

图 1 实心段抗推刚度计算模式示意图

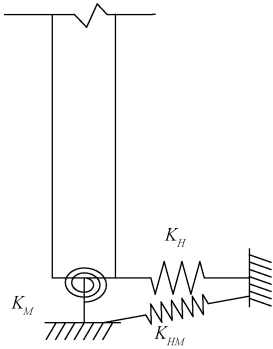


图 2 连接处约束作用示意图

Fig.1 Calculation model schematic diagram of solid sections' anti-pushing rigidity

Fig.2 Schematic diagram of the constraint effect at the junction

$$\Pi_1 = \frac{E_1 I_1}{2} \int_0^{h_1} (y_1')^2 dx - P_1 \Delta_{\max} - q_1 \int_0^{h_1} \Delta(x) dx - Q \mu_1, \quad (2)$$

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_H & \delta_{MH} \\ \delta_{HM} & \delta_M \end{bmatrix}, \text{其中, } \delta_{HM} = \delta_{MH}.$$

求柔度系数矩阵的逆矩阵,可得刚度系数矩阵:

式中, Δ_{\max} 为弯曲变形后墩顶的最大竖向位移; $\Delta(x)$ 是以 Δ_{\max} 为幅值按二次抛物线变化的竖向位移函数; E_1 为实心段墩身弹性模量; I_1 为实心段墩身截面惯性矩.

$$[K] = [\delta]^{-1} = \begin{bmatrix} K_H & K_{MH} \\ K_{HM} & K_M \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta_M \delta_H - \delta_{MH} \delta_{HM}} \begin{bmatrix} \delta_M & -\delta_{HM} \\ -\delta_{MH} & \delta_H \end{bmatrix}.$$

将公式(1)代入总势能公式(2),再由最小势能原理 $\frac{\partial \Pi_1}{\partial \mu_1} = 0$,解得:

高度为 h_2 的空心段桥墩所承受的荷载主要有墩身自重 q_2 , 桥面及挂篮自重及挂篮施工时悬臂端不平衡竖向力和弯矩,将其简化为施加于桥墩墩顶形心处竖向集中力 P_2 和水平推力 F , 如图 3 所示.

$$\mu_1 = \frac{Q}{\frac{h_1 \left[\frac{E_1 I_1}{4} \left(\frac{\pi}{h_1} \right)^4 - \left(P_1 + \frac{q_1 h_1}{3} \right) \left(\frac{\pi}{h_1} \right)^2 \right]}{Q h_1^3} - \left(1.23 \frac{P_1}{h_1} + 0.410 8 q_1 \right) h_1^3}.$$

令 $Q = 1$, 即可得实心段墩身的顺桥向抗推刚度:

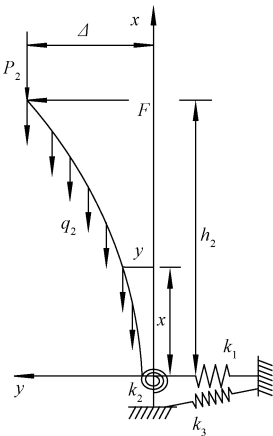


图 3 空心段抗推刚度计算模式示意图

Fig.3 Calculation model schematic diagram of hollow sections' anti-pushing rigidity

$$k_1 = \frac{3.038 E_1 I_1}{h_1^3} - \left(1.23 \frac{P_1}{h_1} + 0.410 8 q_1 \right). \quad (3)$$

1.2 空心段墩身抗推刚度

空心段的墩底和实心段的上部相连接,在连接部位两者有相同的水平位移和转角位移.分析空心段墩身抗推刚度时,可以将连接处的约束作用用弹簧约束刚度来表示,如图 2 所示,其中 K_H 表示平动约束弹簧; K_M 表示转动约束弹簧; K_{HM} 表示平转动耦合约束弹簧^[10-11].

