

水工钢筋混凝土构件截面抵抗矩 塑性系数的计算

水利系 丁自强*

提 要

本文阐述了影响钢筋混凝土构件截面抵抗矩塑性系数的各种因素,介绍了有关规范对塑性系数的规定,推导了水工钢筋混凝土构件截面抵抗矩塑性系数的计算公式,对常用截面塑性系数的取值提出了建议,在分析试验资料的基础上给出了塑性系数的高度修正系数。

一、引 言

在钢筋混凝土构件正截面抗裂度计算中,为了要计算抗裂内力,可以以裂缝即将出现瞬间的应力应变阶段为依据进行计算。众所周知,裂缝即将出现时受拉区混凝土呈现明显的塑性特征,应力分布图形为曲线型,最大应力达到混凝土的抗拉强度 R_t ; 受压区混凝土的应力分布一般接近于弹性分布,应力图形为三角形。如图1a,其抗裂弯矩的计算式可表示为:

$$M_f = R_t W_s \dots\dots\dots (1)$$

式中 M_f ——正截面抗裂弯矩;
 R_t ——混凝土的抗拉强度;

W_s ——考虑塑性变形影响后构件截面对受拉边缘的弹塑性抵抗矩。当截面应力或应变分布取定后, W_s 只与截面的几何量有关。

按式(1)计算 M_f 时,即使对应力分布作了简化假定,其计算仍然是繁琐的。为了使计算简便,应用比较广泛的方法是按照等效原则换算成材料力学方法进行计算。即在承受与式(1)相同的 M_f 的情况下,应力分布假定为直线分布(图1b),此时受拉边缘的应力假定为 R_t 乘一个系数 γ ,则 M_f 的计算公式为:

$$M_f = \gamma R_t W_0 \dots\dots\dots (2)$$

式中 W_0 ——构件截面对受拉边缘的弹性抵抗矩。

- * 曾参加本文内容部分工作的还有水电西北勘测设计院的甘维义、王玉书等同志。本文研究的主要成果,已被原水电部“水工钢筋混凝土结构设计规范(SDJ20—78)”所采纳,并被编入有关教材。

由于式(1)与式(2)的 M_f 相等,则

$$\gamma = \frac{W_s}{W_o} \dots \dots \dots (3)$$

由式(3)可知, γ 为弹塑性抵抗矩 W_s 与弹性抵抗矩 W_o 之比,可称为截面抵抗矩的塑性系数,或截面抵抗矩的塑性影响系数,或抗裂度塑性系数(以下简称“塑性系数”)。当截面应力为完全弹性分布时, $W_s=W_o$,故 γ 的最小值应该是1.0,一般均应大于1.0。

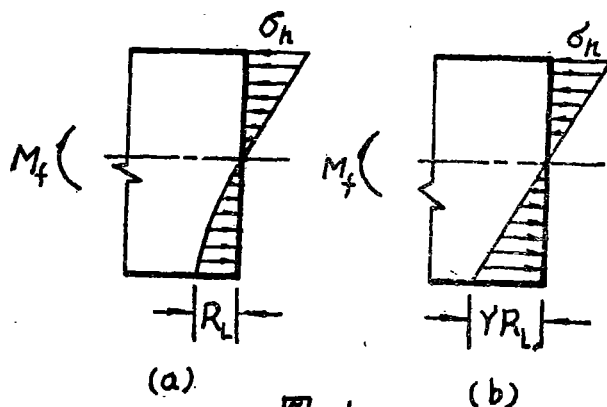


图 1

对于混凝土和少筋混凝土结构的强度计算,情况相似,引入塑性系数 γ 后用材料力学方法作强度计算也很简便。

原水电部1965年试行的“水工建筑物混凝土及钢筋混凝土结构设计规范”〔2〕规定的塑性系数计算方法,有其一定的优点。例如,裂缝出现时正截面应力图形的受拉区取为梯形,比较符合尺寸较大的构件的实际等。但是,也还存在一些问题。例如:除对矩形截面给出了 γ 的具体数值外,其他型式截面的 γ 只给出了计算公式,由于 γ 计算要牵涉到 W_s 等的计算,过程比较烦琐,将给应用带来不便;经检查,公式本身还存在一些错误;同时,塑性系数计算没有考虑截面高度的影响,这对于截面较高的水工结构来说,是一个颇有影响而需要考虑的问题。 γ 值不考虑截面高度影响,对水工钢筋混凝土结构的抗裂度计算来说,有时会不反映构件真正的抗裂安全度:对截面高的构件其抗裂安全度可能不够,对截面低的构件可能偏于安全。同样,对混凝土及少筋混凝土结构的强度计算,其安全度也可能存在类似的问题。

为了改进抗裂度计算方法,不少单位和学者曾进行过试验和理论研究,提出了自己的见解和计算方法。近几年来,原水电部还曾专门委托水电四局设计研究院进行了大截面构件的抗裂试验,取得了一定的成果。其截面高度最大为2米。交通部在裕溪口的大截面梁试验中,也曾对有关抗裂的内容进行了量测和分析。由于这些试验研究成果,使得我们能对塑性系数的计算作一些进一步的分析和建议,供修订水工钢筋混凝土结构设计规范时参考。

二、影响截面抵抗矩塑性系数的因素及其研究简况

截面抵抗矩塑性系数的计算实质上就是钢筋混凝土构件的抗裂计算问题。根据试验和理

论研究,其影响因素主要为以下几个方面:计算所取的应力图形,构件截面形状、尺寸和高度,配筋对混凝土极限引伸值的影响,截面的受力性质,混凝土的标号,混凝土骨料的性质、组成、养护情况,试验方法以及混凝土的收缩和徐变等。

1、计算所取应力图形

应用式(1)直接利用图1a的受拉区曲线形应力图形计算〔3〕抗裂的极少,因为其计算过程过于烦琐。所以,一般的做法是将曲线型应力图形简化为如图2所示的几种应力图形进行计算。

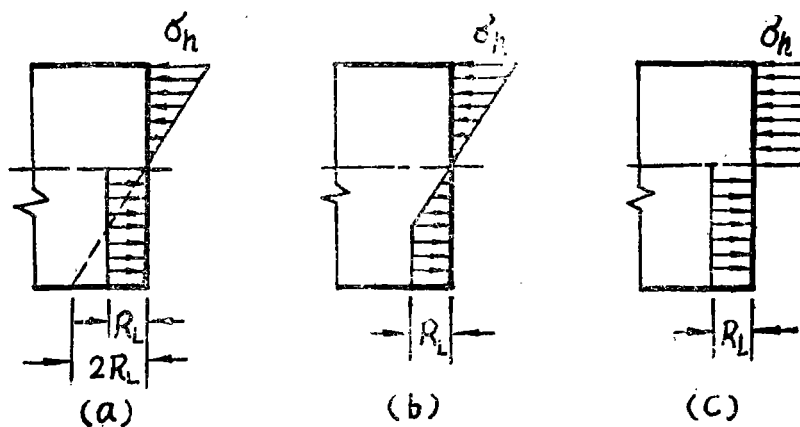


图2

我国建委规范〔4〕和苏联规范〔5〕采用图2a的应力图形,假定混凝土受拉区的塑化高度已发展到中和轴,应力分布为矩形;受压区仍为弹性分布,应力图形为三角形。试验研究表明,受拉区应力图形的这种假定,对于截面高度小的构件,十分接近,但对截面高度大的构件,所得 γ 值偏大。

规范〔6〕、〔7〕采用图2c的应力图形,假定混凝土受压区和受拉区都已充分塑化。试验研究表明,受压区的完全塑化与实际不符。

规范〔2〕采用图2b的应力图形,受拉区为梯形,塑化高度为受拉区高度的二分之一,受压区为三角形。这种图形比较符合实际。实际上,塑化高度应为随截面高度而变的函数,但这样做会使计算复杂化。

