方差 $\sigma_{S,i}^2$ 和 $\sigma_{L,i}^2$, 状态传输矩阵 A_i , 在每一棵四叉树的根节点上还有参数 P_i^L 来指明节点是大状态的概率. 将所有参数合起来用 Θ 表示:

$$\Theta = \{ \sigma_s^2, \sigma_L^2, A_i, P_i^L \} \quad (6)$$

图像的所有小波系数用 W 表示, 图像小波系数的联合概率密度函数用 $f(W | \Theta)$ 表示.

4.1 用EM 算法估计HMT 模型参数

任何基于HMT 的应用, 首先都要通过训练HMT 来得到模型参数. 若小波系数的状态变量 S_i 已知, 则通过极大似然(ML) 估计可容易地获得模型参数 $\theta = \arg \max_{\theta} f(W | \theta)$; 但实际情况是 S_i 未知, 因此通常需采用EM 算法^[4,9] 估计参数. EM 算法分为E 步和M 步两个过程(沿LH、HL、HH 3 个方向各自处理).

E 步计算隐状态变量的联合概率 $P(S | W, \theta)$; M 步更新模型参数 $\theta^{+1} = \arg \max_{\theta} E_S [\ln f(W, S | \theta) | W, \theta]$.

4.2 图像去噪

图像加入零均值、方差为 σ_n^2 的高斯白噪声后, 其正交小波变换仍是零均值、方差为 σ_n^2 的高斯噪声, 在理论情况下白噪声的小波系数的均值和方差与尺度无关. 设 w_i, y_i, n_i 分别为含噪信号、信号和噪声的小波系数, 则 $w_i = y_i + n_i$. 当给定隐状态 S_i 后, y_i 服从高斯分布, n_i 也服从高斯分布. 由于两个独立高斯随机变量之和仍服从高斯分布, 其方差为各变量方差之和, 而其它参数不变. 若 $\gamma_{i,m}^2, \sigma_{i,m}^2, \sigma_n^2$ 分别为 w_i, y_i, n_i 的方差, 则有 $\gamma_{i,m}^2 = \sigma_{i,m}^2 + \sigma_n^2$, 即所估计的信号小波系数的方差 $\sigma_{i,m}^2 = (\gamma_{i,m}^2 - \sigma_n^2) = (x)^+$, 若 $x \geq 0$, 则 $(x)^+ = x$, 否则 $(x)^+ = 0$. 可将最大尺度下子图的方差作为 σ_n^2 的估计值, 这是因为该子图的噪声能量最集中. 给定 w_i 和隐状态 S_i , 并利用由EM

算法求得的隐状态概率 $p(S_i | W, \theta)$, 可得 y_i 的条件均值估计

$$y_i^U = \sum_{m \in \{S, L\}} p(S_i = m | W, \theta) \frac{\sigma_{i,m}^2}{\sigma_{i,m}^2 + \sigma_n^2} w_i \quad (7)$$

其中噪声方差的估计采用 $\sigma_n = MAD/0.6745$, MAD 是最高频率子带 HH 子带小波系数幅度的中值^[3]. 后验概率 $p(s_i = q | \gamma, \Theta)$ 可以用 upward-downward(前向-后向)快速算法计算^[4]. 利用估计

的小波系数进行逆小波变换(IDWT), 即可得到去噪后的图像.

5 实验仿真及结论

采用上述方法对 Lenna 灰度图像进行实验, 灰度范围为(0~1), 加入均值 $\mu_n=0$ 和方差 $\sigma_n^2=0.01$ 的高斯白噪声, 并将本文方法与小波域低通滤波进行比较, 结果如图 6 所示.

