

文章编号:1671-6833(2014)01-0104-04

考虑界面影响的钢纤维混凝土细观力学等效性能研究

程站起, 夏乃凯

(郑州大学 土木工程学院, 河南 郑州 450001)

摘 要: 钢纤维与混凝土基体之间的界面对钢纤维混凝土(SFRC)发挥其增强、增韧作用具有重大影响, 故为了考证其微观结构特征, 探讨 SFRC 微观结构与其宏观性能之间的关系. 考虑了在无限各向同性平面内分布的圆形钢纤维, 采用超奇异积分方程和复变函数等方法建立纤维、界面和基体上的应力、应变和位移等的分析模型. 采用 Galerkin 积分方法和 Gauss-Seidel 迭代方法获得在平面应变条件下具有不同体积率和界面层厚度的钢纤维混凝土等效参数, 讨论了钢纤维体积率以及界面层厚度对材料等效参数的影响, 并通过与相同条件下宏观试验得出的结果相比较, 结果表明, 本模型能够较为准确地分析钢纤维混凝土的宏观弹性参数.

关键词: 钢纤维混凝土; 界面; 细观力学; 等效弹性模量

中图分类号: TU528.01 文献标志码: A doi:10.3969/j.issn.1671-6833.2014.01.024

0 引言

纤维增强复合材料广泛运用于工程实际, 在这类材料中界面存在于纤维和基体之间. 尽管界面层厚度很小, 但是界面对纤维增强复合材料的微观和宏观力学性能具有重要的影响<sup>[1-3]</sup>. 已有文献研究界面性能对材料性能的影响, 一般采用数值分析方法, 比如有限元法<sup>[4]</sup>和解析单元法<sup>[5]</sup>等方法, 然而这些方法都需要经过很复杂的计算过程, 并且不能真实反映界面性能. 笔者通过采用超奇异积分方程和复变函数, 针对纤维、基体和界面上的应力、应变和位移建立数学模型, 模拟界面的受力情况, 并采用 Gauss-Seidel 迭代法计算未知变量, 进而计算出钢纤维混凝土的等效弹性模量. 本计算过程操作方便, 计算结果与宏观试验条件下得出的结果基本吻合, 由此验证了该模型的精确性和适用性.

1 基本参数和方程

考虑在无限各向同性平面内, 包含  $N$  根钢纤维的平面承受在无穷远处的双轴应力场, 如图 1 所示. 其中基体的剪切模量为  $\mu$ , 泊松比为  $\nu$ ; 纤维

的剪切模量为  $\mu_1$ , 泊松比为  $\nu_1$ ; 这里假设界面为均匀界面, 且界面的剪切模量为  $\mu_2$ , 泊松比为  $\nu_2$ . 首先考虑单根纤维的二维平面, 如图 1 所示. 钢纤维和界面的中心点在同一点  $z$  点, 其中  $R_1, L_1$  分别为纤维的半径和纤维与界面的边界;  $R_2, L_2$  分别为界面外边界的半径和界面与基体的边界. 规定  $L_1, L_2$  以逆时针方向为正方向, 单位法向量  $n$  指向边界方向的右侧, 单位切向量  $s$  指向边界绕行方向. 在双轴应力作用下, 每根纤维 ( $J = 1, \dots, N$ ) 模型处于应力平衡状态, 即应力和弯矩在界面和边界上的合力为 0, 则其数学表达式为<sup>[6]</sup>

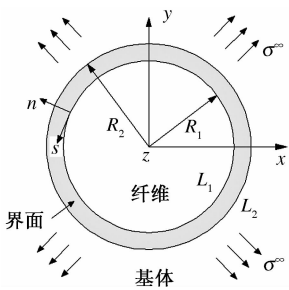


图 1 二维平面模型  
Fig. 1 Two dimensional model

收稿日期:2013-09-15; 修订日期:2013-11-15  
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10802078); 河南省优秀青年骨干教师资助项目(2010GGJS-023); 郑州大学研究生科学研究基金资助项目(111L00903)  
作者简介:程站起(1973-), 男, 河南西华人, 郑州大学副教授, 博士, 研究方向为新型材料的力学性能研究, E-mail: zqcheng@zzu.edu.cn.