在偏心受压和预应力受弯构件中,由于受压区受力较大,文献〔14〕、〔15〕建议受压区应力图形应考虑混凝土的塑性,采用曲线形应力图形,或者将计算的弹性核心距予以降低。

2、截面形状、尺寸和高度

由式(3)知,塑性系数为两种不同应力图形时截面受拉边缘抵抗矩之比,由于截面抵抗矩为截面有关几何量的函数,自然,不同形状不同尺寸的截面就会有不同的抵抗矩,因此, γ 计算已经计入了截面形状和尺寸的影响。除此以外,截面高度的绝对尺寸很有影响;截面愈高,塑性系数愈小。对于产生这一现象的原因,国内外学者的解释不一。大连工学院

赵国藩从正截面受拉区应变梯度对受拉区塑化能力的影响〔8〕,马利佐夫用微裂缝尖端应力集中理论〔17〕,齐斯克烈里和列希斯基用混凝土的气孔和初始微裂缝有较多的可能在大尺寸构件中形成的论点〔18〕,从各个角度进行了阐述。但是,不管对产生这种现象的原因的解释如何不同,但都承认 γ 是随截面高度的增加而减小的。

对于 γ 和截面高度 h 的关系,赵国藩提出过完整的计算方法和公式〔8〕,对矩形截面受弯构件

$$\gamma = 3 - \frac{\sqrt{h(h+60)} - h}{15} \dots\dots\dots (4)$$

根据大截面钢筋混凝土矩形梁的试验研究结果,文献〔19〕提出了如下计算公式:

$$\gamma = 1.2 + \frac{50}{(h+30)^{2/3}} \dots\dots\dots (5)$$

式中 h 以厘米计,当 $h > 80$ 厘米时,一律取 $\gamma = 1.22$ 。

文献〔21〕提出的计算式为

$$\gamma = 1.2 + \frac{7}{h} + \frac{10}{h^2} \dots\dots\dots (6)$$

当 $h \geq 150$ 厘米时,取 $h = 150$ 厘米;当 $h \leq 10$ 厘米时,取 $h = 10$ 厘米。为了便于实用,若不用式(6),则建议对 γ 值乘以高度修正系数 C_h ,如表1

文献〔21〕建议的 C_h 值表

表1

截面高度 (厘米)	≤ 20	30	50	100	≥ 150
混凝土及少筋混凝土	1.05	1.00	0.90	0.85	0.80
钢筋混凝土	1.10	1.05	0.95	0.90	0.85

马利佐夫的计算式为〔17〕:

$$\gamma = 1 + \frac{13.4}{h} \dots\dots\dots (7)$$

3、配筋率

混凝土内配置钢筋后能否提高混凝土的极限引伸值,是钢筋混凝土学科内争论已久但未取得一致意见的问题。一种意见认为,混凝土的极限引伸值与配筋无关;另一种意见则认为配筋可提高混凝土的极限引伸值,能增强塑化能力,它与配筋率、配筋的分散程度以及钢筋直径有关,并提出了考虑这些因素的 γ 计算公式。〔8〕〔23〕〔24〕〔25〕

不能取得一致意见的困难在于问题的复杂性。如出现裂缝的准则,是“微观裂缝”,还是“开裂裂缝”?是受荷产生的裂缝还是温度收缩产生的裂缝?这些与试验方法、施工及养护条件等有关。

鉴于以往发现裂缝的试验手段,主要是目测(借助于放大镜),其发现时的裂缝宽度达0.005毫米以上,已经不是“微观裂缝”了。另一方面,只有裂缝宽度大于上述尺寸才可能构成对钢筋混凝土结构耐久性的威胁,而所谓抗裂计算实际上也只能是限制某种裂缝的计算,因此,在 γ 计算中应以考虑配筋的影响为宜。附表2所列的试验资料,其试验所得的塑

性系数 γ^S ，当配筋率较大时其值都较大，也是由于这个原因。

但是，对于要求抗裂的水工钢筋混凝土结构来说，其配筋率都比较低，一般小于0.5%，由此而产生的对塑性系数提高的有利影响也很小。根据文献〔21〕的分析，配筋对钢筋混凝土塑性系数的提高约比混凝土的塑性系数增加0.05，如表1。由于这一原因，在水工钢筋混凝土结构设计中目前暂不计入配筋对 γ 的影响也是适宜的。

4、截面的受力性质

截面上同时作用有纵向力时， γ 值将随纵向力的变化而变化。对轴心受拉构件，裂缝出现时混凝土的强度为 R_L ，均匀分布，相当于取 $\gamma=1.0$ ；对偏心受拉构件， γ 偏拉应大于1.0而小于受弯构件的 γ 弯，即在轴拉与受弯之间变化；对偏心受压构件， γ 偏拉将大于 γ 弯。图3表示的就是 γ 的这种变化图形〔26〕。

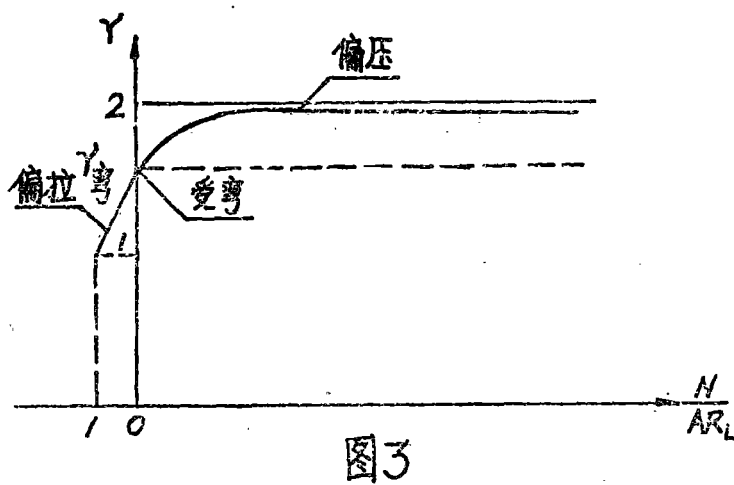


图3

若偏心受拉构件的 γ 偏拉从 γ 弯至 $\gamma=1$ （轴拉）之间近似地按直线变化，则 γ 偏拉可表示为〔4〕：

$$\gamma_{\text{偏拉}} = \gamma_{\text{弯}} - (\gamma_{\text{弯}} - 1) \frac{N_f}{AR_L} \quad \dots\dots\dots (8)$$

式中 N_f ——抗裂纵向力；
 A ——构件截面面积。

偏心受拉构件的抗裂计算公式为：

$$\frac{N_f e_0}{W_0} + \frac{N_f}{A} \leq \gamma_{\text{偏拉}} R_L$$

将式（8）的 γ 偏拉值代入上代，则

$$\frac{N_f e_0}{W_0} + \gamma_{\text{弯}} \frac{N_f}{A} \leq \gamma_{\text{弯}} R_L \quad \dots\dots\dots (9)$$

式中 e_0 ——偏心距。

以上说明,若假定 γ 偏拉在受弯与轴拉的塑性系数之间为直线变化,则可直接用受弯构件的塑性系数代入式(9)作抗裂计算,而不必单独求 γ 偏拉。

对于大偏心受压构件,规范〔4〕、〔6〕、〔7〕均偏安全地取用受弯构件的塑性系数。

5、混凝土的标号

一些研究者认为, γ 与混凝土的标号有关。根据文献〔21〕的分析,混凝土的标号越高,其极限引伸值越大,受拉区的塑化高度增加,其 γ 与混凝土标号 R 的关系如图4的线1。综合文献〔27〕、〔28〕的试验资料,其关系如线2,也是类似的关系。文献〔23〕和波兰的表达式分别为:

$$\gamma = 1.67 + \frac{5}{R_t} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\gamma = 2.1 - 0.2 \frac{R}{100} \quad \dots\dots\dots (11)$$

