

受热不可压黏弹性圆柱体中空穴的动态增长

陈亚娟¹, 王钦亭¹, 尚新春²

(1. 河南理工大学 土木工程学院, 河南 焦作 4540003; 2. 北京科技大学 应用科学学院, 北京 100083)

摘 要:应用黏弹性有限变形理论,研究了不可压黏弹性圆柱体受到均匀温度场作用下的热空化问题. 分别对圆柱实体和预存微孔的圆柱体两种情形进行讨论,建立了问题的非线性数学模型. 数值计算结果证实了分叉问题可视为预存微孔半径生长的理想模型,得到了微孔半径随时间增长的动态变化曲线,并讨论了外界温度场、初始微孔半径、材料参数以及轴向伸长对微孔半径增长规律的影响.

关键词:热黏弹性体;圆柱体;有限变形;空穴;动态生长

中图分类号: O343 **文献标志码:** A doi:10.3969/j.issn.1671-6833.2014.01.020

0 引言

材料断裂和损伤过程的起点是空穴的产生,目前,国内外学者对超弹性材料,以及弹性材料中受到外加载荷作用下产生空穴及动态增长问题,进行了大量的科学研究. 如 Lopez^[1]、Cohen^[2]、Volokh^[3]、尚新春^[4]、任九生^[5-9]、袁学刚^[10]等对超弹性球体以及圆柱体中的空穴问题进行了深入的研究. 对于弹性材料的不稳定性问题,尚新春研究了 Hooke 弹性体在只受到径向拉伸载荷作用下的空穴分岔解^[11],对于不考虑外加载荷,只考虑温度影响的空穴生成问题,尚新春^[12]得到了复合球体大变形热弹性膨胀的参数形式的解析解.

塑料、陶瓷、金属等工业材料,沥青、石油等地质材料,在高温或高压条件下会呈现出黏弹性,在遇到变形、失稳及破坏等问题时同样也会出现空穴现象. 笔者研究了不可压的黏弹性圆柱体在受到外界温度场作用下空穴的动态增长,求得了柱体中空穴半径随时间增长的动态变化曲线,并分析了各参数对空穴半径增长规律的影响. 同时对预存微孔情形进行了类似计算,得到了微孔半径与温度关系曲线,以及不同的初始微孔半径下微孔半径随时间的动态变化曲线.

1 问题的数学模型

考虑一个不可压缩黏弹性圆柱体在受到均匀温度场作用下的有限变形动力学问题,采用柱坐标系,变形前圆柱体中位于 (R, Θ, Z) 的点在时刻 t 运

动到 (r, θ, z) 位置,则圆柱体的运动可以表示为

$$\begin{cases} r = r(R, t), 0 \leq R \leq R_0; \\ \theta = \Theta; \\ z = \lambda_z Z. \end{cases} \tag{1}$$

由于材料具有的不可压缩性,得到

$$\begin{cases} r = \left(\frac{R^2}{\lambda_z} + \delta^2(t) \right)^{1/2}; \\ \delta(t) \geq 0; \\ t \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

$\delta(t)$ 是生成空穴的半径,它是时间 t 的待定函数. 采用对数应变来描述有限变形.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \ln \frac{\partial r}{\partial R}; \\ \varepsilon_\theta = \ln \frac{r}{R}; \\ \varepsilon_z = \ln \lambda_z. \end{cases} \tag{3}$$

则对数应变满足

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{2} \ln \left(\lambda_z^{-1} \left[1 - \left(\frac{\delta(t)}{r} \right)^2 \right] \right); \\ \varepsilon_\theta = -\frac{1}{2} \ln \left(\lambda_z \left[1 - \left(\frac{\delta(t)}{r} \right)^2 \right] \right); \\ \varepsilon_z = \ln \lambda_z. \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = -\frac{\delta \dot{\delta}}{r^2}; \\ \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\delta \dot{\delta}}{r^2}; \\ \dot{\varepsilon}_z = 0. \end{cases} \tag{5}$$

收稿日期:2013-10-14;修订日期:2013-11-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10772024)

作者简介:陈亚娟(1976-),女,河南开封人,河南理工大学副教授,博士研究生,主要研究方向为结构和材料的非线性力学计算,E-mail:juanzichen@hpu.edu.cn.

