关于接入角ψ_{ou}=？的再探讨

王俊鹍　　　　丁培贵
（电工教研室）　　（数学教研室）

提　　要

本文论述了RL或RC串联电路在零具初始条件下接通至正弦电压源后过渡电量i或u_C出现极大值的条件，并运用对偶原理将有关结论推广至g_C或g_L并联电路在零具初始条件下接通至正弦电流源这一对偶问题中去。

"高等学校电工课程教学工作通讯"第12期发表了"关于接入角ψ_{ou}=?的探讨一文(以下简称文献〔1〕)，作者摆脱了国内外一些电工原理教材的传统论述，明确提出了RL串联电路接通至正弦电压

$$u(t)=U_m\text{Sin}(\omega t+\psi_{ou})$$

时，在零具初始条件下过渡电流出现极大值的条件，即当R、L确定时，接入角ψ_{ou}=？时，i_{max}为最大这样一个问题，并作了有益的工作，这是值得欢迎的。但文献〔1〕中具体的推导方法及过渡电流出现极大值条件的某些结论仍有商榷的余地。

本文拟就RL或RC串联电路在零具初始条件下接通至正弦电压源后过渡电量i或u_c出现极大值的条件进行再探讨，并作出更正确的结论；还将运用对偶原理把这些结论推广至g_C或g_L并联电路在零具初始条件下接通至正弦电流源这一对偶问题中去。

众所周知，RL串联电路在零具初始条件下接通至正弦电压源后，其过渡电流为

$$i=\frac{U_m}{z}\left[\sin(\omega t+\psi_{ou}-\phi)-\sin(\psi_{ou}-\phi)e^{-t/\tau}\right]$$

式中U_m为正弦电压的振幅；ψ_{ou}为接入角；

$z=\sqrt{R^2+X_L{}^2}=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$为电路复阻抗的模；$\phi=\text{tg}^{-1}\frac{\omega L}{R}$为电路的功率因数角；$\tau=\frac{L}{R}$为电路的时间常数。

文献〔1〕令$\theta=\omega t+\psi_{ou}$将上式化为

$$i=\frac{U_m}{z}\left\{\sin(\theta-\phi)-\sin(\psi_{ou}-\varphi)\cdot e\times p\left[-(\theta-\psi_{ou})\text{ctg}\,\varphi\right]\right\}$$

而把θ、ψ_{ou}看成两个独立变量，并设$\frac{U_m}{z}=1$，在求$\frac{\partial i}{\partial\psi_{ou}}$时，令

$$\frac{\partial}{\partial\psi_{ou}}\sin(\theta-\phi)=0$$

得出

$$\frac{\partial i}{\partial \psi_{ou}}=-\frac{R}{X_L}\sin(\psi_{ou}-\varphi)\exp\left[-\frac{R}{X_L}(\theta-\psi_{ou})\right]$$
$$-\cos(\psi_{ou}-\varphi)\exp\left[-\frac{R}{X_L}(\theta-\psi_{ou})\right]=0$$

这个结果显然是错误的。因i为θ、ψ_{ou}的函数，而$\theta=\omega t+\psi_{ou}$又是$\omega t$和$\psi_{ou}$的函数，这时i为复合函数，因此上式的结果是不对的，由该式导出的所有结论也就错误了。

我们认为$\frac{\partial i}{\partial \psi_{ou}}$的正确求法应为

$$\frac{\partial i}{\partial \psi_{ou}}=\cos(\theta-\varphi)\frac{\partial \theta}{\partial \psi_{ou}}-\cos(\psi_{ou}-\varphi)\exp\left[-\frac{R}{X_L}(\theta-\psi_{ou})\right]$$
$$+\frac{R}{X_L}\sin(\psi_{ou}-\varphi)\cdot\exp\left[-\frac{R}{X_L}(\theta-\psi_{ou})\right]\frac{\partial}{\partial \psi_{ou}}(\theta-\psi_{ou})$$

而$\frac{\partial \theta}{\partial \psi_{ou}}=1$和$\frac{\partial(\theta-\psi_{ou})}{\partial \psi_{ou}}=0$，故有

$$\frac{\partial i}{\partial \psi_{ou}}=\cos(\theta-\varphi)-\cos(\psi_{ou}-\varphi)\exp\left[-\frac{R}{X_L}(\theta-\psi_{ou})\right]$$

即

$$\frac{\partial i}{\partial \psi_{ou}}=\cos(\omega t+\psi_{ou}-\varphi)-\cos(\psi_{ou}-\varphi)\exp\left[-\frac{R}{X_L}\omega t\right]$$

这个结果与不作代换$\theta=\omega t+\psi_{ou}$而直接求i对$\psi_{ou}$的偏导数结果才是一致的。因

$$i=\sin(\omega t+\psi_{ou}-\varphi)-\sin(\psi_{ou}-\varphi)\exp\left(-\frac{R}{X_L}\omega t\right)$$

所以

$$\frac{\partial i}{\partial \psi_{ou}}=\cos(\omega t+\psi_{ou}-\varphi)-\cos(\psi_{ou}-\varphi)\exp\left(-\frac{R}{X_L}\omega t\right)$$