以图表示如图4的线3和线4,其变化的趋势则与线1、2相反,可以得出完全不同的结论。因此,在 γ 计算中以暂不考虑混凝土标号的影响为宜。

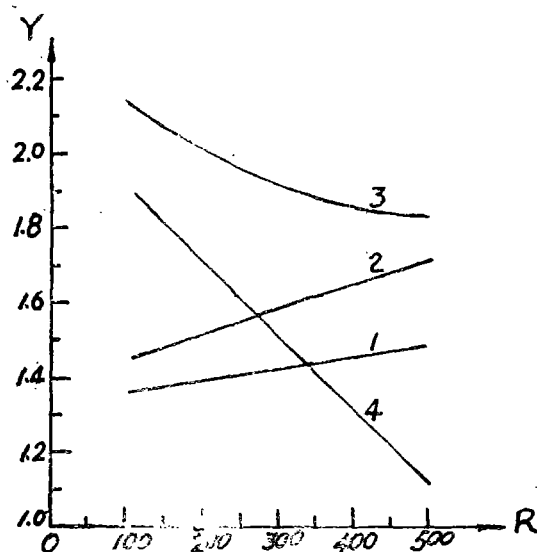


图4

对于塑性系数的规定,不同规范的规定不尽相同。

1、建委规范〔4〕(TJ10-74)和苏联规范〔5〕(СНП II-21-75)

钢筋混凝土和混凝土构件: $\gamma = \gamma_{\text{弯}}$ 。例如矩形截面, $\gamma = 1.75$ 。

预应力混凝土构件:受弯及偏压构件, $\gamma = \gamma_{\text{弯}}$,轴拉构件, $\gamma = 1.0$;偏拉构件,当 $\sigma_{\text{hp}} \leq 0$ 时, $\gamma = \gamma_{\text{弯}}$, $\sigma_{\text{hp}} > 0$ 时,按式(8)的方法计算。在此, σ_{hp} 为抗裂计算时截面上混凝土的平均应力。

2、交通部规范〔6〕(Q/(交)HS001-64)

矩形截面:

当 $h \leq 15$ 厘米时, $\gamma = 2.0$;

$h \geq 25$ 厘米时, $\gamma = 1.5$;

$15 < h < 25$ 厘米时, 用内插法确定。

其他形状截面:

$$\gamma = \frac{S_{\text{上}} + S_{\text{下}}}{W_0} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式中 $S_{\text{上}}$ 、 $S_{\text{下}}$ ——截面重心轴的上半部和下半部分对重心轴的面积矩。

3、铁路桥规〔7〕

对轴拉、小偏压和小偏拉构件, $\gamma = 1.0$; 对受弯、大偏压和大偏拉构件,

$$\gamma = \frac{2S_{\text{下}}}{W_0} \quad \dots\dots\dots (13)$$

4、苏联水工规范〔22〕(СНП-56-77)

塑性系数要考虑截面高度的影响。

$$\gamma_h = C_h \gamma \quad \dots\dots\dots (14)$$

式中 γ_h ——考虑高度影响的塑性系数。

C_h ——高度修正系数:

当 $h \leq 100$ 厘米时, $C_h = 1.0$;

当 $h > 100$ 厘米时, $C_h = 0.9 + \frac{10}{h}$ 。

h 的单位为厘米。

γ 的数值按规范 СНП II-21-75 取用。

5、西德规范〔29〕(DIN1045, 1972)

西德抗裂计算的方法和我国有所不同, 经换算, 其 γ 值随高度变化有如表 2 所示的关系:

表 2

截面高度(厘米)	≤ 10	20	40	≥ 60
γ	2.0	1.54	1.25	1.11

6、规范〔2〕(水工试行本)

规范〔2〕按所取的应力图形(图 2b)给出了塑性系数的计算公式。对矩形截面, $\gamma = 1.54$, 受弯、偏拉、偏压构件均取同一数值。

综合以上所述可知, 影响塑性系数的原因甚多, 情况也比较复杂, 对各种因素的研究, 其成熟程度也不相同。目前, 建议按以下意见来计算塑性系数。

(1)、规范〔2〕所采用的受拉区为梯形的应力图形(图 2b)是比较接近实际的, 建议仍按此计算 γ 的基本值, 而截面高度对塑性系数的影响, 建议用另一高度修正系数 C_h 来考

虑。

(2)、对于不同受力性质的构件,均取与受弯构件相同的塑性系数(粘拉为1.0,不在此列)。这对偏压构件是偏于安全的,对于偏拉构件,根据前述的式(9)计算,也相当于考虑了偏心对塑性系数的影响。

(3)、配筋与混凝土标号对塑性系数的影响,建议暂不计入,待有更多的试验研究后再予考虑。需要重复指出的是,对要求抗裂的低配筋的水工钢筋混凝土构件来说,配筋对 γ 的影响可以忽略不计。

(4)、对于常用截面的塑性系数,建议分类计算后用表格形式列入规范,以便设计者查用。对于比较特殊的截面,则仍须按公式进行计算。下面我们对 γ 计算公式进行推导,对常用截面的 γ 值计算分类归挡,并以圆形和环形截面为例介绍 γ 值的取值方法。

三、塑性系数的计算公式及其取值

(一)、塑性系数计算公式

如前所述,塑性系数的计算公式为

$$\gamma = \frac{W_s}{W_0} \dots\dots\dots (3)$$

式中 W_0 按材料力学方法计算,兹不赘述。以下仅就 W_s 的计算方法进行叙述。

1、基本假定

假定裂缝出现瞬间的应力图形如图5,受拉区为梯形,其塑化高度为受拉区高度的二分之一,受拉边缘应力达到 R_t ;受压区应力图形为三角形,受压区和受拉区上半部的应力梯度相同。

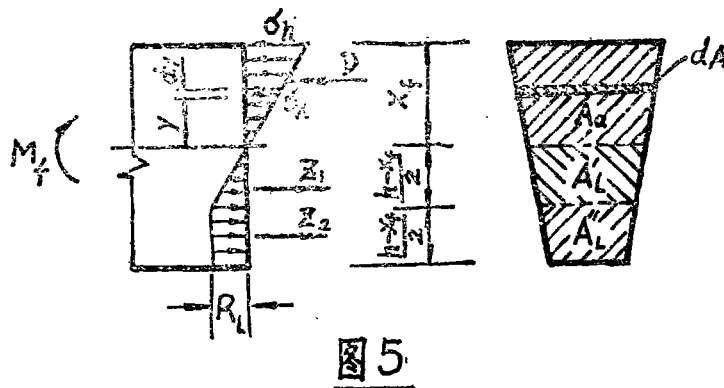


图5

2、 W_s 的计算

如图5,设受压区距中和轴 y 处的应力为 σ_x ,则

$$\sigma_x = \frac{2}{h - x_f} y R_t$$

受压区合力对中和轴的力矩 M_a 为

$$M_a = \int_{A_a} \frac{2 R_t}{h-X_f} y^2 dA = \frac{2 R_t}{h-X_f} \int_{A_a} y^2 dA = \frac{2 R_t}{h-X_f} J_a$$