$$\begin{cases} \int_{L_{kj}} \sigma_{kj}(\tau) d\tau = 0, \quad k = 1, 2; \\ Re \int_{L_{kj}} \tau \bar{\sigma}_{kj}(\tau) d\bar{\tau} = 0, \quad k = 1, 2. \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\sigma_{kj}(z) = \sigma_{kjn}(z) + \sigma_{kjs}(z)$ ,  $\sigma_{kjn}(z)$ ,  $\sigma_{kjs}(z)$  分别为沿边界  $L_{kj}$  上的法向应力和切向应力,  $z = x + iy$  是平面坐标系 ( $xOy$ ) 中任意一点  $z$  的复坐标. 在边界  $L_{kj}$  上, 由超奇异积分方程可得边界积分方程<sup>[6]</sup>:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^2 \left[ (2a_{1kj} - a_{2kj}) \int_{L_{kj}} \frac{\sigma_{kj}(\tau) d\tau}{\tau - t} + (a_{1kj} - a_{3kj}) \int_{L_{kj}} \sigma_{kj}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} K_1(\tau, t) d\tau + a_{1kj} \int_{K_{jk}} \bar{\sigma}_{kj}(\tau) \times \frac{\partial}{\partial \tau} K_2(\tau, t) d\bar{\tau} \right] = 2\pi i \left[ \frac{a_{2k}}{2} \sigma(t) + \sigma^\infty(t) \right]. \quad (2)$$

其中,  $t \in (L_{1j} \cup L_{2j})$ ,  $k = 1, 2$ .

$$\begin{aligned} a_{11j} &= \frac{1}{2u_{1j}} - \frac{1}{2u_{2j}}; \quad a_{21j} = \frac{1 + k_{1j}}{2u_{1j}} + \frac{1 + k_{2j}}{2u_{2j}}; \\ a_{31j} &= \frac{1 + k_{1j}}{2u_1} - \frac{1 + k_{2j}}{2u_2}; \quad a_{12j} = \frac{1}{2u_{2j}} - \frac{1}{2u}; \\ a_{22j} &= \frac{1 + k_{2j}}{2u_{2j}} + \frac{1 + k}{2u}; \quad a_{32j} = \frac{1 + k_{2j}}{2u_{2j}} - \frac{1 + k}{2u}. \end{aligned}$$
$$\sigma^\infty(t) = -\frac{k+1}{4\mu} \left[ \sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty + \frac{d\bar{\tau}}{d\tau} (\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty - 2\sigma_{xy}^\infty) \right]. \quad (3)$$

其中  $\sigma_{xx}^\infty, \sigma_{yy}^\infty, \sigma_{xy}^\infty$  为无穷远处所施加的应力; 在平面应变中  $k = 3 - 4\nu$ , 在平面应力中  $k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ , 超奇异积分核  $K_1(\tau, t) = \ln \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}}, K_2(\tau, t) = \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}}$ ; 纤维和基体中任意一点的位移可用公式  $u(z) = u_x(z) + iu_y(z)$  表示, 其中应力和位移可以用下式表示<sup>[7]</sup>

$$\begin{cases} 2\mu u(z) = k\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}; \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + \sigma_{xy} = 2[z\varphi''(z) + \psi'(z)]; \\ \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\varphi'(z). \end{cases} \quad (4)$$

在公式 (4) 中的复变函数  $\varphi(z), \psi(z)$  可表示如下<sup>[7]</sup>:

$$\begin{cases} \varphi(z) = -\frac{\mu_s}{\pi i(k_s + 1)} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^2 a_{1kj} \int_{L_k} \sigma_{kj}(\tau) \times \ln(\tau - t) d\tau + \varphi^\infty(z); \\ \psi(z) = \frac{\mu_s}{\pi i(k_s + 1)} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^2 \left[ a_{1kj} \int_{L_k} \sigma_{kj}(\tau) \frac{\tau d\tau}{\tau - z} + (a_{3kj} - a_{1kj}) \int_{L_k} \bar{\sigma}_{kj}(\tau) \ln(\tau - t) d\bar{\tau} \right] + \psi^\infty(z). \end{cases} \quad (5)$$

当  $|z - z_s| \leq R_{1s}$  时,  $\mu_s$  和  $k_s$  为纤维内的弹性常量; 当  $R_{1s} \leq |z - z_s| \leq R_{2s}$  时,  $\mu_s$  和  $k_s$  为界面内的弹性常量; 当点  $z$  为基体内的一点时  $\mu_s = \mu, k_s = k$ .

