可及网络的测量准则

雷　银　照
（电机系）

提　要

本文阐述介于网络分析和网络综合之间的一个理论问题，分析了当一可及网络为可解网络时，怎样求故障诊断方程中所出现的与网络的拓扑结构有关的量，得出了计算公式和测量准则。

R.S.Berkowitz提出过这样的问题：假定一个网络具有已知的拓扑结构，在网络的外沿具有特定数目的可及节点（端点）或者可及网孔，在这些可及节点或可及网孔上可以施以电压、电流；可以测量电压、电流；网络的所有元件的参数值是未知的，现在通过在这些可及节点（端点）或者可及网孔上施以适当的激励，并进行适当的测量来确定那些未知参数值。R.S.Berkowitz研究了线性定常无源网络的情况。最近[1]研究了有源网络的情况。

研究这个问题具有重要的意义。它对于近代模拟电子电路和系统的故障侦察、诊断和分析具有重大的应用价值。近代的大规模集成电路，其可靠度和密集度正在不断增长，根本不能想象用以往的"直接触及法"来测量和侦察故障，只能在网络的外沿加以测试，应用系统的步骤在计算机上进行分析。

为了研究方便起见，兹约定：如果一个网络是元件参数值可解的网络，则称此网络为可解网络。

当给定的有源网络为可解网络时，从有源网络的典型支路出发，可求得有源网络拓扑分析表达式，从这表达式中又可求出一组故障诊断方程[1]，它的一般形式为

$$Q_{n\times n}=F_{n\times n}(Z_b) \tag{1}$$

Z_b是支路阻抗矩阵，F是由网络的拓扑结构及Z_b所决定的矩阵，左端$Q_{n\times n}$满足形如

$$Q_{n\times n}x=y \tag{2}$$

的方程。$x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$为在网络的可及节点或可及网孔上施加的激励，$y=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^T$为在网络的可及节点或可及网孔上测量的响应。现在的问题是：怎样利用x、y的可及性，从式（2）中解出$Q_{n\times n}$，无疑，这个问题的解决对于今后的深入研究是十分必要的。

从式（2）可见，当给定网络一组激励x时，对应就测到一组响应y，因为$Q_{n\times n}$有n^2个元素，所以将x、y代入式（2）后，就得到含有n^2个未知数的n个一次方程，显然仅有一组x、y矩阵$Q_{n\times n}$是不能求出的。为要求得$Q_{n\times n}$，我们对网络施n次激励，并相应测量n次响应，记各次施加的激励为

$$x_1=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{12}\\\vdots\\x_{1n}\end{pmatrix},\quad x_2=\begin{pmatrix}x_{21}\\x_{22}\\\vdots\\x_{2n}\end{pmatrix},\cdots,\quad x_n=\begin{pmatrix}x_{n1}\\x_{n2}\\\vdots\\x_{nn}\end{pmatrix}。$$

相应测量的n次响应为

$$y_1=\begin{pmatrix}y_{11}\\y_{12}\\\vdots\\y_{1n}\end{pmatrix},\quad y_2=\begin{pmatrix}y_{21}\\y_{22}\\\vdots\\y_{2n}\end{pmatrix},\quad\cdots,\quad y_n=\begin{pmatrix}y_{n1}\\y_{n2}\\\vdots\\y_{nn}\end{pmatrix}$$

记$Q_{n\times n}=[q_{ij}]$，将以上各组向量对应代入式（2），得到n^2个方程

$$n\text{组}\left\{\begin{array}{l}
n\text{个}\left\{\begin{array}{l}
q_{11}x_{11}+q_{12}x_{12}+\cdots+q_{1n}x_{1n}=y_{11}\\
q_{21}x_{11}+q_{22}x_{12}+\cdots+q_{2n}x_{1n}=y_{12}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
q_{n1}x_{11}+q_{n2}x_{12}+\cdots+q_{nn}x_{1n}=y_{1n}
\end{array}\right.\\
n\text{个}\left\{\begin{array}{l}
q_{11}x_{21}+q_{12}x_{22}+\cdots+q_{1n}x_{2n}=y_{21}\\
q_{21}x_{21}+q_{22}x_{22}+\cdots+q_{2n}x_{2n}=y_{22}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
q_{n1}x_{21}+q_{n2}x_{22}+\cdots+q_{nn}x_{2n}=y_{2n}
\end{array}\right.\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n\text{个}\left\{\begin{array}{l}
q_{11}x_{n1}+q_{12}x_{n2}+\cdots+q_{1n}x_{nn}=y_{n1}\\
q_{21}x_{n1}+q_{22}x_{n2}+\cdots+q_{2n}x_{nn}=y_{n2}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
q_{n1}x_{n1}+q_{n2}x_{n2}+\cdots+q_{nn}x_{nn}=y_{nn}
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

用矩阵表示，则

$$n^2\text{行}\left\{\overbrace{\begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n} & 0 & \cdots\cdots & & 0\\
0 & 0\cdots 0 & x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n} & 0\cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & \cdots\cdots & & 0 & x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n}\\
x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n} & 0 & \cdots\cdots & & 0\\
0 & 0\cdots 0 & x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n} & 0\cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & \cdots\cdots & & 0 & x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{nn} & 0 & \cdots\cdots & & 0\\
0 & 0\cdots 0 & x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{nn} & 0\cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & \cdots\cdots & & 0 & x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{nn}
\end{pmatrix}}^{n^2\text{列}}\right.
\begin{pmatrix}q_{11}\\q_{12}\\\vdots\\q_{1n}\\q_{21}\\q_{22}\\\vdots\\q_{2n}\\\vdots\\q_{n1}\\q_{n2}\\\vdots\\q_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_{11}\\y_{12}\\\vdots\\y_{1n}\\y_{21}\\y_{22}\\\vdots\\y_{2n}\\\vdots\\y_{n1}\\y_{n2}\\\vdots\\y_{nn}\end{pmatrix}\tag{3}$$