同理, 受拉区上半部合力对中和轴的力矩 $M_{l'}$ 为

$$M_{l'} = \int_{A_{l'}} \frac{2 R_t}{h-X_f} y^2 dA = \frac{2 R_t}{h-X_f} \int_{A_{l'}} y^2 dA = \frac{2 R_t}{h-X_f} J_{l'}$$

受拉区下半部合力对中和轴的力矩 $M_{l''}$ 为

$$M_{l''} = \int_{A_{l''}} R_t y dA = R_t \int_{A_{l''}} y dA = R_t S_{l''}$$

根据静力平衡条件

$$M_f = M_a + M_{l'} + M_{l''} = R_t \left(\frac{2}{h-X_f} J_a + \frac{2}{h-X_f} J_{l'} + S_{l''} \right)$$

根据式 (1), 则

$$W_s = \frac{2}{h-X_f} J_a + \frac{2}{h-X_f} J_{l'} + S_{l''} \dots\dots\dots (15)$$

式中 X_f ——按弹塑性计算时的截面受压区高度, 其计算详后;

J_a ——截面受压区对中和轴的惯性矩;

$J_{l'}$ ——受拉区上半部面积对中和轴的惯性矩;

$S_{l''}$ ——受拉区下半部面积对中和轴的面积矩;

A_a ——受压区面积;

$A_{l'}$ ——受拉区上半部面积;

$A_{l''}$ ——受拉区下半部面积。

3、 X_f 的计算

受压区合力 D 为

$$D = \int_{A_a} \frac{2 R_t}{h-X_f} y dA = \frac{2 R_t}{h-X_f} \int_{A_a} y dA = \frac{2 R_t}{h-X_f} S_a$$

受拉区上半部合力 Z_1 和下半部合力 Z_2 分别为:

$$Z_1 = \int_{A_{l'}} \frac{2 R_t y}{h-X_f} dA = \frac{2 R_t}{h-X_f} \int_{A_{l'}} y dA = \frac{2 R_t}{h-X_f} S_{l'}$$

$$Z_2 = \int_{A_{l''}} R_t dA = R_t \int_{A_{l''}} dA = R_t A_{l''}$$

根据静力平衡条件, $D = Z_1 + Z_2$, 则

$$\frac{2 R_t}{h-X_f} S_a = \frac{2 R_t}{h-X_f} S_{l'} + R_t A_{l''}$$

$$\therefore \frac{2}{h-X_f} S_a = \frac{2}{h-X_f} S_{l'} + A_{l''} \dots\dots\dots (16)$$

式中 S_a ——受压区面积对中和轴的面积矩;

$S_{l'}$ ——受拉区上半部面积对中和轴的面积矩。

计算塑性系数的步骤是:

(1)、利用式(16),解此方程得 X_f ;

(2)、用 X_f 分别求出截面的 J_a 、 J_l' 和 S_l'' 之值代入式(15),得 W_s ;

(3)、用材料力学方法求得 W_o ;

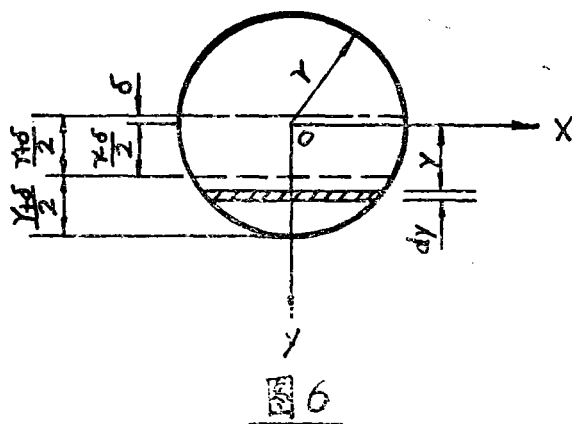
(4)、将 W_s 与 W_o 之值代入式(3),得 γ 。

(二)、矩形、T形、工形和倒T形截面塑性系数的计算及取值

对矩形、T形、工形和倒T形这类常见截面,按上述步骤和式(3)、(15)、(16),并参照文献[8]的图表,得出各种特征尺寸情况的 γ 值,如附表1。为了便于应用起见,对于数值相近的值,按0.05的差值分挡并作归纳,如表4的第1项至第4项。至于圆形和环形截面,其计算要复杂一些,故下面以这两种截面为例说明 γ 的计算过程。

(三)、圆形和环形截面塑性系数的计算及取值

1、圆形截面(图6)



(1)、受压区高度 X_f

设圆的半径为 r ,受压区高度为 $r-\delta$,则受拉区高度的一半为 $\frac{r+\delta}{2}$ 。取微分面积

$$dA = 2x dy = 2\sqrt{r^2 - y^2} dy$$

$$A_l'' = 2 \int_{\frac{r-\delta}{2}}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{r-\delta}{2} \sqrt{r^2 - \left(\frac{r-\delta}{2}\right)^2} - r^2 \arcsin \frac{r-\delta}{2r}$$

$$S_l' = 2 \int_{-\delta}^{\frac{r-\delta}{2}} (y+\delta) \sqrt{r^2 - y^2} dy = 2 \left\{ -\frac{[r^2 - (\frac{r-\delta}{2})^2]^{3/2}}{3} + \frac{(r^2 - \delta^2)^{3/2}}{3} + \delta \left[\frac{r-\delta}{4} \sqrt{r^2 - \left(\frac{r-\delta}{2}\right)^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{r-\delta}{2r} \right] + \frac{\delta}{2} \sqrt{r^2 - \delta^2} - \frac{r^2}{2} \arcsin \left(\frac{-\delta}{r} \right) \right\}$$

$$S_a = 2 \int_{\delta}^r (y - \delta) \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} (r^2 - \delta^2)^{3/2} - \delta \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{\delta}{2} \sqrt{r^2 - \delta^2} - \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{\delta}{r} \right) \right]$$

将 A_l'' 、 S_l' 、 S_a 之值代入式 (16)，得

$$\frac{1}{2} (r + \delta) \left[\frac{\pi r^2}{2} - \frac{r - \delta}{2} \sqrt{r^2 - \left(\frac{r - \delta}{2}\right)^2} - r^2 \arcsin \frac{r - \delta}{2r} \right] = \left[r^2 - \left(\frac{r - \delta}{2}\right)^2 \right]^{3/2}$$

$$- \frac{1}{2} \delta (r - \delta) \sqrt{r^2 - \left(\frac{r - \delta}{2}\right)^2} - r^2 \delta \arcsin \frac{r - \delta}{2r} - \frac{1}{2} \pi r^2 \delta$$

利用试算法，解得此方程的 δ 为

$$\delta = 0.045r$$

即 $X_f = 0.955r$

(2)、 W_s 计算

由 $\delta = 0.045r$ 知：

受拉区高度 $r + \delta = 1.045r$

受拉区高度的 $\frac{1}{2}$ $\frac{r + \delta}{2} = 0.5225r$

$$\text{而 } \frac{r - \delta}{2} = 0.4775r$$

$$J_a = 2 \int_{0.045r}^r (y - \delta)^2 \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

$$= 2 \left[\frac{y}{8} (2y^2 - r^2) \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^4}{8} \arcsin \frac{y}{r} + \frac{2}{3} \delta (r^2 - y^2)^{3/2} \right.$$

$$\left. + \frac{\delta^2}{2} (y \sqrt{r^2 - y^2} + r^2 \arcsin \frac{y}{r}) \right]_{0.045r}^r = 0.3358r^4$$

$$J_l' = 2 \int_{-0.045r}^{0.4775r} (y + \delta)^2 \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

$$= 2 \left[\frac{y}{8} (2y^2 - r^2) \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^4}{8} \arcsin \frac{y}{r} - \frac{2}{3} \delta (r^2 - y^2)^{3/2} \right.$$

$$\left. + \frac{\delta^2}{2} (y \sqrt{r^2 - y^2} + r^2 \arcsin \frac{y}{r}) \right]_{-0.045r}^{0.4775r} = 0.0886r^4$$

$$S_l'' = 2 \int_{0.4775r}^r (y + \delta) \sqrt{r^2 - y^2} dy = 2 \left[-\frac{(r^2 - y^2)^{3/2}}{3} \right.$$

$$\left. + \frac{\delta}{2} (y \sqrt{r^2 - y^2} + r^2 \arcsin \frac{y}{r}) \right]_{0.4775r}^r = 0.4816r^3$$