2 数学模型的建立

为了求解方程 (2) 笔者提出一个在边界  $L_{kj}$  上的未知应力  $\sigma_{kj}(\tau)$ , 其级数表达式为<sup>[6]</sup>

$$\sigma_{kj}(\tau) = \sum_{m=1}^M B_{-mkj} F_{mkj} + \sum_{m=0}^M B_{mkj} / F_{mkj}, \quad \tau \in L_{kj}, \quad k = 1, 2. \quad (6)$$

其中  $F_{mkj} = \left( \frac{R_{kj}}{\tau - t} \right)^m$ , 系数  $B_{-mkj} (m = 1, \dots, M)$  和  $B_{mkj} (m = 0, \dots, M)$  均为待定未知量,  $M$  为傅里叶级数的项数.  $z$  为纤维在直角坐标系中的复坐标,  $z = x + iy$ . 将 (6) 式代入到 (2) 式中, 可知  $B_{-1kj} = 0$ , 且  $B_{0kj}$  为实数. 对方程 (2) 两边同时乘以表达式  $(t - z_s)^p$ , 其中  $p = -(M + 1), -M, \dots, -1, 1, 2, \dots, M - 1$ , 可以得到一系列关于未知系数  $B_{-mkj}$  和  $B_{mkj}$  的方程.

一般情况下, 相对于  $n$  根纤维的情形, 计算应力应变时的未知系数  $B_{-mkj}$  和  $B_{mkj}$  可以结合方程 (1) ~ (3) 和方程 (6) 计算出来, 但为了方便进一步的研究, 该连乘过程可以以矩阵形式表达, 获得相应的线性代数方程:

$$\mathbf{A}_{ss} \mathbf{X}_s = \mathbf{D}_s. \quad (7)$$
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_N \end{bmatrix}.$$

子矩阵  $\mathbf{A}_{ss} (s = 1, \dots, N)$  是一个  $n = 2(4M - 1)$  维的方阵,  $\mathbf{A}_{sj} (s \neq j)$  是一个  $n_i \times n_j$  维矩阵, 表示第  $s$  根纤维对第  $j$  根纤维力学性能的影响; 未知矩阵  $\mathbf{X}$  可以通过高斯赛德尔迭代公式计算得出, 在这个迭代公式中, 令

$$\mathbf{X}^{(k)} = [X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \dots, X_N^{(k)}]^T, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

表示在迭代过程中第  $k$  次迭代近似值, 由高斯赛德尔迭代公式可得矩阵  $\mathbf{X}$  的第  $k + 1$  次迭代表达式<sup>[6]</sup>:

$$\mathbf{X}_s^{(k+1)} = \mathbf{A}_{ss}^{-1} \left[ \mathbf{D}_s - \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_{sj} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=s+1}^N \mathbf{A}_{sj} \times X_j^{(k)} \right], \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

在迭代过程中, 当  $\|\mathbf{X}_s^{(k+1)} - \mathbf{X}_s^k\| \leq \delta_1, (s = 1, 2, \dots, N)$  时迭代终止,  $\delta_1$  为设定的迭代误差限.

3 计算等效弹性模量

根据 GB 50010—2010《混凝土结构设计规范》<sup>[8]</sup>

知:混凝土的泊松比  $\nu = 0.2$ , 弹性模量  $E_c = 3.0 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ , 剪切模量  $\mu$  为 0.4 倍的弹性模量, 即  $\mu = 1.2 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ ; 钢筋的泊松比  $\nu_F = 0.3$ , 钢筋的弹性模量  $E_s = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ , 剪切模量  $\mu_1 = 8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ ; 根据材料的界面特性<sup>[9]</sup>, 取界面的泊松比和剪切模量分别为  $\nu = 0.15, \mu_2 = 0.48 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ . 因此, 在平面应变条件下, 可得平面应变系数  $k = 2.2, k_1 = 1.8, k_2 = 2.4$ . 在无无穷远处分别施加应力  $\sigma_{xx}^\infty = 1 \text{ MPa}, \sigma_{yy}^\infty = 0, \sigma_{xy}^\infty = 0$ . 根据公式(4), (6) 和(8) 可以算出在纤维、界面和基体内任一点  $z$  的应力  $\sigma_{xx}(z), \sigma_{yy}(z)$  和位移  $\mu_x(z), \mu_y(z)$ .