将上式简记为

$$L_{n^2\times n^2}q=y \tag{4}$$

因$Q_{n\times n}$是存在且唯一的（只要网络给定，$Q_{n\times n}$就被确定），所以q也存在且唯一，这样就必须要求（4）式中$|L_{n^2\times n^2}|\neq 0$，兹分析使$|L_{n^2\times n^2}|\neq 0$的条件

对行列式$|L_{n^2\times n^2}|$的前n列应用Laplace定理，共有$C^n_{n^2}$个n阶子式，因前n列中有抽的出n^2-n行是0元素组成的，所以有$C^n_{n^2}-1$个n阶子式均为0，这样

$$|L_{n^2\times n^2}|$$

$$=(-1)^k\begin{vmatrix}x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n}\\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n}\\ & \cdots\cdots\\ & \cdots\cdots\\ & \cdots\cdots\\ x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{nn}\end{vmatrix}\underbrace{\left.\begin{vmatrix}x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n} & 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ 0 & 0\cdots\cdots 0\ \cdots x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n}\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots 0 & x_{11}\quad x_{12}\cdots x_{1n}\\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n} & 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ 0 & 0\cdots\cdots 0\ \ x_{21}\ x_{22}\cdots x_{2n} & 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots 0 & x_{21}\quad x_{22}\cdots x_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n1} & x_{n2}\cdots\cdots x_{nn} & 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ 0 & 0\cdots\cdots 0\ \ x_{n1}\ x_{n2}\cdots x_{nn} & 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots 0 & x_{n1}\quad x_{n2}\cdots x_{nn}\end{vmatrix}\right\}n^2-n\text{行}}_{n^2-n\text{列}}$$

其中 $k=1+(n+1)+(2n+1)+\cdots+[(n-1)n+1]+1+2+3+\cdots+n$

$$=n\frac{n^2-n+2}{2}+\frac{n(n+1)}{2}$$

最后所得的这个行列式和$|L_{n^2\times n^2}|$有相同的形式，但阶数少n，若记$|L_{n^2\times n^2}|$为L_{n^2}，则新行列式为L_{n^2-n}，上式为

$$L_{n^2}=(-1)^{n\frac{n^2-n+2}{2}+\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix}x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n}\\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ x_{n1} & x_{n2}\cdots\cdots x_{nn}\end{vmatrix}\cdot L_{n^2-n}$$

同理

$$L_{n^2-n}=(-1)^{n\frac{n^2-2n+3}{2}+\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix}x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n}\\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{nn}\end{vmatrix}\cdot L_{n^2-2n}$$

再用类似的方法和记号收缩下去便知：

$$L_{3n}=(-1)^{n\frac{3n-1}{2}+\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n}\\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n}\\ \cdots & \cdots\\ x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{nn}\end{vmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ L_{2n}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$$

$$L_{2n}=(-1)^{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n}\\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n}\\ \cdots & \cdots\\ x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{nn}\end{vmatrix}\quad L_{1n}=(-1)^{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n}\\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n}\\ \cdots & \cdots\\ x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{nn}\end{vmatrix}^2$$

在计算过程中一共使用了$n-1$次Laplace定理，每次所划去的行、列的序数总和为

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(n\frac{n^2-(n-1)i+1}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right)=\frac{n(n-1)(n^2+3n+4)}{4}$$

总起来便得：

$$L_{n^2}=(-1)^{\frac{n(n-1)(n^2+3n+4)}{4}}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \cdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}^n \qquad (5)$$

上式只与$\frac{n(n-1)(n^2+3n+4)}{4}$的奇偶性有关，而与它的数值大小无关。为了便于分析和减少计算量，下面给予化简。

$$\frac{n(n-1)(n^2+3n+4)}{4}=\frac{n(n-1)[(n+4)(n-1)+8]}{4}$$

$$=\frac{n(n-1)^2(n+4)}{4}+2n(n-1)$$

而　$$\frac{n(n-1)^2(n+4)}{4}=\frac{n^2(n-1)^2+4n(n-1)^2}{4}=\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2+n(n-1)^2$$

所以$\frac{n(n-1)(n^2+3n+4)}{4}$的奇偶性和$\frac{n(n-1)}{2}$的奇偶性相同。

这样就得到计算Ln^2的公式

$$Ln^2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12}\cdots x_{1n}\\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2n}\\ \cdots & \cdots\\ x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{nn}\end{vmatrix}^n \qquad (6)$$

从公式(6)可知，为使$Ln^2\neq 0$，充分必要条件是向量

$$X_1=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{12}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\x_{1n}\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}x_{21}\\x_{22}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\x_{2n}\end{pmatrix},\quad\cdots,\quad X_n=\begin{pmatrix}x_{n1}\\x_{n2}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\x_{nn}\end{pmatrix}$$

线性无关，依此可得可解网络的

测量准则 当一可及网络是可解网络时，·为要从

$$L_{n^2\times n^2}q=y$$

中解出q，当且仅当n组施加激励

X_1，X_2，$\cdots X_n$

线性无关。

利用此准则，选取n组线性无关的激励，施加在网络外沿，对应测量出n组响应，分别对应代入式（3），即可求q。

参 考 文 献

〔1〕 林争辉：网络元件参数值可解性的一个理论，《上海交通大学学报》1982年 第2期 P46～57