假设在图 2 计算模式下,当空心段顶部作用单位水平力 $H = 1$, 弯矩 $M = 0$ 时,在空心段墩底产生的转角为 δ_{MH} , 水平位移为 δ_H ; 当空心段顶部作用单位弯矩 $M = 1$, 水平力 $H = 0$ 时,在空心段墩底产生的转角为 δ_M , 水平位移为 δ_{HM} , 则可得此模式下约束的柔度系数矩阵,即

假设墩身变形函数为 y_2 , 则墩身自重引起的势能:

$$V_1 = - \frac{1}{2} \int_0^{h_2} q_2 (h_2 - x) (y_2')^2 dx.$$

墩顶竖向集中力引起的势能为:

$$V_2 = - \frac{1}{2} \int_0^h P_2 (y_2')^2 dx;$$

墩顶水平集中力引起的势能为:

$$V_3 = - Fy_2(h_2);$$

结构的应变能为: $U_1 = \frac{1}{2} \int_0^h E_2 I_2 (y_2'')^2 dx,$

式中, E_2 为空心段墩身弹性模量; I_2 为空心段墩身截面惯性矩.

墩底的约束弹簧产生的弹簧势能为:

$$U_2 = \{y_2(0) \quad y_2'(0)\} \begin{bmatrix} K_H & K_{HM} \\ K_{HM} & K_M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{Bmatrix}.$$

则墩的总势能为:

$$\Pi_2 = U_1 + U_2 + V_1 + V_2 + V_3. \tag{4}$$

在弹簧 K_H 、 K_M 、 K_{HM} 约束下,墩身将产生弹性弯曲变形、刚体转动和刚体平移三部分挠度.文献[11]指出墩身的形函数应取墩底固结时的弹性变形与由转动弹簧所产生的刚体转动位移及刚体平动位移之和.此处通过相应的等效,对墩本身的变形函数采用三次多项式表示,而刚体位移则用线函数表示,则墩身变形函数可取:

$$y_2 = \left[\frac{3y_{21}}{h_2^3} \left(\frac{h_2 x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + y_{22} \frac{x}{h_2} + y_{23} \right] \mu_2, \tag{5}$$

其中, $y_{2i}(i = 1, 2, 3)$ 分别表示墩顶在单位水平推力下,墩身弹性弯曲变形、刚体转动和刚体平移所引起的墩顶位移.

$$y_{21} = \frac{h_2^3}{3E_2 I_2}, y_{22} = h_2^2 \delta_M + h_2(-\delta_{HM}), \\ y_{23} = \delta_H + h_2(-\delta_{MH}).$$

当 $x = h_2$ 时,墩顶在单位水平推力下产生的位移 $y_2(h_2) = (y_{21} + y_{22} + y_{23})\mu_2$ [12].

将公式(5)代入总势能公式(4),得

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} (y_{21} + y_{22} + y_{23}) \mu_2^2 - \frac{P_2}{2h_2} \left(\frac{6}{5} y_{21}^2 + 2y_{21}y_{22} + y_{22}^2 \right) \mu_2^2 - \frac{q_2}{4} \left(\frac{3}{4} y_{21}^2 + \frac{3}{2} y_{21}y_{22} + y_{22}^2 \right) \mu_2^2 - F(y_{21} + y_{22} + y_{23}) \mu_2.$$

由最小势能原理 $\frac{\partial \Pi_2}{\partial \mu_2} = 0$, 可得:

$$\mu_2 = [F(y_{21} + y_{22} + y_{23})] / \left[(y_{21} + y_{22} + y_{23}) - \frac{P_2}{h_2} \left(\frac{6}{5} y_{21}^2 + 2y_{21}y_{22} + y_{22}^2 \right) - \frac{q_2}{2} \left(\frac{3}{4} y_{21}^2 + \frac{3}{2} y_{21}y_{22} + y_{22}^2 \right) \right].$$

墩顶在单位水平推力下产生的位移为:

$y_2(h_2) = (y_{21} + y_{22} + y_{23})\mu_2$, 再令 $F = 1$, 即可得空心段墩身的顺桥向抗推刚度:

$$k_2 = \left[(y_{21} + y_{22} + y_{23}) - \frac{P_2}{h_2} \left(\frac{6}{5} y_{21}^2 + 2y_{21}y_{22} + y_{22}^2 \right) - \frac{q_2}{2} \left(\frac{3}{4} y_{21}^2 + \frac{3}{2} y_{21}y_{22} + y_{22}^2 \right) \right] / (y_{21} + y_{22} + y_{23})^2.$$