现在根据我们上面所得结论来推导过渡电流i达到极大值时ψ_{ou}及ωt应满足的条件，为了简单起见，设$\frac{U_m}{z}=1$，$\theta=\omega t$，则

$$i=\sin(\theta-\psi_{om}-\varphi)-\sin(\psi_{om}-\varphi)e^{-\frac{\theta}{\operatorname{tg}\varphi}}$$

式中$\operatorname{tg}\varphi=\frac{X_L}{R}=\frac{\omega_L}{R}$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$。

根据微积分学中二元函数达到极大值的条件，应有

$$\frac{\partial i}{\partial \theta}=0\,,\quad \frac{\partial i}{\partial \psi_{ou}}=0$$

设其驻点为(θ,ψ_{ou})，则在(θ,ψ_{ou})处当

$$\left(\frac{\partial^2 i}{\partial\theta\partial\psi_{ou}}\right)^2<\left(\frac{\partial^2 i}{\partial\theta^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 i}{\partial\psi_{ou}^2}\right)$$

及 $\frac{\partial^2 i}{\partial\theta^2}<0$ 或 $\frac{\partial^2 i}{\partial\psi_{ou}^2}<0$ 时 i必在(θ,ψ_{ou})处达到极大值。

将i分别对θ，ψ_{ou}求偏导数，并今其为零，即

$$\frac{\partial i}{\partial\theta}=\cos(\theta+\psi_{ou}-\varphi)+\mathrm{ctg}\varphi\sin(\psi_{ou}-\varphi)e^{-\frac{\theta}{\mathrm{tg}\varphi}}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial i}{\partial\psi_{ou}}=\cos(\theta+\psi_{ou}-\varphi)-\cos(\psi_{ou}-\varphi)e^{-\frac{\theta}{\mathrm{tg}\varphi}}=0 \tag{2}$$

求解方程组（1）、（2）可得

$$\mathrm{tg}(\psi_{ou}-\varphi)=-\mathrm{tg}\varphi$$

即得

$$\psi_{ou}=0\text{ 或 }\psi_{ou}=k\pi\text{（k为整数）}$$

而

$$B=\frac{\partial^2 i}{\partial\theta\partial\psi_{ou}}-\sin(\theta+\psi_{ou}-\varphi)+\mathrm{ctg}\varphi\cos(\psi_{ou}-\varphi)e^{-\frac{\theta}{\mathrm{tg}\varphi}} \tag{3}$$

$$A=\frac{\partial^2 i}{\partial\theta^2}=-\sin(\theta+\psi_{ou}-\varphi)-\mathrm{ctg}^2\varphi\sin(\psi_{ou}-\varphi)e^{-\frac{\theta}{\mathrm{tg}\varphi}} \tag{4}$$

$$C=\frac{\partial^2 i}{\partial\psi_{ou}^2}=-\sin(\theta+\psi_{ou}-\varphi)+\sin(\psi_{ou}-\varphi)e^{=\frac{\theta}{\mathrm{tg}\varphi}} \tag{5}$$

令$\psi_{ou}=0$代入（3）至（5）式中得

$$B_o=\left(\frac{\partial^2 i}{\partial\theta\partial\psi_{ou}}\right)_{\psi_{ou}=0}=-\sin(\theta-\varphi)+\mathrm{ctg}\varphi\cos\varphi e^{-\frac{\theta}{\mathrm{tg}\varphi}} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}A_o=\left(\frac{\partial^2 i}{\partial\theta^2}\right)_{\psi_{ou}=0}&=-\sin(\theta-\varphi)+\mathrm{ctg}^2\varphi\sin\varphi e^{-\frac{\theta}{\mathrm{tg}\varphi}}\\&=-\sin(\theta-\varphi)+\mathrm{ctg}\varphi\cos\varphi e^{-\frac{\theta}{\mathrm{tg}\varphi}}\\&=B_o\end{aligned} \tag{7}$$

$$C_o=\left(\frac{\partial^2 i}{\partial\psi_{ou}^2}\right)_{\psi_{ou}=0}=-\sin(\theta-\varphi)-\sin\varphi e^{-\frac{\theta}{\mathrm{tg}\varphi}} \tag{8}$$

我们将证明当$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}+\varphi$时有

$$B_o^2-A_oC_o<0\text{和}A_o<0$$

事实上，因$B_o=A_o$，故

$$B_o^2-A_oC_o=B_o(B_o-C_o)$$

而当$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$时

$$B_o-C_o=(\mathrm{ctg}\varphi\cos\varphi+\sin\varphi)e^{-\frac{\theta}{\mathrm{tg}\varphi}}>0$$

又

$$B_o=-\sin(\theta-\varphi)+\mathrm{ctg}\varphi\cos\varphi e^{-\theta/\mathrm{tg}\varphi}$$

$$= \cos \mathrm{ctg}\varphi e^{-\theta/\mathrm{tg}\,\varphi} - \sin(\theta-\varphi).$$

