

文章编号:1671-6833(2017)06-0050-04

基于 Möbius 变换的复有理圆弧样条

任两品, 薛均晓, 张朝阳, 王定标

(郑州大学 软件与应用科技学院, 河南 郑州 450002)

摘要: 针对工业产品和机械零件设计中的二次圆弧表示问题, 基于 Möbius 变换的保交比性质和保圆性质, 提出了一种用参数复有理函数精确表示圆弧曲线的方法. 该方法通过构造直线段与圆弧曲线之间的 Möbius 变换, 将圆弧曲线表示为复有理函数的形式, 并结合光滑约束条件构造了复有理圆弧样条函数. 与 Bezier 曲线和 NURBS 曲线等方法相比, 该方法能够精确定义二次圆弧曲线, 而且不需要反求控制顶点和权因子, 实验结果表明所提方法简单易行.

关键词: 计算机数控; 圆弧样条; Möbius 变换

中图分类号: TP391.72

文献标志码: A

doi:10.3969/j.issn.1671-6833.2017.03.004

0 引言

在工业产品和机械零件的计算机数控加工中, 常常需要使用构造方法简单, 而且容易实现的基本曲线来代替和逼近任意曲线. 由于直线和圆弧的定义形式简单, 而且易于在计算机中进行构造, 所以大多数数控加工中利用直线和圆弧插补的方式来对机械零件进行加工^[1-3]. 特别地, 相对于直线, 圆弧具备更好的光滑性质, 因此使用圆弧曲线来逼近计算机数控的刀具加工路径在近几年得到了大量的研究^[4-7]. 以 Bezier 曲线和样条曲线方法为代表的自由型曲线曲面设计方法, 是图形图像造型的基本工具, 是计算机辅助设计和计算机图形学中运用得最多的基本方法之一. 然而, 该方法在逼近圆弧曲线时计算量巨大, 而且算法的实现过程非常复杂. 例如, 对于具有特定半径的半圆弧, 需要使用 5 次 Bezier 曲线进行逼近, 而且必须反求 Bezier 曲线的控制顶点. 如果圆弧的半径发生改变, 或者对于逼近精度有更高的要求, 则需要重新设定 Bezier 曲线的次数, 而且需要重新计算控制顶点.

NURBS 方法^[8]的出现, 很好地解决了这一问题, 它在保留了样条方法描述自由型形状的长处的同时, 扩充了样条方法统一表示二次曲线的能力, 包括精确表示二次圆弧. 但是和任何一种方法

一样, NURBS 方法也面临很多问题, 尤其是权因子怎样影响曲线的参数化和怎样确定合适的权因子, 一直是困扰设计工作者并且没有得到解决的问题. 同时, NURBS 方法在定义圆弧的时候需要额外的存储. 例如, 用一个外切正方形作为控制多边形定义一个整圆, 至少需要 7 个控制顶点和 10 个节点. 而传统的表示只要求给出圆心, 半径和垂直于圆所在平面的法矢.

基于三角多项式的 C-curves^[9]解决了圆弧曲线的精确表示问题, 但该方法本身也面临着参数的选取困难问题. 同时, 利用三角多项式表示形式代替有理表示形式, 这将大大增加计算机的运算量. Möbius 变换^[10]最早是由德国几何学家与天文学家莫比乌斯提出来的. 它是复分析中形式结构简单, 具有良好性质, 而且应用广泛的一类保形变换. Möbius 变换具有保交比性质和保圆性质. 在本文中, 通过构造直线段与圆弧曲线之间的 Möbius 变换, 将圆弧曲线表示为复有理函数的形式. 该表示方法形式简单, 存储数据量小, 具有良好的插值性质和仿射不变性质, 而且可以在光滑约束条件下与 B 样条曲线实现连续拼接.

1 Möbius 变换

定义 1.1 由复变函数

收稿日期:2016-10-30; **修订日期:**2016-12-19

基金项目:河南省自然科学基金资助项目(162300410262);河南省高校科技创新团队项目(16IRTSTHN027);河南省高等学校重点科研项目(18A4130)

通信作者:薛均晓(1982—),男,河南南阳人,郑州大学副教授,博士,主要从事计算机辅助设计、智能制造系统方面的研究, E-mail: xuejx@zzu.edu.cn.