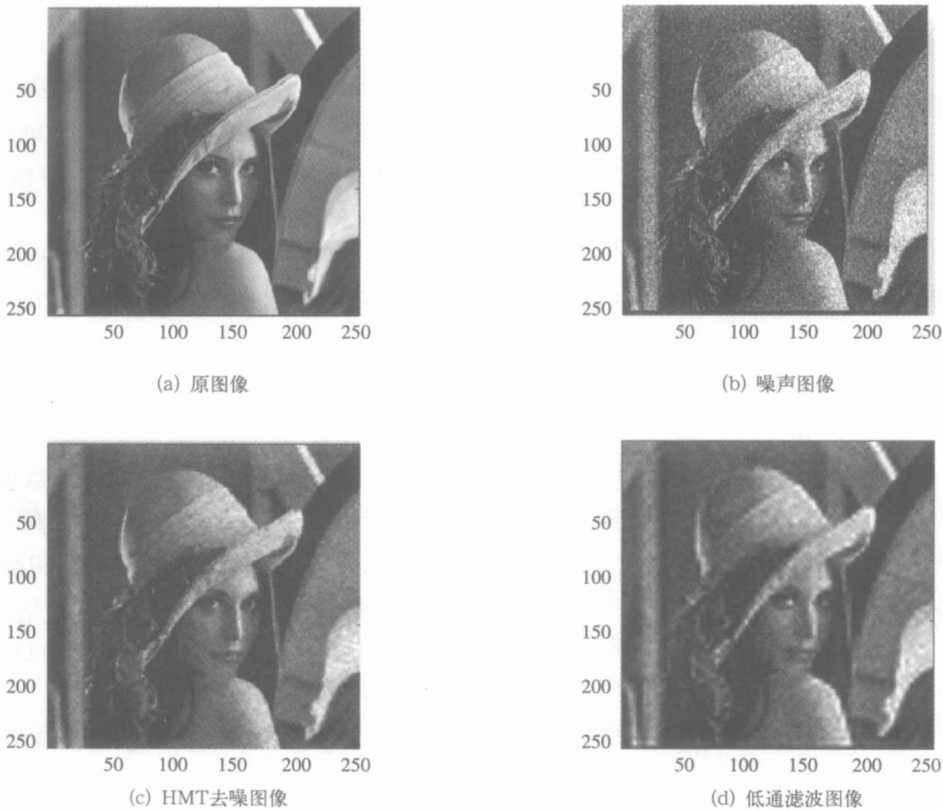


图 6 Lenna 图像试验结果
Fig. 6 The test results of Lenna

从图 6 中的(c) 和(d) 我们可以看出, 低通滤波图像虽然滤除了噪声, 但是对于图像过于平滑从而模糊了图像的细节和边缘, 而运用 HMT 方法去噪的效果优于低通滤波效果它既去除了图像的噪声有保存了图像的细节和边缘信息. 这是由于小波域 HMT 方法充分利用了小波系数间的相关性和自相似信息, 对小波系数间的关系描述精确. 但是由于采用正交小波变换, 使得在图 6(c) 的边缘出现附加物, 产生了 Gibbs 现象; 可以采用冗余小波变换来消除此现象.

6 结论

笔者研究了小波系数之间的相关性信息和图

像四叉树中的自相似性信息, 并根据这种自相似性建立小波域的隐式马尔科夫树模型(HMT), 对混有高斯白噪声的图像进行去噪并与小波域的低通滤波进行比较, 从仿真图像中可以看出这种方法具有比低通滤波方法有着更好的去噪性能, 这方面的研究有助于图像去噪、图像增强技术的发展.

参考文献:

[1] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1995. 1~57.
[2] 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994. 1~81.

[3] 陈武凡 . 小波分析及其在图像处理中的应用 [M] . 北京 : 科学出版社 , 2002 . 33 ~ 35 .

[4] ROMBERG J K . A universal hidden markov tree image model [D] . Houston Texas : Rice University , 1999 . 35 ~ 37 .

[5] GUO L F . Wavelet domain statistical image modeling and processing [D] . Delaware : The University of Delaware 2001 . 46 ~ 47 .

[6] DEMPSTER A P , LAIRD D M , RUBIN D B . Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm [J] . Journal of the Royal Statistical Society , 1977 , 39 (1) : 1 ~ 3 .

The Application of Own Resemblance of Image Wavelet Coefficients in Image Denoising

FAN Wen - bing , CHEN Jing , ZHEN Ji - na

(Schod of Information Engineering , Zhengzhou University , Zhengzhou 450052 , China)

Abstract : The quad tree and probability of wavelet coefficients are discussed . The wavelet coefficients of every level nodes in quad tree have resemblance and the mixture Gaussian model which describe the wavelet coefficients is established by using such resemblance . Besides , the nodes of every level in quad tree have relativity , so the HMT built by the resemblance and relativity of wavelet coefficients is used to wipe off the noises in images , and is tested in Lenna . Compared with traditional low pass filter , the method saves the information of the details and edges of image better while wiping of the noises . The results show that HMT accurately describes the character of image and has better denoising function .

Key words : wavelet transform ; Mallat ; hidden markov tree ; image denoising

我校在河南省高校杰出科研人才创新工程项目立项中再创佳绩

近日,在编制 2006 年度河南省高校杰出科研人才创新工程计划的过程中,经过专家评审、无记名投票等严格程序,最终确定全省共立项 20 个项目,每项资助 55 万元,我校有 5 项获得资助。

河南省高校杰出科研人才创新工程项目是教育厅为了实施科教兴国和人才强国战略,于 2000 年设立的,重点支持面向经济建设亟待解决的关键技术问题的重大科研项目,以及知识创新和技术创新领域的重大基础和应用研究项目。

2006 年度我校有 5 项获得河南省高校杰出科研人才创新工程项目资助,充分展示了我校自然科学研究的整体实力和水平,对获资助项目进一步深入研究提供了有力的经费支持。同时也说明了学校关于科研及人事分配政策的调整,极大地激发了广大教师从事科学研究的积极性。