将 J_a 、 J_l' 与 S_l'' 之值代入式 (15), 得

$$W_s = \frac{2}{1.045r} \times 0.3358r^4 + \frac{2}{1.045r} \times 0.0886r^4 + 0.4816r^3 = 1.294r^3$$

$$W_o = \frac{1}{4}\pi r^3$$

$$\therefore \gamma = \frac{W_s}{W_o} = \frac{1.294r^3}{\frac{1}{4}\pi r^3} = 1.65$$

从以上可知, 计算过程是比较繁的。若将弹塑性计算时的中和轴取与弹性计算时的中和轴一致 [26], 即假定中和轴通过圆心, $\delta=0$, 则计算过程可大为简化。此时,

$$X_f = r$$

$$J_a = 2 \int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2} dy = 2 \left[\frac{r^4}{\delta} \times \frac{\pi}{2} \right]_0^{r/2} = 0.3927r^4$$

$$J_l' = 2 \int_0^{r/2} y^2 \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

$$= 2 \left[\frac{y}{\delta} (2y^2 - r^2) \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^4}{\delta} \arcsin \frac{y}{r} \right]_0^{r/2} = 0.0768r^4$$

$$S_l'' = 2 \int_{r/2}^r y \sqrt{r^2 - y^2} dy = 2 \left[-\frac{(r^2 - y^2)^{3/2}}{3} \right]_{r/2}^r = 0.4330r^3$$

$$W_s = \frac{2}{r} \times 0.3927r^4 + \frac{2}{r} \times 0.0768r^4 + 0.4330r^3 = 1.372r^3$$

$$\gamma = \frac{W_s}{W_o} = \frac{1.372r^3}{\frac{1}{4}\pi r^3} = 1.74$$

$$\text{相对误差} \quad \Delta = \frac{1.74 - 1.65}{1.65} = 5.4\%$$

中和轴位置作近似假定后, 计算过程的确大大简化, 而计算结果与精确值比仅差 5.4%。因此, 下面在计算环形截面的塑性系数时, 即采用这一近似假定, 并近似取圆形截面的 $\gamma = 1.7$

2、环形截面 (图 7)

计算环形截面的塑性系数时, 假定:

- (1)、弹塑性计算时的中和轴通过环心;
- (2)、园环厚度不超过外园半径的一半。

计算图形如图 7。受压边缘的混凝土应力 $\sigma_h = 2R_t$, 受拉区塑化高度为 $r/2$ 。

(1)、 J_a 的计算

将 J_a 、 J_l' 与 S_l'' 之值代入式 (15), 得

$$W_s = \frac{2}{r} J_a + \frac{2}{r} J_l' + S_l'' = \frac{2}{r} \left[\frac{\pi}{8} \left(1 - \frac{r_1^4}{r^4} \right) r^4 \right] + \frac{2}{r} \left[0.307 + \frac{1}{8} \sqrt{\left(4 \frac{r_1^2}{r^2} - 1 \right)^3} - \frac{r_1^2}{4r^2} \sqrt{4 \frac{r_1^2}{r^2} - 1} - \frac{r_1^4}{r^4} \arcsin \frac{r}{2r_1} \right] \frac{r^4}{4} + \left[3\sqrt{3} - \sqrt{\left(4 \frac{r_1^2}{r^2} - 1 \right)^3} \right] \frac{r^3}{12}$$

(4)、 W_o 的计算

$$W_o = \frac{\frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4)}{r} = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{r_1^4}{r^4} \right) r^4$$

γ 值的计算, 按不同环壁厚度计算如表 3。

环形截面 γ 值计算表

表 3

项次	计 算 式	r_1/r					
		1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
1	$\frac{2}{r} J_a$	0	0.020	0.038	0.057	0.079	0.104
2	$\frac{2}{r} J_l'$	0	0.153	0.271	0.354	0.408	0.432
3	S_l''	0	0.271	0.465	0.596	0.684	0.735
4	$W_s = \frac{2}{r} J_a + \frac{2}{r} J_l' + S_l''$	0	0.444	0.774	1.007	1.171	1.271
5	W_o	0	0.271	0.465	0.596	0.684	0.735
6	$\gamma = W_s/W_o$	—	1.64	1.66	1.69	1.71	1.73
7	$\gamma = 1.7 - 0.1 \frac{r_1}{r}$	—	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65

注: 表中 1—5 项的数字还得乘 r^3

从表 3 中可以看出, γ 的计算值(第 6 项)将略偏大, 其原因是因为对环形截面计算 W_s 时的中和轴位置与环壁厚度的假定产生的。将 γ 与 r_1/r 的关系按表 3 第 6 项的计算点绘如图 8 的虚线, 知二者的关系可用线性关系表示, 为了适合 $r_1/r = 0$, $\gamma = 1.70$ 的边界条件, γ 与 r_1/r 的关系可用式 (17) 表示, 如图 8 的实线。

$$\gamma = 1.7 - 0.1 r_1/r \quad \dots\dots\dots (17)$$

若用环的外径 d 与内径 d_1 取代式 (17) 中的 r_1/r ,

$$\text{则} \quad \gamma = 1.7 - 0.1 d_1/d \quad \dots\dots\dots (17)'$$

实线的 γ 值较虚线略小, 将更近于精确值, 且当 $r_1/r = 0$ 时, 与园形截面的 $\gamma = 1.70$ 也符合。

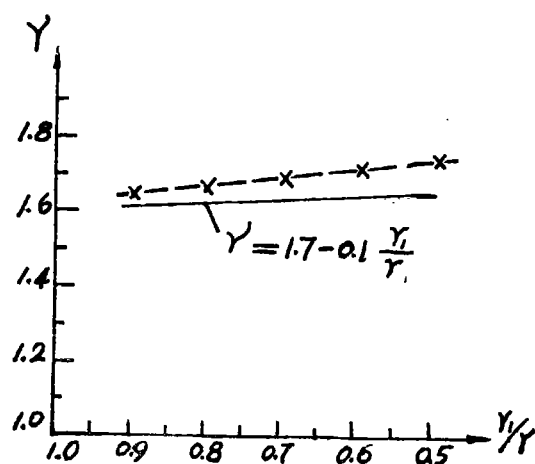


图 8

常用截面的塑性系数 γ 值汇总如表 4。表内未包括的截面，仍须用式（3）、（15）、（16）计算。

截面抵抗矩塑性系数 γ 值表 (1)

表 4

项次	截 面 特 征	γ	备 注
1	矩形截面	1.55	
2	翼缘位于受压区的T形截面	1.50	
3	对称工字形或箱形截面	$\frac{b_i}{b} \leq 2, \frac{h_i}{h}$ 为任意值	b_i, h_i 为翼缘的宽度和高度。 b, h 为梁腹的宽度和截面高度。
		$\frac{b_i}{b} > 2, \frac{h_i}{h} \geq 0.2$	
		$\frac{b_i}{b} > 2, \frac{h_i}{h} < 0.2$	
4	翼缘位于受拉区的T形截面 (倒T形)	$\frac{b_i}{b} \leq 2, \frac{h_i}{h}$ 为任意值	截面符号的意义同上
		$\frac{b_i}{b} > 2, \frac{h_i}{h} \geq 0.2$	
		$\frac{b_i}{b} > 2, \frac{h_i}{h} < 0.2$	
5	圆形和环形截面	$1.7 - 0.1 \frac{d_i}{d}$	d_i 为内径 d 为外径