圆柱体采用 Kelvin-Voigt 微分型^[13-14] 热黏弹性本构, 柱坐标下的本构关系为

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda \left(1 + t_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu \left(1 + t_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_r - \beta T; \\ \sigma_\theta = \lambda \left(1 + t_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu \left(1 + t_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_\theta - \beta T; \\ \sigma_z = \lambda \left(1 + t_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu \left(1 + t_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_z - \beta T. \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ 是径向、环向和轴向应力; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ 是径向、环向和轴向应变; λ, μ 是拉梅常数; t_0 是黏弹性体热松弛时间; $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, α_t 是线性热膨胀系数; T 是对于初始温度的改变量。

应力分量应满足的运动微分方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = \rho \ddot{r}. \quad (7)$$

对不受约束的空穴表面应有

$$\sigma_r(\delta, t) = 0. \quad (8)$$

最外层自由边界条件为

$$\begin{cases} \sigma_r(r_0, t) = 0; \\ r_0 = \left(\frac{R_0^2}{\lambda_z} + \delta^2(t) \right)^{1/2}. \end{cases} \quad (9)$$

式中: r_0 为圆柱体变形后的半径。

空穴半径的初始条件为

$$\begin{cases} \delta(t) = 0; \\ \dot{\delta}(t) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

因此, 现在的问题是对给定的温度 T , 求满足运动微分方程(7), 边界条件(8)、(9) 和初始条件(10) 的待定函数 $\delta(t) \geq 0$ 。

2 问题的求解

把式子(4)、(5) 代入到本构方程(7) 中,

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2\mu \ln \left[1 - \left(\frac{\delta(t)}{r} \right)^2 \right] - 4\mu t_0 \frac{\delta \dot{\delta}}{r^2}. \quad (11)$$

把不可压条件(2) 对 t 求微分后的结果和式子(11) 代入到运动方程(7) 中, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = & -\frac{1}{r} \left(2\mu \ln \left[1 - \left(\frac{\delta(t)}{r} \right)^2 \right] - 4\mu t_0 \frac{\delta \dot{\delta}}{r^2} \right) + \rho \frac{\delta \ddot{\delta}}{r} + \\ & \rho \left[\frac{1}{r} - \frac{\delta^2}{r^3} \right] \dot{\delta}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

对式子(12) 中的 r 从 δ 到 r 进行积分, 并利用边界条件(8), 可得到热黏弹性区域的径向应力 σ_r 。

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \rho \delta \left(\ln \frac{r}{\delta} \right) \ddot{\delta} + \rho \left(\ln \frac{r}{\delta} + \frac{\delta^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \dot{\delta}^2 - \\ & 2\mu t_0 \delta \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\delta^2} \right) \dot{\delta} - 2\mu \int_\delta^r \ln \left[1 - \left(\frac{\delta(t)}{r} \right)^2 \right] \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

(13)

联立边界条件(9) 和式子(7), 得到

$$\begin{aligned} \rho \delta \left(\ln \frac{r_0}{\delta} \right) \ddot{\delta} + \rho \left(\ln \frac{r_0}{\delta} + \frac{\delta^2}{2r_0^2} - \frac{1}{2} \right) \dot{\delta}^2 + \\ 2\mu t_0 \frac{\dot{\delta}}{\delta} - 2\mu \int_\delta^{r_0} \ln \left[1 - \left(\frac{\delta(t)}{r} \right)^2 \right] \frac{ds}{s} + \beta T - \\ \mu \ln \left(\lambda_z^{-1} \left[1 - \left(\frac{\delta}{r_0} \right)^2 \right] \right) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

式子(14) 是一个非线性变系数二阶常微分方程, 它给出了在某一给定的温度 T 下, 空穴半径 $\delta(t)$ 随时间变化的精确关系。因此, 称式子(14) 为空穴的生成运动方程。

采用无量纲变换 $w = \frac{\rho R_0^2}{\mu t_0^2}, \tau = \frac{t}{t_0}$,

$$T_0 = \frac{T}{\left(\frac{\mu}{\beta} \right)}, x = \frac{\delta}{R_0}, \text{ 引入 } \eta = \left(1 - \frac{\delta^2}{s^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