显然有$\mathrm{ctg}\varphi e^{-\frac{\theta}{\mathrm{tg}\varphi}}<1$，而且$\sin(\theta-\varphi)$在$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}+\varphi$为增函数，并满足$o<\cos\varphi\leqslant\sin(\theta-\varphi)\leqslant1$，因此有

$$B_0=\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\varphi e^{-\theta/\mathrm{tg}\varphi}-\sin(\theta-\varphi)<\cos\varphi-\cos\varphi=0$$

即有

$$B_0{}^2-A_0C_0<0 \qquad \text{和} B_0=A_0<0$$

故得出i在$\psi_{ou}=0$及$\frac{\pi}{2}\leqslant\omega t\leqslant\frac{\pi}{2}+\varphi$时，$i$将出现极大值$i_{max}$。

此外，还可进一步阐明当$\psi_{ou}=0$而$\theta<\frac{\pi}{2}$和$\theta>\frac{\pi}{2}+\varphi$时，$i$不可能达到极大值。

若$\theta<\frac{\pi}{2}$取$\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$，$\alpha$为一很小的正数，并令$\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$，这时

$$B_0=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)/\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$=\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}>0$$

而$B_0-C_0>0$，故有

$$B_0{}^2-A_0C_0>0$$

因此i在$\psi_{ou}=0$及$\theta<\frac{\pi}{2}$处不可能达到极大值。

同理可证当$\psi_{ou}=0$及$\theta>\frac{\pi}{2}+\varphi$时$i$也不可能达到极大值。

综上所述可得如下结论：参数确定的R、L串联电路在零具初始条件下接通正弦电压源时，其过渡电流i在且仅在$\psi_{ou}=0$和$\frac{\pi}{2}\leqslant\omega t\leqslant\frac{\pi}{2}+\varphi$范围内的某一相位$\omega t_0$点达到极大值$i_{max}$。

为了求出电流达到极大值时的相位$\theta=\omega t_0$，以$\psi_{ou}=0$代入（1）式得

$$\cos(\theta-\varphi)=\cos\varphi e^{-\theta/\mathrm{tg}\varphi} \tag{9}$$

这是一个超越方程，用数值近似解法求解这个方程，即可求得$\theta=\omega t_0$。

对于参数确定的R、C串联电路于零具初始条件下与正弦电压源接通后其过渡电容电压为

$$u_C=U_{cm}\sin\left(\omega t+\psi_{ou}-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)-U_{cm}\sin\left(\psi_{ou}-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中$U_{cm}=\frac{1}{\omega c}\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega c}\right)^2}}$；$\mathrm{tg}\,\varphi=-\frac{1}{\omega cR}$，$-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$；$\tau=RC$。

仿照上述对R、L串联电路类似问题的推导可以证明 u_c且仅在$\psi_{0u}=0$及$\frac{\pi}{2}\leqslant\omega t\leqslant\pi+\varphi$范围内的某一相位$\omega t_0$点达到极大 u_{cmax}

u_c达到极大值时的相位$\theta=\omega t_0$也可用数值近似解法求解下列超越方程

$\sin(\theta-\varphi)=-\sin\varphi e^{\theta\,tg\,\phi}$

得到。

由于R、L串联电路在零具初始条件下与正弦电压源接通后电路的回路电压方程

$$Ri+L\frac{di}{dt}=u(t)=U_m\sin(\omega t+\psi_{0\mu})$$

与g、c并联电路在零具初始条件下与正弦电流源接通后电路的节点电流方程

$$gu+c\frac{du}{dt}=is(t)=I_m\sin(\omega t+\psi_{0i})$$

完全对偶。根据对偶原理可知g、c并联电路在零具初始条件下与正弦电流源接通，其过渡电容电压为

$$u_c=\frac{I_m}{y}\left\{\sin(\omega t+\psi_{0i}-\varphi)-\sin(\psi_{0i}-\varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}\right\}$$

式中I_m为正弦电流源的振幅；ψ_{0i}为接入角；y为复导纳的模；φ为导纳角。

根据对偶原理还可以作出如下结论：参数确定的g、c并联电路在零具初始条件下接通正弦电流源时，其过渡电容电压 u_c在且仅在$\psi_{0i}=0$和$\frac{\pi}{2}\leqslant\omega t\leqslant\frac{\pi}{2}+\varphi$范围内的某一相位$\omega t_0$点达到极大值 u_{cmax}。

根据对偶原理也不难把R、C串联电路的结论推广至g、L并联电路中去。

如果把本文中串联电路中的正弦电压源与电阻视为从贮能元件L或C两端看进去的代文宁等效电路的等效内电动势与入端电阻，或把并联电路中的正弦电流源与电导视为从贮能元件C或L两端看进去的诺顿等效电路的等效内电激流与入端电导，则本文中的全部论述都可以推广至只含有一个储能元件的任何一阶复杂线性网路中去。

参　考　文　献

〔1〕关于接入角$\psi_{0\mu}$=？的探讨
高等学校电工课程教学工作通讯第12期　1981、7

〔2〕电路（电工原理Ⅰ）西安交通大学邱关源主编1978、11

〔3〕电工基础（修订本）中册　余大光编1964、9

〔4〕电工学的理论基础（第二册）　聂孟、卡兰塔罗夫著　1957、3