四、截面高度对塑性系数影响的考虑

水工钢筋混凝土构件的截面高度，尤其是大中型水工结构的截面高度，高度在1~3米者很常见，比这更大的也有，需要考虑截面高度对塑性系数降低的影响。为简化起见，建议将表4计算的 γ 作为基本值，然后再乘以高度修正系数 C_h 。设考虑高度影响的塑性系数为 γ_h ，

$$\gamma_h = C_h \gamma \quad \dots\dots\dots (18)$$

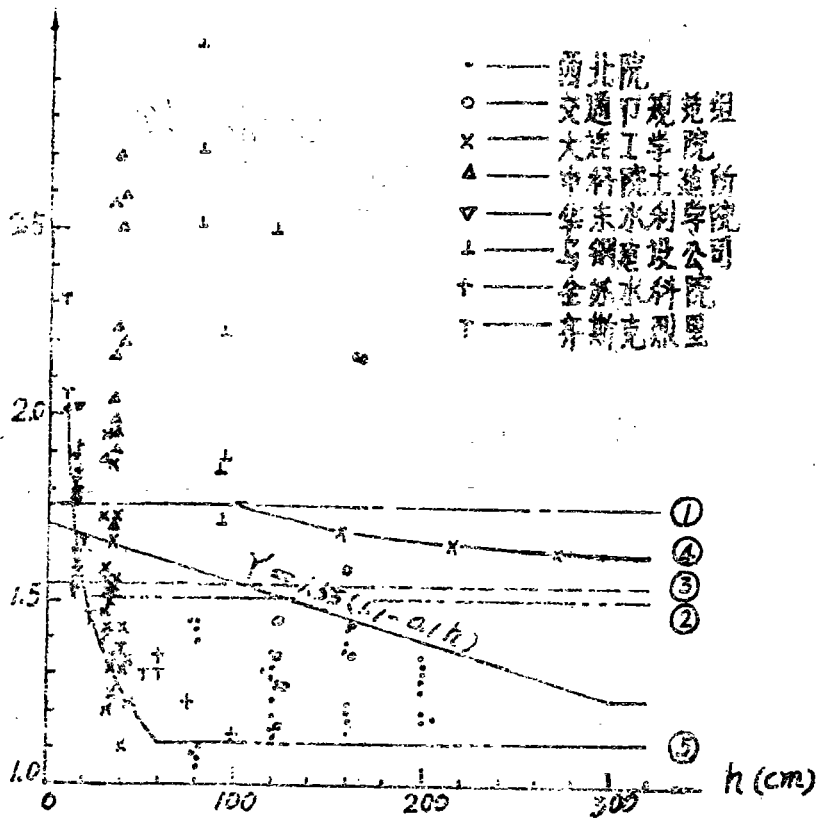


图 9

- ① — TJ10-74
- ② — Q/2 HS001-64
- ③ — 水工试行本
- ④ — CHN II-56-77
- ⑤ — DIN 1045, 1972

根据收集到的国内外110根矩形和T形梁的试验(其中有T形梁3根,并有7根梁作了正、倒两次试验)共117个 γ 值实测资料,将其中矩形梁的资料点绘如图9。由该图可知, γ 与梁

高 h 的关系很分散,部分原因是因为没有考虑配筋对 γ 的影响所致,但总的趋势是 γ 值随 h 的增加而减少。根据试验研究和理论分析,浅梁($h \leq 20$ 厘米)的 γ 值一般不小于1.7,高梁($h \geq 3$ 米)的 γ 值可降低到1.2左右,故建议 C_h 值粗略地按下式计算:

$$C_h = 1.1 - 0.1h \quad \dots\dots\dots (19)$$

式中 h ——截面高度,以米计。圆形和环形截面 $h=d$ 。当 $h > 3$ 米时,取 $h=3$ 米。这样,对矩形截面来说, γ 将在1.24~1.70之间变动。比规范〔2〕要接近实际一些。

将110根梁的117个试验资料所得 γ 试验值 γ^s ,与按式(18)、(19)及表4计算的 γ 计算值 γ^j 比,其 γ^s/γ^j 的平均比值为1.02,均方根差 $\sigma=0.249$,离散率 $C_v=0.244$,其符合性尚好。试验梁的详细资料见附表2。

将建议方法与国内外规范比较示于图9(矩形截面)。由该图可知,建议的 $\gamma=1.55(1.1-0.1h)$ 线在没有更多的充分论证前,似以不作更多的降低为宜。当 $h > 1.50$ 米时,建议值比大多数规范的规定为低,只有西德规范是例外。

五、结 束 语

(一)、本文建议的截面抵抗矩塑系数的计算,有如下特点:

1、塑性系数中 W_s 计算所依据的应力图形,受压区为三角形,受拉区为梯形,其塑性高度为受拉区高度的二分之一,受拉边缘应力为混凝土的抗拉强度 R_t 。由此计算出的塑性系数 γ 为塑性系数的基本值,列于表4者为常用截面的 γ 值。

2、 γ 值(表4所列,或用式(3)、(15)、(16)计算所得)相当于截面高度为1.0米的塑性系数。若截面高度不等于1.0米时,尚需将 γ 乘以高度修正系数 C_h 。

3、由本文推导的塑性系数 γ 计算公式及表列值为受弯构件的塑性系数,对偏心受压与偏心受拉构件,亦取同一数值。

4、建议的塑性系数计算方法及其取值考虑了下列影响因素:应力图形、截面的形状及尺寸和截面高度。考虑到目前的实际研究情况和便于应用,我们认为现在以计入些些因素较为合适。其中尤以应力图形中受拉区的梯形图形和塑性系数随高度增大而变小这两点,是比较符合于水工钢筋混凝土结构的特点的,因而是比较符合实际的。

(二)、塑性系数虽然只是一个系数,但实际上影响面较广,除钢筋混凝土结构的抗裂计算外,还有混凝土和少筋混凝土结构的强度计算,甚至也影响到按应力图形配筋的问题。而现在所建议的计算方法所考虑的深度和广度均不够,还应从理论和试验研究方面继续研究,如:配筋对混凝土抗拉强度的影响,混凝土标号和截面高度对塑性系数的影响,不同受力性质构件的塑性系数和裂缝出现机理等,以便有关这方面的计算更趋合理。