令

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} = & \frac{1}{\tau'}, a(x) = \frac{w}{2} x \left(\ln \left(\frac{1}{\lambda_z x^2} + 1 \right) \right), b_1(x) \\ = & 4 \int_0^{(1+\lambda_z x^2)^{-\frac{1}{2}}} (\ln \eta) \left(\frac{\eta}{1-\eta^2} \right) d\eta - \ln \lambda_z - \\ & \ln(1 + \lambda_z x^2) - T_0 b_2(x) = \frac{2}{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3(x) = & -\frac{w}{2} \left(\ln \left(\frac{1}{\lambda_z x^2} + 1 \right) - \frac{1}{(1 + \lambda_z x^2)} \right) y_1 = \\ & \tau', y_2 = \tau. \end{aligned}$$

式子(14) 可变为

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{b_1(x)}{a(x)} y_1^3 - \frac{b_2(x)}{a(x)} y_1^2 - \frac{b_3(x)}{a(x)} y_1. \quad (15)$$

$$\begin{cases} y_1(0) = \infty; \\ y_2(0) = 0, y_2(x) = \int_0^x y_1(s) ds. \end{cases} \quad (16)$$

对(15) 式采用 Runge-Kutta 方法进行数值求解, 再求反函数就可以得到 $x = x(\tau)$ 的数值解。

3 预存微孔情形

设圆柱体中有一个半径为 ε 的预存微孔, 变形后微孔半径为 δ , 在柱体表面受到均匀温度场的作用, 因此关系式(17) 成立。

$$r(R, t) = \left(\frac{R^2}{\lambda_z} + \delta^2(t) - \varepsilon^2 \right)^{1/2}. \quad (17)$$

进行与前面类似的分析可得

$$\begin{aligned} \frac{w}{2} x \ln \left(\frac{1}{\lambda_z x^2} + 1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^2 \right) \frac{d^2 x}{d\tau^2} - \frac{2}{x} \frac{dx}{d\tau} + \ln \lambda_z + T_0 + \\ \frac{w}{2} \left(\ln \left(\frac{1}{\lambda_z x^2} + 1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^2 \right) + \frac{\lambda_z x^2}{(1 + \lambda_z x^2 - \lambda_z x_0^2)} \right) \end{aligned}$$

$$-1)\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2-4\int_{\frac{x_0}{x}}^{(1+\lambda_zx^2-\lambda_zx_0^2)^{-\frac{1}{2}}}(\ln\eta)\left(\frac{\eta}{1-\eta^2}\right)d\eta$$
$$+\ln(1+\lambda_zx^2-\lambda_zx_0^2)=0.$$

(18)

若 $\frac{dx}{d\tau}=0$, 则式子(18) 变为

$$-4\int_{\frac{x_0}{x}}^{(1+\lambda_zx^2-\lambda_zx_0^2)^{-\frac{1}{2}}}(\ln\eta)\left(\frac{\eta}{1-\eta^2}\right)d\eta+\ln\lambda_z+\ln(1+\lambda_zx^2-\lambda_zx_0^2)+T_0=0.$$

(19)

4 结果分析

图 1 给出了外界温度场对空穴半径 x 增长快慢的影响曲线. 可以看出温度越高, 空穴半径增长得越快. 图 2 给出了材料参数 w 对空穴半径 x 增长快慢的影响曲线. 材料参数 w 越大, 空穴半径增长得越慢, 由 $w=\frac{\rho R_0^2}{\mu t_0^2}$ 可知, 当材料参数 ρ, μ, t_0 一定时, w 与 R_0^2 成正比. 当 w 是 $1\,000w_0$ 与 $100\,000w_0$ 时, 两条曲线几乎重合在一起, 从而推知, 可以用 $1\,000w_0$ 的柱体来模拟无限大柱体中的空穴增长规律. 图 3 给出了轴向伸长 λ_z 对空穴半径 x 增长快慢的影响曲线. 可以看出 λ_z 越大, 空穴半径增长得越慢.