笔者在分析空心段墩身的顺桥向抗推刚度时,令 $P_2 = 0$, 则

$$k_2 = \frac{3E_2 I_2}{h_2^3 + 3E_2 I_2 (h_2^2 \delta_M - 2h_2 \delta_{HM} + \delta_H)} + \frac{q_2 (3y_{21}^2 + 6y_{21}y_{22} + 8y_{22}^2)}{8 (y_{21} + y_{22} + y_{23})^2}. \tag{6}$$

根据式(3)和式(6),将桥梁计算参数代入公式,使其在空心段和实心段交界处的抗推刚度基本保持相等,就可以计算出实心段墩身的高度 h_1 .

2 算例分析

为验证本文关于空心段墩和实心段墩顺桥向抗推刚度计算公式和本文分析思路的正确性和适用性,下面以两个连续刚构桥梁为例,两个算例为沮河特大桥和柳沟大桥,桥墩类型均为单肢空心薄壁墩.通过式(3)和式(6)来计算实心过渡段的长度,并和工程实例进行对比,各桥计算参数如下. $E_{1,2} = 3.25 \times 10^4$ MPa, $\rho_{1,2} = 25$ kN/m³, 算例 1: $A_1 = 32.5$ m², $A_2 = 12.54$ m², $h_1 = 5$ m, $h_2 = 52$ m, $I_1 = 67.71$ m⁴, $I_2 = 44.06$ m⁴; 算例 2: $A_1 = 34$ m², $A_2 = 11.6$ m², $h_1 = 6$ m, $h_2 = 72$ m, $I_1 = 70.83$ m⁴, $I_2 = 35.35$ m⁴.

下面以算例 1 进行实心过渡段墩身长度的计算分析:将算例 1 的计算参数代入式(3),可得 k_1 和 h_1 的关系如图 4 实线所示.

由式(3)可知,当 $h_1 = 0$ 时, k_1 趋于无穷,可以认为墩底的抗推刚度为无穷大,本文分析时认为承台刚度也为无穷大,这样就可以认为承台和实心段墩底在连接处刚度实现了过渡.从图 4 可以看出随着 h_1 的增大, k_1 在逐渐减小,减小幅度越来越小,根据算例 1 的实桥数据,当 $h_1 = 5$ m 时, $k_1 = 4.91 \times 10^4$ kN/m.

文献[13]规定:当墩顶承受单位横向作用力 $H = 1$ 和单位力矩 $M = 1$ 时,该处水平位移 δ_H 和 δ_{HM} 及转角 δ_M 和 δ_{MH} 可按下列公式计算[14]:

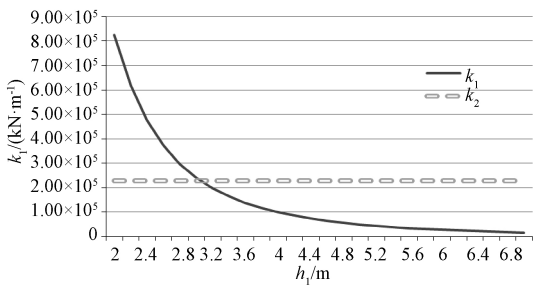


图 4 h_1 与 k_1 的关系示意图

Fig.4 Schematic diagram of the relationship between h_1 and k_1

$$\begin{cases} \delta_H = \frac{1}{\alpha^3 EI} \times \frac{B_2 D_1 - B_1 D_2}{A_2 B_1 - A_1 B_2}; \\ \delta_{HM} = \delta_{MH} = \frac{1}{\alpha^2 EI} \times \frac{A_2 D_1 - A_1 D_2}{A_2 B_1 - A_1 B_2}; \\ \delta_M = \frac{1}{\alpha EI} \times \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_2 B_1 - A_1 B_2}, \end{cases} \quad (7)$$