在该无限平面内取一个计算单元, 如图 2 所示, 采用文献[10] 中的方法, 通过公式(4) 计算在该单元模型  $AB$  边上的平均应力和沿  $Ox$  轴方向和沿  $Oy$  轴方向的应变

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \sigma_{xx}(L, y) dy. \tag{9}$$

$$\bar{\varepsilon}_x u_x / (2L) \bar{\varepsilon}_y = u_y / (2L). \tag{10}$$

在沿  $Ox$  轴方向的等效弹性模量为:  $E'_x = \bar{\sigma}_x / \bar{\varepsilon}_x$ , 在平面应变条件下的有效泊松比为  $\nu'_{xy} = -\bar{\varepsilon}_y / \bar{\varepsilon}_x$ . 则该单元的弹性模量可表示如下<sup>[10]</sup>

$$E_x = \frac{1 + 2\nu'_{xy}}{(1 + \nu'_{xy})^2} E'_x. \tag{11}$$

从细观力学的角度出发, 混凝土的代表性体积单元(RVE)的尺寸可以选为  $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ . 选取等效直径为  $0.9 \text{ mm}$ , 长度为  $30 \text{ mm}$  圆形钢纤维, 体积率分别为  $0.5\%、1.0\%$  和  $1.5\%$  的钢纤维混凝土作为研究对象. 根据文献[9] 中界面厚度的表示, 钢纤维与基体之间的界面厚度一般取  $0.05 \text{ mm}$  左右, 在此取界面层的厚度分别为  $0.040, 0.045, 0.050, 0.055$  和  $0.060 \text{ mm}$ , 计算具有不同界面层厚度的钢纤维混凝土等效弹性模量, 图 2~4 分别给出了体积率分别为  $0.5\%、1.0\%$  和  $1.5\%$  时的钢纤维混凝土的等效弹性模量值  $E$ .

从图 2~4 可以得出以下结果.

1) 等效弹性模量值  $E$  随着纤维根数的增加而减小, 最终趋于接近某一个定值, 这是由于纤维的根数增多时界面层占有体积在基体中所占的比重增加, 又因界面是钢纤维混凝土中的薄弱环节, 其强度普遍低于混凝土, 故增加钢纤维的根数时则材料的等效弹性模量值减小;

2) 当纤维的根数一定时, 等效弹性模量值  $E$

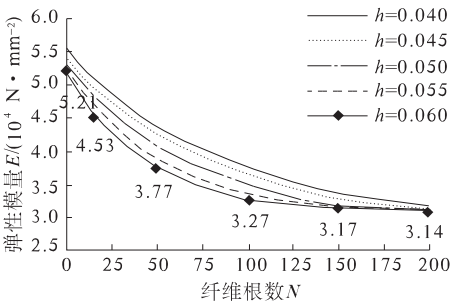


图 2  $\rho_f=0.5\%$  时的等效弹性模量值  $E$

Fig. 2 Equivalent elastic modulus  $E$  of  $\rho_f=0.5\%$

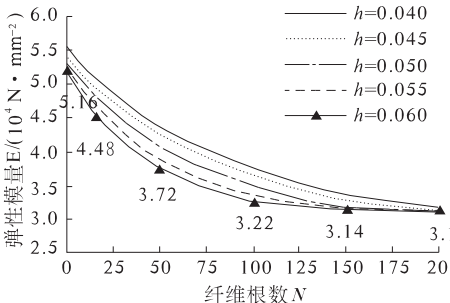


图 3  $\rho_f=1.0\%$  时的等效弹性模量值  $E$

Fig. 3 Equivalent elastic modulus  $E$  of  $\rho_f=1.0\%$

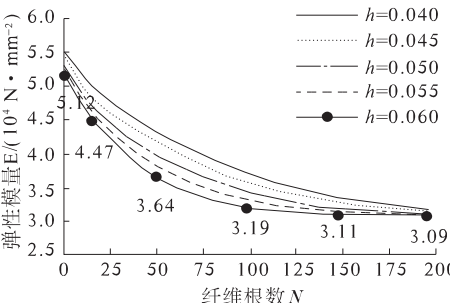


图 4  $\rho_f=1.5\%$  时的等效弹性模量值  $E$

Fig. 4 Equivalent elastic modulus  $E$  of  $\rho_f=1.5\%$

随着界面厚度的增大而逐渐减小, 这是因为界面层的弹性模量小于基体混凝土的弹性模量, 增大界面层厚度就削弱了钢纤维和混凝土之间的粘结强度;

3) 对比图 2~4 可以得出, 当纤维根数和界面层厚度一定时, 钢纤维混凝土的等效弹性模量随着体积率的增大而有所减小. 这是因为掺入了钢纤维以后增多了混凝土内部的界面薄弱层, 并且掺入钢纤维的体积率越大界面薄弱层就越多, 因而弹性模量也有所减小.