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (1)$$

所确定的变换称为 Möbius 变换. 其中, a, b, c, d 为复平面上的常数; z 是复变量.

条件 $ad - bc \neq 0$ 是必需的, 否则 w 将蜕化成为常数.

说明: 对(1)式进行如下补充定义:

a) 若 $c \neq 0$, 定义 $w = \infty \left(z = -\frac{d}{c} \right)$, 定义

$$w = \frac{a}{c} \left(z = \infty \right);$$

b) 若 $c = 0$, 定义 $w = \infty \left(z = \infty \right)$.

基于以上补充定义, 我们不难发现式(1)能够将扩充的初始平面一一地映射为另一个扩充平面, 即由式(1)所定义的变换 $w = f(z)$ 能够确定初始扩充 z 平面到目标扩充 w 平面之间的一一对应变换关系.

定理 1.1 设 Möbius 变换将扩充 z 平面 3 个不同的点 z_1, z_2, z_3 对应变换成扩充 w 平面上的 3 个点 w_1, w_2, w_3 , 即 $w_j = f(z_j), j = 1, 2, 3$. 则该 Möbius 变换就被唯一确定, 并且可以写成下述形式:

$$w = f(z) = \frac{[(z - z_3)(z_1 - z_2)w_2(w_1 - w_3) - (z - z_2)(z_1 - z_3)w_3(w_1 - w_2)]}{(w_1 - w_3) - (z - z_2)(z_1 - z_3)(w_1 - w_2)}. \quad (2)$$

由定理 1.1 可得, 扩充平面上的 3 对对应点能够唯一确定一个 Möbius 变换.

2 基于 Möbius 变换的圆弧曲线表示方法

定理 2.1 设 $v_1(x_1, y_1), v_2(x_2, y_2), v_3(x_3, y_3)$ 是平面上不在同一条直线上的任意 3 点. 记 $w_j = x_j + iy_j (j = 1, 2, 3)$, w_j 是点 v_j 的复数表示, 则下述复有理函数

$$w(t) = \frac{[(t - t_3)(t_1 - t_2)w_2(w_1 - w_3) - (t - t_2)(t_1 - t_3)w_3(w_1 - w_2)]}{(w_1 - w_3) - (t - t_2)(t_1 - t_3)(w_1 - w_2)}, t \in [t_1, t_3], \quad (3)$$

精确表示由 v_1, v_2, v_3 这 3 点所确定的一段圆弧曲线, 并且满足 $w_j = w(t_j) (j = 1, 2, 3)$. 其中, $t_j \in \mathbb{R} (j = 1, 2, 3)$ 为实数节点, 且 $t_1 < t_2 < t_3$.

证明 因为 $t \in [t_1, t_3] \subset \mathbb{R}$, 不妨将 t 看作虚部为零的复数, 则式(3)所确定的为 Möbius 变换.

由 Möbius 变换的保交比性质, 4 点 w, w_1, w_2, w_3 的交比 (w, w_1, w_2, w_3) 等于 4 点 t, t_1, t_2, t_3 的交比 (t, t_1, t_2, t_3) . 显然, (t, t_1, t_2, t_3) 为实数, 所以 (w, w_1, w_2, w_3) 也为实数. 结合 Möbius 变换的保圆周性质, 4 点 w, w_1, w_2, w_3 位于同一圆周上, 即

式(3)所定义的函数精确表示由 v_1, v_2, v_3 这 3 点所确定的一段圆弧曲线.

事实上, 在定理 2.1 中, 若记经过 v_1, v_2, v_3 3 点的圆弧曲线为 Γ , 则式(3)建立了实数轴上的区间 $[t_1, t_3]$ 与圆弧曲线 Γ 之间的一一对应关系. 即式(3)为圆弧曲线 Γ 的参数复有理函数表示. 换句话说, 任给平面上不在同一直线上的 3 点, 都可以利用式(3)来构造由它们所确定的圆弧曲线.