塑性系数计算的影响因素甚多。目前我们做的工作不多,也不够深入,对问题的研究也不系统,因此本文的缺点和错误在所难免,竭诚欢迎批评指正。

常用截面塑性系数计算成果表

附表 1

项次	截面特征			γ		说明	
				计算值	取值		
1	矩形			1.54	1.55		
2	翼缘位于受压区的T形截面	$\frac{h_i}{h}=0.1$	2	1.53	1.50	bi, hi, 为翼缘宽度和高度 b、h, 为梁腹宽度和截面高度	
$\frac{b_i}{b}=4$			1.51				
6			1.49				
8			1.47				
$\frac{h_i}{h}=0.2$		2	1.52				
		$\frac{b_i}{b}=4$	1.49				
		6	1.45				
$\frac{h_i}{h}=0.3$		$\frac{b_i}{b}=2$	1.50				
		4~10	1.47				
3	对称工字形或箱形截面	$\frac{h_i}{h}=0.1$	2	1.45	1.45	同 上	
			$\frac{b_i}{b}=4$	1.35	1.35		
			6	1.28			
			8	1.25			
		$\frac{h_i}{h}=0.2$	2	1.44	1.45		1.40
			$\frac{b_i}{b}=4$	1.37			
			6	1.32			
			8	1.29			
		$\frac{h_i}{h}=0.3$	2	1.47	1.45		1.40
			$\frac{b_i}{b}=4$	1.44			
			6	1.41			
			8	1.38			
4	翼缘位于受拉区的T形 (倒T形)	$\frac{h_i}{h}=0.1$	2	1.46	1.50	同 上	
			$\frac{b_i}{b}=4$	1.37	1.40		
			6	1.34			
			8—10	1.33			
		$\frac{h_i}{h}=0.2$	4	1.46	1.50		1.55
			$\frac{b_i}{b}=6$	1.52			
			8	1.56			
			10	1.59			
		$\frac{h_i}{h}=0.3$	2	1.53	1.50		1.55
			4	1.57			
			$\frac{b_i}{b}=6$	1.61			
			8	1.63			
			10	1.67			

试验梁资料表

附表2

试验单位	构件编号	梁宽 b (厘米)	梁高 h (厘米)	混凝土标号 R (公斤/厘米 ²)	配筋率 μ (%)	裂缝出现弯矩 M_f^s (吨米)	γ^s	γ^j	$\frac{\gamma^s}{\gamma^j}$	备 注
水电西北勘测设计院(19)	I—1—(4)	25	80	365	0	9.70	1.42	1.58	0.90	表列试验梁, 除注明者外, 截面形式均为矩形。
	—(5)					7.31	1.07	1.58	0.68	
	—(1)					6.84	1.05	1.58	0.67	
	I—2—(2)	25	80	330	0.079	7.20	1.10	1.58	0.70	
	—(3)					7.12	1.09	1.58	0.69	
	—(1)					11.69	1.44	1.58	0.91	
	I—3—(2)	25	80	345	1.03	11.28	1.39	1.58	0.88	
	—(3)					11.69	1.44	1.58	0.91	
	II—1—(4)	40	120	417	0	32.82	1.23	1.52	0.81	
	—(5)					36.22	1.36	1.52	0.90	
	—(1)					28.32	1.15	1.52	0.76	
	II—2—(2)	40	120	324	0.086	27.26	1.19	1.52	0.78	
	—(3)					25.98	1.14	1.52	0.75	
	—(1)					36.94	1.29	1.52	0.85	
	II—3—(2)	40	120	338	1.03	37.58	1.31	1.52	0.86	
	—(3)					37.58	1.31	1.52	0.86	
	III—1—(4)	55	160	336	0	63.00	1.11	1.46	0.76	
	—(5)					67.50	1.19	1.46	0.82	
	—(1)					74.17	1.22	1.46	0.84	
	III—2—(2)	55	160	364	0.083	73.47	1.20	1.46	0.82	
	—(3)					72.77	1.18	1.46	0.81	
	—(1)					104.17	1.38	1.46	0.95	
	III—3—(2)	55	160	350	0.995	102.17	1.37	1.46	0.94	
	—(3)					108.87	1.42	1.46	0.97	
	IV—1—(4)	60	200	349	0	130.9	1.32	1.40	0.94	
	—(5)					115.9	1.17	1.40	0.84	
	—(1)					122.8	1.25	1.40	0.89	
	IV—2—(2)	60	200	337	0.081	114.9	1.17	1.40	0.84	
	—(3)					125.5	1.28	1.40	0.92	
	—(1)					163.0	1.32	1.40	0.94	
	IV—3—(2)	60	200	365	0.980	166.5	1.35	1.40	0.97	
	—(3)					160.0	1.30	1.40	0.93	
交通部	B—2 正倒	37	121.4	450	2.12 0.304	43.1	1.27	1.52	0.84	
						35.0	1.16	1.52	0.76	
	B—3 正倒	38	121.4	417	2.62 0.296	50.3	1.44	1.52	0.95	
						46.5	1.35	1.52	0.89	

续附表 2

港工钢筋混凝土设计规范修订组〔20〕	B—4 倒	37	121.4	444	0.304	37.6	1.27	1.52	0.84	翼缘20×69.5厘米的T形梁
	C—1 正倒	32	120.5	444	0.937	40.5	1.35	1.32	1.02	
	C—2 正倒	30.3	120.5	417	0.536	50.4	1.27	1.37	0.93	
	C—3 正倒	30.4	120.0	417	2.15	44.2	1.39	1.32	1.05	
	D—1 正倒	40	161	310	0.566	45.0	1.18	1.37	0.86	
	D—2 正	39	159.5	365	2.83	50.4	1.42	1.32	1.08	
	D—3 正倒	39.7	161	216	0.564	57.3	1.46	1.37	1.07	
	D—3 正倒	39.7	161	216	1.09	104.7	2.16	1.46	1.48	
大连工学院〔30〕〔31〕	I—1	20	40	310	0.409	64.7	1.43	1.46	0.98	带※号者为文献〔31〕的资料
	I—2	20	41.5	310	1.58	85.5	1.59	1.46	1.09	
	I—3	20	40	310	2.01	85.2	2.16	1.46	1.48	
	I—4	20	40	310	0.410	47.6	1.36	1.46	0.93	
	I—5	21	41	310	0	1.61	1.32	1.64	0.81	
	II—1	20	35	310	0.044	1.61	1.22	1.64	0.74	
	II—2	20	34.5	310	0.239	1.41	1.10	1.64	0.67	
	II—3	20	35	310	0.239	1.81	1.42	1.64	0.87	
	II—4	20	35	310	0.318	1.92	1.34	1.64	0.32	
	II—5	20	35	310	0	1.25	1.34	1.65	0.81	
	II—6	20	34.5	310	0.041	1.14	1.25	1.65	0.76	
	II—7	20	35	310	0.131	1.27	1.33	1.65	0.81	
	II—8	20	35	310	0.273	1.51	1.53	1.65	0.93	
	II—9	20	35	310	0.313	1.64	1.65	1.65	1.00	
	II—10	20	30	310	0	1.33	1.94	1.66	1.17	
	II—11	20	31	310	0.035	0.88	1.20	1.66	0.72	
	II—12	19.5	30	310	0.094	1.02	1.47	1.66	0.89	
	II—13	20	30	310	0.211	1.13	1.58	1.66	0.95	
	II—14	20	30	310	0.318	1.26	1.72	1.66	1.04	
	II—15	17.4	35.5	308	0	1.24	1.49	1.65	0.90	
中国科学院	I—1 *	18.0	36.0	308	0	1.34	1.51	1.65	0.92	
	I—2 *	17.8	36.0	308	0.114	1.27	1.42	1.65	0.86	
	I—4 *	17.5	36.5	335	0.171	1.79	1.86	1.65	1.13	
	I—5 *	18.0	36.0	335	0.790	2.04	1.86	1.65	1.13	
	I—6 *	15.7	33.5	254	0.43	1.01	1.56	1.65	0.95	
	II A	14.0	33.6	244	0.61	1.06	1.80	1.65	1.09	
	II B	15.0	34.0	244	0.89	1.31	1.90	1.65	1.15	
	III A	15.6	33.4	249	0.87	1.19	1.71	1.65	1.04	
中国科学院	III A	14.2	34.3	222	1.46	1.4	1.99	1.65	1.21	
	III B	14.0	34.0	224	1.49	1.78	2.57	1.65	1.56	