式中, A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 为系数,在计算 δ_H 、 δ_M 、 δ_{HM} 和 δ_{MH} 时,根据文献[13]第 P.0.8 条查取: α 为变形系数,经计算 $\alpha = 0.188$ 。

文献[13]的系数取值是针对当桩基嵌固在基岩中,而文中的 K_H 、 K_M 、 K_{HM} 是将空心段的墩底和实心段的上部连接部位进行了弹簧转变模拟.根据文献[13]的规定和边界模拟可得系数的取值如下: $A_1 = 0.999\ 74$, $A_2 = -0.002\ 6$, $B_1 = 0.499\ 96$, $B_2 = 0.999\ 48$, $C_1 = 0.125$, $C_2 = 0.499\ 94$, $D_1 = 0.020\ 83$, $D_2 = 0.124\ 99$.将数据代入式(7),可得: $\delta_H = 4.38 \times 10^{-9}$, $\delta_{HM} = \delta_{MH} = 1.86 \times 10^{-9}$, $\delta_M = 2.47 \times 10^{-9}$, 然后令 $h_2 = 0$ 时, $k_2 = 2.28 \times 10^5$ kN/m, 为了保证实心段和空心段的刚度实现过渡,令 $k_1 = k_2$, 如图 4 中虚线所示,交点处对应的横坐标为 $h_1 = 3.05$ m.

同理对算例 2 分析,并将最后的分析结果和实桥数据进行对比,对比结果见表 1.

表 1 实心段长度分析结果对比

Tab.1 Comparison of the analytical results			
算例	计算长度/m	实桥长度/m	误差/%
算例 1	3.05	5.00	39
算例 2	4.12	6.00	31

注:误差=本文计算值和实桥数据差的绝对值/实桥数据.

由表 1 对比结果可知,依据本文计算原理推导出来的实心段计算长度和实桥数据的误差分别为 39%和 31%,误差较大的原因是工程实际中一般都是将实心段过渡长度选取的稍微偏大以方便施工及施工存在一定的偏差;同时结果也满足

《云南省高速公路连续刚构桥梁关键技术指南》的取值范围规定,这说明本文计算原理和分析过程的正确性.

为了得出单肢空心薄壁墩墩底实心段计算长度的取值范围,通过 Midas Civil 软件对上述两个算例进行有限元分析.分析时保持桥墩高度不变,改变实心段的长度来验算空心段墩和实心段墩交接处的应力,计算对比结果见表 2.

表 2 交接部位应力对比结果

Tab.2 Transition section stress comparison results					
实心段 长度/m	交接处应力比值		实心段 长度/m	交接处应力比值	
	算例 1	算例 2		算例 1	算例 2
2.0	0.86	0.87	5.0	1.00	0.97
2.5	0.89	0.87	5.5	0.99	0.98
3.0	0.93	0.87	6.0	0.96	1.00
3.5	0.93	0.93	6.5	0.95	0.98
4.0	0.95	0.95	7.0	0.92	0.94
4.5	0.97	0.95	7.5	0.89	0.91

注:表中数据为不同实心段取值长度与实桥实心段计算长度在交接处的应力比值.

由表 2 对比结果可得,实心段计算长度取不同值时,空心段和实心段交接部位的应力变化幅度不大,根据统计整理的国内外近百座连续刚构桥的单肢空心薄壁墩的实心段过渡长度数据^[1],可以得出目前大部分墩底实心段计算长度的取值范围为 3~6 m,因此根据本文的分析统计结果及已有的规定可以建议将墩底实心段计算长度取值范围 3~6 m 写入规范中,具体设计参考时可以上下稍微浮动.同时分析结果也证明了在空心段的墩底和实心段的上部相连接处采用平动约束、转动约束和平转动耦合约束弹簧来模拟连接处的约束作用是可行的.综上所述,笔者推导出的墩底实心段计算长度可以指导大跨连续刚构桥的设计及施工.