下面说明式(3)是非退化的. 式(3)可以整理为 M-形式, 定义如下:

$$w(t) = \frac{at + b}{ct + d},$$

式中,

$$\begin{aligned} a &= (t_1 - t_2)w_2(w_1 - w_3) - (t_1 - t_3)w_3(w_1 - w_2); \\ b &= t_2(t_1 - t_3)w_3(w_1 - w_2) - t_3(t_1 - t_2)w_2(w_1 - w_3); \\ c &= (t_1 - t_2)(w_1 - w_3) - (t_1 - t_3)(w_1 - w_2); \\ d &= t_2(t_1 - t_3)(w_1 - w_2) - t_3(t_1 - t_2)(w_1 - w_3); \\ t_1 &< t_2 < t_3, t \in [t_1, t_3]. \end{aligned}$$

由于

$$ad - bc = (t_1 - t_2)(w_1 - w_2)(t_2 - t_3)(w_2 - w_3)(t_1 - t_3)(w_1 - w_3) \neq 0,$$

所以 M-形式是非退化的.

记式(3)为参数复有理圆弧曲线, 下文中将讨论它的相关性质.

3 参数复有理圆弧曲线的性质

3.1 仿射不变性

设

$$\begin{cases} \Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ w \rightarrow w \cdot \mathbf{M} + \mathbf{N}, \end{cases} \quad (4)$$

式中, \mathbf{M} 为 2×2 矩阵; \mathbf{N} 为 1×2 向量.

把 $\Phi(w_j) = w_j \cdot \mathbf{M} + \mathbf{N}$ 代入式(4), 经过简单计算可得

$$w(t; w_1 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{N}, w_2 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{N}, w_3 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{N}) = w(t; w_1, w_2, w_3) \cdot \mathbf{M} + \mathbf{N}.$$

亦即

$$w[t; \Phi(w_1), \Phi(w_2), \Phi(w_3)] = \Phi[w(t; w_1, w_2, w_3)]. \quad (5)$$

3.2 几何不变性

设

$$\begin{cases} \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \\ t \rightarrow kt + h, \end{cases} \quad (6)$$

其中, k, h 均为实数.

把 $\varphi(t) = kt + h, \varphi(t_j) = kt_j + h, (j = 1, 2, 3)$ 代入式(5), 经过简单计算可得

$$w[\varphi(t); \varphi(t_1), \varphi(t_2), \varphi(t_3)] = w(t). \quad (7)$$

上述性质表明:M-形式中的参数定义区间和节点不是本质的,可以根据需要选择合适的参数定义区间以及节点.为了方便,不妨设

$$t_1 = 0; t_2 = \frac{1}{2}; t_3 = 1,$$

参数定义区间为 $[0,1]$.则圆弧曲线可以表示为

$$w(t) = \frac{(t-1)w_2(w_1-w_3) - (2t-1)w_3(w_1-w_2)}{(t-1)(w_1-w_3) - (2t-1)(w_1-w_2)}, t \in [0,1]. \tag{8}$$

3.3 微分性质

经过简单计算,可得

$$\frac{dw}{dt} = \frac{ad-bc}{(ct+d)^2} = \frac{(t_1-t_2)(w_1-w_2)(t_2-t_3)(w_2-w_3)(t_1-t_3)(w_1-w_3)}{[(t-t_3)(t_1-t_2)(w_1-w_3) - (t-t_2)(t_1-t_3)(w_1-w_2)]^2},$$

所以

$$\frac{dw}{dt} \Big|_{t=t_1} = \frac{t_2-t_3}{(t_1-t_3)(t_1-t_2)} \cdot \frac{(w_1-w_2)(w_1-w_3)}{w_2-w_3};$$

$$\frac{dw}{dt} \Big|_{t=t_3} = \frac{t_1-t_2}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)} \cdot \frac{(w_1-w_3)(w_2-w_3)}{w_1-w_2},$$