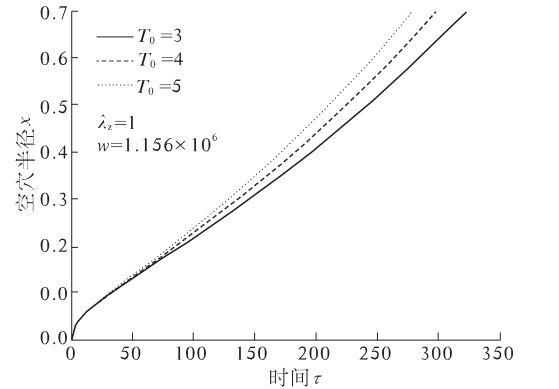


图 1 不同温度下空穴半径 x 随时间 τ 变化曲线

Fig.1 Cavity radius x vs time t under different temperature

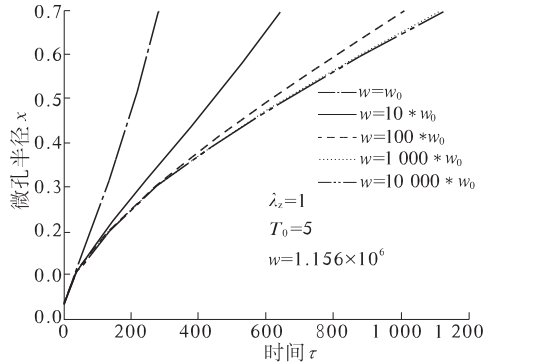


图 2 不同材料参数 w 下微孔半径 x 随时间 τ 变化曲线

Fig.2 Variation curves of microvoid radius x with time τ under different material parameter w

由式子(19) 得到预存微孔热黏弹性圆柱体在静态下微孔半径 x 与温度 T_0 的关系曲线, 见图 4 所示. 当轴向伸长 λ_z 一定时, 初始微孔 x_0 为零, 即为圆柱实体, 若外界温度超过临界温度, 空穴会突然生成, 空穴半径随着温度的升高而迅速增加. 初始微孔 x_0 越小, 微孔半径增长得越慢, 越接近于圆柱实体的空穴分岔曲线, 这说明, 空穴的生成问题可以看作是微孔生长的理想模型.

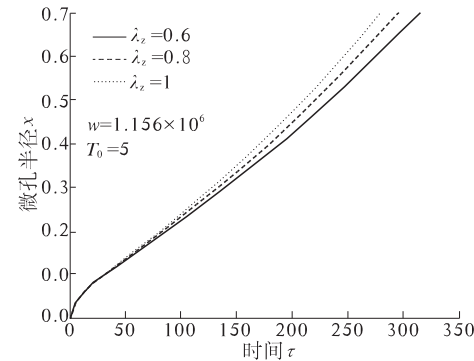


图 3 不同 λ_z 时微孔半径 x 随时间 τ 变化曲线

Fig.3 Variation curves of microvoid radius x with time τ under different λ_z

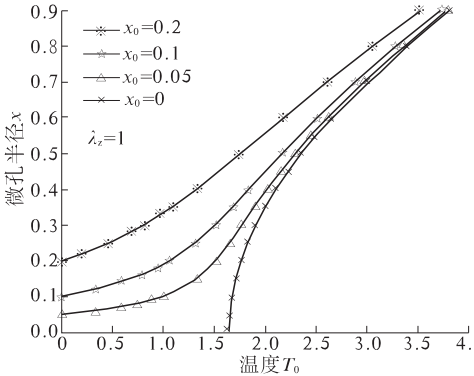


图 4 微孔半径 x 与温度 T_0 的关系曲线

Fig.4 Curves of microvoid radius x with temperature T_0

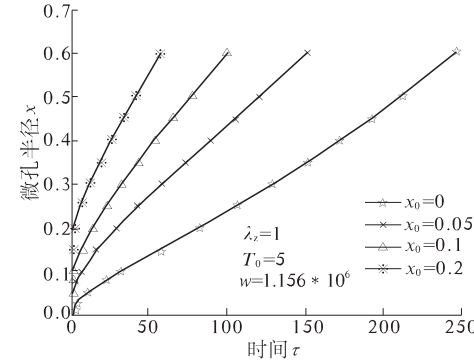


图 5 不同的初始微孔半径下微孔半径 x 随时间 τ 变化曲线

Fig.5 Variation curves of microvoid radius x with time τ under different initial microvoid radius

由式子(18)得到不同的初始微孔时微孔半径 x 随时间 τ 的动态变化曲线,其他参数一定时,初始微孔越大,微孔半径增长得越快.而且,预存微孔的圆柱体内微孔半径随时间的动态增长同圆柱实体情况一样,受到外界温度 T_0 、材料参数 w 和轴向伸长 λ_z 的影响.