3 结论

- (1)本文的计算原理和单肢空心薄壁墩墩底实心段计算长度的公式是正确的,对大跨连续刚构桥的设计及施工具有指导意义;
- (2)在计算墩底实心段计算长度时,将空心段和实心段连接处用平动约束、转动约束和平转动耦合约束弹簧来模拟相互之间约束作用是可行的;
- (3)建议将单肢空心薄壁墩墩底实心段计算长度取值范围 3~6 m 写入规范中来指导高墩的设计,具体设计参考时可以上下稍微浮动.

参考文献：

[1] 李艺林, 杨秀荣, 刘英. 连续刚构桥高跨比参数线性关系分析[J]. 河南城建学院学报, 2016, 25(6): 26-30.

[2] 李杰, 陈彬. 连续刚构桥顶推力计算与优化分析[J]. 郑州大学学报(工学版), 2013, 34(6): 85-89.

[3] KHODAIR A, HASSIOTI S. Rigidity of abutments in integral abutment bridges[J]. Structure and infrastructure engineering, 2013, 9(2): 151-160.

[4] 孙立刚. 柔性墩墩顶抗推刚度的计算[J]. 北方交通, 2012(2): 82-84.

[5] 张永水, 曹淑上. 连续刚构桥薄壁墩抗推刚度计算方法研究[J]. 中外公路, 2006, 26(3): 144-147.

[6] 刘志峰, 孙学先, 杨霞林. 考虑地基变形影响的高墩柱抗推刚度的解析方法[J]. 水利与建筑工程学报, 2007, 5(4): 63-66.

[7] 陈竹昌, 刘利民, 王建华. 承台刚度的研究[J]. 同济大学学报, 1999, 27(1): 29-33.

[8] 卢建峰, 蒋永生, 梁书亭. 依据刚性要求确定承台厚度[J]. 建筑结构, 2011, 41(增刊): 375-377.

[9] 王新玲, 杜琳, 黄伟东. 混合配筋预应力混凝土管桩抗弯刚度模型研究[J]. 郑州大学学报(工学版), 2013, 34(6): 80-84.

[10] 邬晓光, 李艺林, 贺攀, 等. 基于能量法分析大跨连续刚构桥高墩稳定性[J]. 铁道科学与工程学报, 2017, 14(2): 290-295.

[11] 邬晓光, 李艺林, 何启龙, 等. 基于频率合成法分析大跨连续刚构桥高墩横向振动基频[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2017, 48(2): 213-218.

[12] 白青侠, 宋一凡. 高桥墩几何非线性的能量法[J]. 西安公路交通大学学报, 2001, 21(2): 50-52.

[13] 中交公路规划设计院有限公司. 公路桥涵地基与基础设计规范: JTG/D 63—2007[S]. 北京: 人民交通出版社, 2007.

[14] 宁明哲, 李德建, 邹振兴. 变截面双肢薄壁高墩基础约束刚度动力识别方法[J]. 铁道科学与工程学报, 2013, 10(6): 74-78.

Solid Sections’ Calculation Length Analysis of Continuous Rigid Frame Bridge
Hollow Single Thin-walled Pier

LI Yilin, HUANG Xuqin, WU Xiaoguang

(Key Laboratory for Bridge and Tunnel of Shaanxi Province, Chang’an University, Xi’an 710064, China)

Abstract: Hollow thin-walled piers were widely used in continuous rigid frame bridges with high piers mostly use, and the bottom of the piers should have appropriate solid sections in order to ensure the stiffness transition of the cap and thin-wall pier. At present, there was no literature on the design length of solid section, and the design was based on engineering experiences to select, which had great limitations. In this paper, the transfer length of the solid section was firstly analyzed by calculating the anti-push rigidity of bridge in axial direction of the single thin-wall pier in the hollow section; The solid section, and the constraint effect at the connection point between the hollow section and the solid section was simulated by exerting the translational constraint, the rotational constraint and the flat rotation coupling constraint springs. Finally, engineering examples were given to verify the correctness and applicability of the analysis thought and derivation process. The findings suggested that the solid section at the bottom of the piers’ calculation length range could take 3-6 m, and could be written into the specification to guide the design and construction of the high piers.

Key words: continuous rigid frame bridge; hollow thin walled pier; stiffness transition; anti push rigidity; calculation length