如果 $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = 1$, 则

$$w'(0) = -\frac{(w_1-w_2)(w_1-w_3)}{w_2-w_3};$$

$$w'(1) = -\frac{(w_1-w_3)(w_2-w_3)}{w_1-w_2}.$$

4 参数复有理圆弧样条

4.1 构造 C^0 连续的圆弧样条

已知平面上 n 个点 $v_1(x_1, y_1), v_2(x_2, y_2), \dots, v_n(x_n, y_n), n \geq 3$, 将其表示为复数形式 $w_1 = x_1 + iy_1, w_2 = x_2 + iy_2, \dots, w_n = x_n + iy_n$. 定义如下:

$$l_k(t; w_j, w_{j+1}, w_{j+2}) = \frac{(1-t)t_k^* w_{j+1}(w_j - w_{j+2}) + (t-t_k^*) w_{j+2}(w_j - w_{j+1})}{(1-t)t_k^*(w_j - w_{j+2}) + (t-t_k^*)(w_j - w_{j+1})}, \tag{9}$$

其中, $t \in [0,1]$ 是参数; $t_k^* = \frac{l_j v_{j+1}}{l_j v_{j+2}}$ 是区间 $[0,1]$ 内的节点; 下标 $j = 1, 2, \dots, n-2; k = 1, 2, \dots, n_1$.

计算可得 $n = 2n_1 + 1$. 根据定理 2.1, 显然式(9)定义了一条插值于已知 n 个点的参数复有理圆弧样条曲线, 而且由参数复有理圆弧曲线的微分性质不难验证该曲线是 C^0 连续的.

在本文中, 笔者构造了两条 C^0 连续的参数复有理圆弧样条曲线, 如图 1 所示. 在图 1 中, 样条曲线在相邻的连接点处满足 C^0 连续的连接条件, 而且精确插值于给定的型值点. 显然, 如果

使用线性插值方法, 对于给定的 7 个型值点, 必须构造 6 条直线段, 而基于 3 点插值的复有理圆弧样条曲线仅仅只需要构造 3 段圆弧曲线, 而且在除了拼接点处满足 C^0 连续的连接条件外, 圆弧样条曲线在其他点处是 C^∞ 连续的.

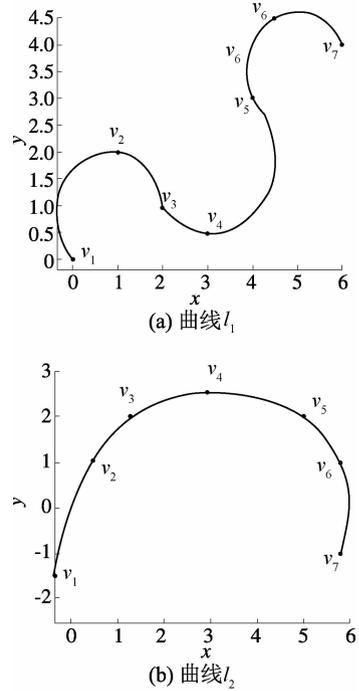


图 1 C^0 连续的圆弧样条

Fig.1 C^0 continuous circular arc representation

4.2 构造 GC^1 连续的圆弧样条

已知平面上 5 个点 $v_j(x_j, y_j) (j = 1, 2, \dots, 5)$, 将其表示为复数形式: $w_j = x_j + iy_j (j = 1, 2, \dots, 5)$, 构造两段圆弧曲线:

$$l_1(t; w_1, w_2, w_3) = \frac{(1-t)t_1^* w_2(w_1-w_3) + (t-t_1^*) w_3(w_1-w_2)}{(1-t)t_1^*(w_1-w_2) + (t-t_1^*)(w_1-w_2)} (t \in [0,1]);$$

$$l_2(t; w_3, w_4, w_5) = \frac{(1-t)t_2^* w_4(w_3-w_5) + (t-t_2^*) w_5(w_3-w_4)}{(1-t)t_2^*(w_3-w_5) + (t-t_2^*)(w_3-w_5)} (t \in [0,1]).$$

其中, $t_1^* = \frac{l_1 v_2}{l_1 v_3}, t_2^* = \frac{l_2 v_4}{l_2 v_5}$. 圆弧曲线 $l_1(t; w_1, w_2, w_3)$ 经过点 v_1, v_2, v_3 , 圆弧曲线 $l_2(t; w_3, w_4, w_5)$ 经过点 v_3, v_4, v_5 . 当且仅当下述条件:

$$\frac{(w_2-w_3)(w_3-w_1)}{(w_1-w_2)} = \alpha \cdot \frac{(w_3-w_4)(w_3-w_5)}{(w_4-w_5)}$$

成立时, 两段圆弧曲线 l_1 和 l_2 在连接点 v_3 处是 GC^1 连续的, 其中, $\alpha \in \mathbb{R}$ 为一任意常数.