5 结论

(1)外界温度 T_0 越大,材料参数 w 越小,轴向伸长 λ_z 越小,达到相同的空穴半径,需要的时间越短.

(2)初始微孔越小,达到同样的微孔半径,需要的外界温度越高.

(3)初始微孔越小,受热后微孔半径动态增长得越慢,越接近实心柱体.笔者运用非线性动力学理论来解决具有广泛实际工程背景的黏弹性材料和结构的不稳定性问题,对于进一步研究材料的损伤和断裂具有重要的意义.

参考文献:

- [1] LOPEZ-PAMIES O. Onset of cavitation in compressible, isotropic, hyperelastic Solids[J]. Journal of Elasticity, 2009, 94(2): 115 - 145.
- [2] COHEN T, DURBAN D. Cavitation in elastic and hyperelastic sheets[J]. International Journal of Engineering Science, 2010, 48(1): 52 - 66.
- [3] VOLOKH K Y. Cavitation instability in rubber[J]. International Journal of Applied Mechanics, 2011, 3(2): 299 - 311.
- [4] SHANG Xin-chun, CHENG Chang-Jun. Exact solution for cavitating bifurcation for compressible hyperelastic materials[J]. International Journal of Engineering Science, 2001, 39(10): 1101 - 1117.
- [5] 任九生,程昌钧.热超弹性圆筒的不稳定性[J].力学学报, 2007, 39(2): 283 - 288.
- [6] 任九生.周期载荷下超弹性圆柱壳的动力响应[J].应用数学与力学, 2008, 29(10): 1199 - 1207.
- [7] 任九生.热超弹性圆柱壳的振动与破坏[J].振动与冲击, 2008, 27(12): 36 - 39.
- [8] 任九生.热超弹性材料的不稳定性问题[J].力学学报, 2009, 39(5): 566 - 575.
- [9] 袁学刚,魏凤伦.一类可压缩超弹性圆柱体轴线上的空穴现象[J].固体力学学报, 2011, 32(S): 115 - 119.
- [10] 任九生,沈佳铖,袁学刚.周期载荷下不可压超弹性材料的空穴动生成[J].振动与冲击, 2012, 31(18): 10 - 13.
- [11] 尚新春,程昌钧.弹性固体材料中的空穴萌生与增长[J].北京科技大学学报, 2002, 24(3): 380 - 382.
- [12] SHANG Xin-chun, ZHANG Rui, REN Hui-lan. Analysis of cavitation problem of heated elastic composite ball[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2011, 32(5): 587 - 594.
- [13] BANERJEE S, ROYCHOUDHURI S K. Spherically symmetric thermo-visco-elastic waves in a visco-elastic medium with a spherical cavity[J]. Computers math Applic, 1995, 30(1): 91 - 98.
- [14] KAR A, KANORIA M. Generalized thermo-visco-elastic problem of a spherical shell with three-phase-lag effect[J]. Applied Mathematical Modeling, 2009, 33(8): 3287 - 329.

Dynamical Growth of Cavity in a Heated Incompressible Viscoelastic Cylinder

CHEN Ya-juan¹, WANG Qin-ting¹, SHANG Xin-chun²

(1. School of Civil Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China; 2. Department of Applied Mechanics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: Applying the visco-elastic finite deformation theory, the cavitation problem of incompressible visco-elastic cylinder was researched under the case of uniform temperature field. Both the solid cylinder and the pre-existing microvoid cylinder were discussed respectively, and the nonlinear mathematical models were established. The numerical results illustrated that the bifurcation problem could be regarded as the idealized model of microvoid growth, the dynamical variation curves of microvoid radius with time were obtained, and the influences of external temperature, the initial microvoid radius, the material parameter and the axial stretch on microvoid radius were also discussed.

Key words: thermo-visco-elasticity; cylinder; finite deformation; cavity; dynamical formation and growth