4) 结合图 2、图 3 和图 4 可以看出, 通过本模型计算得出的钢纤维混凝土的等效弹性模量值在  $E = 3.11 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$  左右; 与文献[11] 中试验测得的钢纤维混凝土的弹性模量值基本相等, 从

而验证了本模型的有效性.

4 结论

笔者采用了超奇异积分方程与 Galerkin 积分方法获得考虑界面层影响的钢纤维混凝土等效弹性模量,考察了纤维体积率、界面层厚度对钢纤维混凝土等效模量的影响,结果表明纤维体积率与界面层厚度均对钢纤维混凝土的宏观弹性模量有显著影响.并通过与实验结果对比验证了该模型的有效性.

参考文献:

[1] ACHENBACH J D, ZHU H. Effect of interphases on micro and macromechanical behavior of hexagonal-array fiber composites[J]. Journal of Applied Mechanics, 1990, 57(4):956-963.

[2] YE H J R. The effect of interface on the transverse properties of composites[J]. International Journal of Solids and Structures, 1992,29(20):2493-505.

[3] GOSZ M, MORAN B, ACHENBACH J D. On the role of interphases in the transverse failure of fiber composites[J]. International Journal of Damage Mechanics, 1994, 3(2):357-377.

[4] NASSCHI V, DHILLON J, MASCIA L. Finite element simulation of the micromechanical characterization of interface layerpolymer/fiber composite: a study of the in-

teractions between the reinforcing phases[J]. Composite Science and Technology, 1993, 37(2):349-358.

[5] STRACK O D L. Principles of the analytic element method[J]. Journal of Hydrology, 1999, 226(1):128-138.

[6] MOGILEVSKAYA S G, CROUCH S L. A galerkin boundary integral method for multiple circular elastic inclusions [J]. International Journal for Numerical Methods in engineering, 2001, 52(10):1069-1106.

[7] MOGILEVSKAYA S G, CROUCH S L. A galerkin boundary integral method for multiple circular elastic inclusions with uniform interphase layers[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(5/6):1285-1311.

[8] 中华人民共和国住房和城乡建设部. GB 50010—2010,混凝土结构设计规[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2011.

[9] 郑建军,吕建平,吴殖民. 考虑不均匀界面时混凝土弹性模量预测[J]. 复合材料学报,2008, 25(5):141-146.

[10] LIU Yi-jun, XU Nan. Modeling of interphases in fiber-reinforced composites under transverse loading using the boundary element method[J]. Journal of Applied Mechanics, 2000, 67(1):41-49.

[11] 楼志辉. 钢纤维再生混凝土基本力学性能和断裂性能试验研究[D]. 郑州大学土木工程学院,2007.

Micromechanics Equivalent Performance Study of Steel Fiber Reinforced Concrete with Interface Layers

CHENG Zhan-qi, XIA Nai-kai

(School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001 ,China)

**Abstract:** The interfaces between fiber and matrix have significant effect on the toughness and strength of steel fiber reinforced concrete (SFRC). Therefore, a model is built, that is to investigate the character of its micro-structure of SFRC and the relationship between its microstructure and its macroscopic properties, by using hyper-singular integral equations and complex function. This model is about the unknown stress, strain and displacement on the boundary of fiber, matrix, and interface with considering that fibers randomly distribute in an infinite and isotropic plane. The equivalent elastic modulus of SFRC under plane strain conditions is obtained by using the Galerkin integral method and Gauss-Seidel iterative algorithm method. The influence of the the thickness of interface and the volume fraction of the steel fiber on the elastic modulus is investigated. The numerical results show that both thickness of interface and volume fraction of steel fiber have significant effects on the elastic modulus of the steel fiber reinforced concrete. Then the accuracy, efficiency, and versatility of the model are demonstrated by comparing the numerical results with the results from the test with the same conditions.

**Key words:** steel fiber reinforced concrete; interface; micromechanics; equivalent elastic modulus