已知平面上 n 个点 $v_1(x_1, y_1), v_2(x_2, y_2), \dots, v_n(x_n, y_n), (n \geq 3)$, 将其表示为复数形式 $w_1 = x_1 + iy_1, w_2 = x_2 + iy_2, \dots, w_n = x_n + iy_n$. 类似于前

文中 $C^0 C^0$ 连续的圆弧样条曲线的构造,首先定义下述圆弧曲线.

$$l_k(t; w_j, w_{j+1}, w_{j+2}) = \frac{(1-t)t_k^* w_{j+1}(w_j - w_{j+2}) + (t-t_k^*) w_{j+2}(w_j - w_{j+1})}{(1-t)t_k^* (w_j - w_{j+2}) + (t-t_k^*) (w_j - w_{j+1})}, \quad (10)$$

式中: $t \in [0, 1]$ 是参数; $t_k^* = \frac{l_j v_{j+1}}{l_j v_{j+2}}$ 是区间 $[0, 1]$

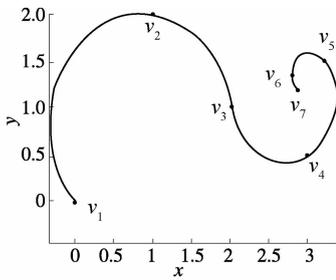
内的节点; 下标 $j = 1, 2, \dots, n-2; k = 1, 2, \dots, n_1$.

若给定的 n 个点满足下述条件:

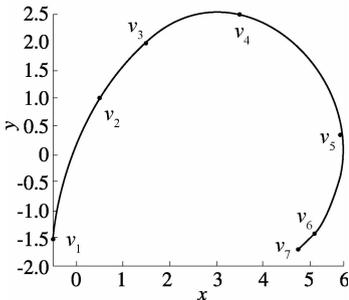
$$\frac{(w_{j+1} - w_{j+2})(w_{j+2} - w_j)}{(w_j - w_{j+1})} = \alpha \cdot \frac{(w_{j+2} - w_{j+3})(w_{j+2} - w_{j+4})}{(w_{j+3} - w_{j+4})}, \quad (11)$$

式中, $\alpha \in \mathbf{R}$ 为一任意常数; $j = 1, 2, \dots, n-4$. 则由式(10)定义的圆弧样条曲线是 GC^1 连续的,且过已知的 n 个点.

图 2 为两条 GC^1 连续的圆弧样条曲线 l_1 和 l_2 . 其中,圆弧样条曲线 l_1 由 3 段圆弧曲线 l_{11} 、 l_{12} 和 l_{13} 组成,对于平面上给定的 7 个型值点 $v_1(-3.5, -1.5)$ 、 $v_2(-2.5, 1)$ 、 $v_3(-1.5, 2)$ 、 $v_4(0.5, 2.5)$ 、 $v_5(2.685 2, 0.348 4)$ 、 $v_6(2.115 6, -1.426 6)$ 、 $v_7(1.772 9, -1.697 2)$,圆弧曲线 l_{11} 插值于 v_1 、 v_2 、 v_3 , 圆弧曲线 l_{12} 插值于 v_3 、 v_4 、 v_5 , 圆弧曲线 l_{13} 插值于 v_5 、 v_6 、 v_7 . 经简单计算可得,圆弧曲线 l_{11} 和 l_{12} 在



(a) 曲线 l_1



(b) 曲线 l_2

图 2 GC^1 连续的圆弧样条

Fig. 2 GC^1 continuous circular arc representation

点 v_3 处为 GC^1 连续,圆弧曲线 l_{12} 和 l_{13} 在点 v_5 处为 GC^1 连续. 如果使用 NURBS 曲线构造 GC^1 连续的圆弧样条曲线 l_1 ,则需要使用 2 次 NURBS 曲线,还必须利用反求矩阵计算 NURBS 曲线的控制顶点和权因子,需要大量的额外运算;而且权因子选择的不同,会影响插值样条曲线的唯一性. 但本文方法只需要把各个型值点转换为复数形式,直接代入样条曲线方程函数即可,简单易行.