续附表 2

院士建所〔32〕	VA	14.2	36.2	238	2.49	2.13	2.16	1.65	1.31	
	VB	14.2	36.0	233	2.50	2.02	2.04	1.65	1.24	
	VA	14.0	36.6	283	2.84	2.98	2.50	1.65	1.52	
	VB	14.0	36.0	285	2.99	2.21	1.88	1.65	1.14	
	VC	15.0	36.2	212	2.66	2.83	2.71	1.65	1.64	
	VA	14.0	36.4	235	3.33	2.58	2.19	1.65	1.33	
	VB	14.0	36.0	235	3.38	2.58	2.23	1.65	1.35	
	VC	14.0	36.3	196	3.35	2.79	2.57	1.65	1.56	
华东水利学院〔33〕	1	12	15	190	0.147	0.126	1.62	1.68	0.97	〔33〕的每 资料为试 组值的平 验值的均
	2	12	15	160	0.147	0.108	1.55	1.68	0.92	
	3	12	15	200	0.293	0.126	1.52	1.68	0.91	
	4	12	15	160	0.293	0.122	1.69	1.68	1.01	
	5	12	15	160	0.558	0.136	1.76	1.68	1.05	
	6	12	15	150	0.558	0.117	1.57	1.68	0.94	
	7	12	15	200	0.558	0.155	1.77	1.68	1.05	
	8	12	15	210	0.822	0.180	1.88	1.68	1.12	
	9	12	15	160	0.822	0.167	2.01	1.68	1.20	
	10	12	15	190	0.822	0.146	1.61	1.68	0.96	
	11	12	15	170	0.822	0.153	1.81	1.68	1.08	
马钢建设公司〔34〕	L ₁	25	90	297	1.87	19.1	1.85	1.57	1.18	
	L ₂	26.2	91	238	1.77	16.6	1.73	1.57	1.10	
	L ₃	26.5	92.5	288	1.71	20.7	1.88	1.56	1.21	
	L ₄	25.3	90.5	229	1.83	20.7	2.22	1.57	1.41	
	L ₅	35.6	110	205	2.20	45.0	2.50	1.53	1.64	
	L ₆	34.5	112	195	2.23	57.2	3.21	1.53	2.10	
	L ₁₁	24.5	80	182	1.68	16.8	2.90	1.58	1.84	
	L ₁₂	25.5	79.5	160	1.62	15.0	2.71	1.53	1.72	
	L ₁₃	24.3	80	175	1.69	14.1	2.51	1.53	1.59	
会苏水利院〔16〕			10				2.0	1.69	1.19	
			15				1.85	1.68	1.10	
			20				1.62	1.68	0.96	
			50				1.85	1.63	0.83	
			75				1.22	1.59	0.77	
			100				1.13	1.55	0.73	
齐斯克烈里〔18〕		7	7	207	0		2.30	1.69	1.36	
		10	10	207	0		2.05	1.69	1.22	
		15	15	207	0		1.90	1.68	1.13	
		20	20	207	0		1.65	1.67	0.99	
		25	25	207	0		1.45	1.67	0.87	
		30	30	207	0		1.40	1.66	0.84	
		40	40	207	0		1.37	1.64	0.84	
		50	50	207	0		1.30	1.63	0.80	
		60	60	207	0		1.30	1.61	0.81	

参 考 文 献 与 资 料

- [1]、水利电力部：“水工钢筋混凝土结构设计规范(SDJ20—78)(试行)”，1978年
- [2]、水利电力部：“水工建筑物混凝土及钢筋混凝土结构设计规范(试行)”，1965年
- [3]、横道英雄：コンクリート橋，1972年
- [4]、国家建委：“钢筋混凝土结构设计规范(TJ10—74)(试行)”，1974年
- [5]、ЦНИИПромзданий：“Руководство по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона (без предварительного напряжения)”，1978
- [6]、交通部：“水运工程钢筋混凝土结构设计规范(Q/(交)HS001—64)”，1964年
- [7]、铁道部：“铁路工程技术规范”第二篇，“桥涵”，1975年
- [8]、赵国藩：“预应力混凝土、钢筋混凝土和混凝土构件抗裂性通用计算方法”(土木工程学报)，1964年第2期
- [9]、赵国藩：“水工钢筋混凝土结构抗裂性(裂缝出现及裂缝扩展)的计算方法”，〈水利学报〉1960年第6期
- [10]、赵国藩：“加筋混凝土结构计算”，1961年，上海科技出版社
- [11]、大连工学院：“论普通配筋混凝土和预应力混凝土结构抗裂性的计算”，1978年
- [12]、Б. Ф. 高留诺夫：“预加应力钢筋混凝土水工建筑物”，1955年中译本
- [13]、У. 居易翁：“预应力混凝土理论与实验研究”，1953年中译本
- [14]、С. Ю. центлин：“К расчету трещиностойкости внецентренно сжатых и обжатых элементов”，〈Бетон и Железобетон〉，1973，5
- [15]、Ю. П. Гуща：“Расчет железобетонных конструкций по предельным состояниям второй группы”，〈бетон и железобетон〉，1976，6
- [16]、А. А. Боровой К. А. Мальцов：“О ТУИН на проектирование бетонных и железобетонных гидротехнических конструкций”，〈Гидротехническое строительство〉，1958，4
- [17]、К. А. Мальцов：“Физический смысл условного предела прочности бетона на растяжение при изгибе”，〈бетон и железобетон〉，1953，3
- [18]、Г. Д. Цискрели，М. Ю. Лещинский：“К вопросу определения прочности бетона на изгиб”，〈Гидротехническое строительство〉，1955，5
- [19]、水电部西北勘测设计院科研室结构组：“大截面矩形截面梁塑性系数 γ 值试验与分析”，1979年4月
- [20]、交通部港工钢筋混凝土设计规范修订组等：
“高 $\frac{1.2}{1.6}$ 米钢筋混凝土梁试验报告”，1978年3月

[21]、华东水利学院建筑结构教研组：“关于混凝土与钢筋混凝土受弯构件正截面抗裂性计算塑性系数 γ 值的几个问题”，1978年5月

[22]、Госстрой СССР: Глава СНИП II—56—77 《бетонные железобетонные конструкции гидротехнических сооружений》，1977

[23]、Г.Д.齐斯克烈里：“无筋混凝土及配筋混凝土抗拉强度”，1956年中译本

[24]、赵国藩：“配筋混凝土的抗裂计算”，〈工程建设〉1957年第3期

[25]、Г.Д.Цискрелн：“Некоторые вопросы теории гидротехнического железобетона”，〈Гидротехническое строительство〉，1951，7

[26]、蔡绍怀：“抗裂度塑性系数 γ_s 取值方法的改进”，〈钢筋混凝土结构研究报告集〉，1977年

[27]、M.F.Kaplan：“Strains and Stresses of Concrete at initiation of cracking and near failure”，〈ACI〉，1963，7

[28]、G.B.Welch：“Tensile Strains in unreinforced Concrete beams”，〈Magazine of concrete research〉，1966，3

[29]、西德混凝土和钢筋混凝土结构设计和施工规范（DIN1045，1972）

[30]、徐积善、陈继祖、李树瑶：“配筋混凝土高梁的试验研究”，〈大连工学院学报〉，1957年1月

[31]、大连工学院水利系少筋混凝土研究组：“少筋混凝土结构的试验和计算方法”，〈大连工学院学报〉，1978，3

[32]、中国科学院土建研究所：“钢筋混凝土结构研究”，科学出版社，1959年

[33]、何正森：“钢筋混凝土梁的抗裂与破坏”，〈华东水利学院学报〉第一期，1958年3月

[34]、马鞍山钢铁公司建设公司（十七冶）等：“马钢某工程框架滑模大梁抗剪试验报告”，1976年12月