5 结束语

笔者利用 Möbius 变换的保交比性质和保圆性质,提出了一种精确定义圆弧曲线的参数复有理函数方法,并基于该方法,研究了具有 C^0 连续和 GC^1 连续性参数的复有理圆弧样条曲线的构造方法. 与目前常用的 NURBS 曲线和 C-curves 曲线方法相比,笔者提出的圆弧曲线表示方法不需要权因子和额外的控制参数,故而简便易行.

参考文献:

[1] 周君,任景刚,廖铃吉,等. 航空发动机壳体 2.5 轴铣削加工刀具优选方法[J]. 航空制造技术,2016(1):143-146.

[2] 陈银清,郑泽钿. 基于 MasterCAM 自由曲面加工刀具路径优化[J]. 现代制造工程,2014(5):46-51.

[3] 吕勇刚,汪国昭,杨勋年,等. 单圆弧样条保形插值算法[J]. 计算机学报,2002,25(5):483-486.

[4] AHLFORS L V. Complex analysis [M]. New York, USA: McGraw-Hill Book Co,1979.

[5] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 [M]. 北京:北京航空航天大学出版社,1994.

[6] 朱晓临. 一种参数有理圆弧样条[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版),2003,26(2):180-184.

[7] YEUNGAND M, WALTON D J. Curve fitting with arc-splines for NC tool path generation [J]. Computer-aided design, 1994, 26(11):845-849.

[8] 王琦,郭非,王启义. 圆弧样条逼近为机械零件几何轮廓的自动编程[J]. 机械工程学报,1998,34(2):20-25.

[9] LI Z, MEEK D S. Smoothing an arc spline [J]. Computers & graphics, 2005, 29(4):576-587.

[10] 齐倩,方美娥. $G2$ 连续的圆弧样条曲线插值[J]. 杭州电子科技大学学报,2012(6):45-48.

- [9] CHOI J W, LEE S C. Antiwindup strategy for PI-Type speed controller[J]. IEEE Trans Ind Electron, 2009 (56): 2039 - 2046.
- [10] 霍海龙. 基于 BiSS 协议的编码器及其在伺服驱动系统中的应用[J]. 电气自动化, 2011, 33(3): 12 - 15.
- [11] 肖鲲, 王莉娜. 基于 FPGA 的 BiSS 协议光电编码器通信模块设计[J]. 电子测量技术, 2008, 31(7): 188 - 191.

Design and Implementation of Motor Servo Control System Based on FPGA

CHANG Yiping, LIU Qin, YANG Lei

(School of Electronic and Information Engineering, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou 450007, China)

Abstract: In order to meet the real-time control requirement of servo system, a dc motor control system based on FPGA was designed. The position and speed controller were realized in the Nios II, and the current loop was executed in FPGA. In order to reduce the torque ripple, an Anti-Windup PI controller was designed. The lead-lag controller was adopted for the position controller. The simulation and experiment result showed that the servo control system had better steady and dynamic performance, which met the requirement of the servo control system.

Key words: FPGA; Anti-Windup; biss; servo control

(上接第 53 页)

Circular Arc Representation Based on Möbius Transformation

REN Liangpin, XUE Junxiao, ZHANG Chaoyang, WANG Dingbiao

(School of Software, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: In CNC machinery, the industrial products and machinery parts are often represented by circular arcs. A new method for representing circular arc based on Möbius transformation was presented in the paper. By constructing the Möbius transformation between a straight line segment and a circular curve segment, the arc curve was expressed as a form of complex rational function, and a complex rational arc spline function was also constructed based on the smooth constraints and the Möbius transformation. The representation had no weight factors or control parameters, and it was geometric and affine invariant. Compared with the classical method for representing circular arc, such as NURBS or C-curves, the presented method was much simpler.

Key words: CNC; circular arc; Möbius transformation