论电磁感应定律两种数学表述的等价性

孙 延 昉

（物理教研室）

提　　要

目前，对电磁感应定律两种数学表述

(通量定则：$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{ds}$ 和 $\varepsilon = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{ds} + \oint_L (\vec{V}\times\vec{B})\cdot\vec{dl}$)

等价与否一问题，持例外论观点者采取提出一两个实例，说明"通量定则"有例外的方法，否定两种表述的等价性。当然，也有人认为不等价的原因是两种表述中的速度不相同。持等价论观点者则就这些实例，提出种种理由，驳倒例外论者的论点，来维护等价论。在这篇文章中，我们的方法是直接应用磁场中的高斯定理，求出磁感应通量对时间的全导数，将"通量定则"的数学形式加以变换，并导出一个等值性关系式（Ⅰ）它的意义是：仅仅由于导体回路L运动、变化所引起的S面磁通量的时间变化率，量值上等于在时刻t，回路L单位时间内所切割的磁感应线数，从而论证这两种数学表述的等价性。然后针对这些实例，将双方的论点、论据，列表对比，指出分歧的发生在于所考虑的线形回路是否前后一致确定。最后，指出有人利用导数：$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla$，证明它们等价时，在数学推导过程中所出现的一些错误。

〈一〉

法拉第电磁感应定律可以用公式：

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \qquad (1)$$

来表述，它的意义是导体回路中感应电动势ε的大小与穿过回路磁通量的变化率 $\frac{d\phi}{dt}$ 成正比，负号代表感应电动势的方向，式中各物理量的单位已经适当选定使其比例系数为1。

设磁感应强度为 $\vec{B}(x, y, z, t)$ 如果规定（定义）通过以任意形状导体回路为周线的任意曲面S的总磁感应通量（简称磁通量）为

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot ds \qquad (2)$$

则法拉第电磁感应定律就可以写成下面的等式：

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{ds} \qquad (3)$$

这个等式有时叫“通量定则”。式中ε表示感应电动势的总值，$\vec{ds}$是曲面s上的面积元，它的方向与该点处S的法线方向相同。在这里假定$\vec{B}$和Φ在积分区域内都是坐标和时间的连续可导函数。显然（3）式与（1）式是完全等价的。

如果把基于涡旋电场和洛仑兹力的数学表达式

（即 $\oint_L \vec{E}_{涡}\cdot \vec{d\iota} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \vec{ds}$和$\vec{F}_{洛} = q\vec{V}\times\vec{B}$ ）

建立起来的电磁感应定律的另一表达式写出来，就是：

$$\varepsilon = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \vec{ds} + \oint_L (\vec{V}\times\vec{B})\cdot \vec{dl} \qquad (4)$$

对于（4）式要注意以下两点：

①建立（4）式时物理上的依据是：电动势的定义以及假设了产生感应电动势的根源有二：一是$\vec{B}$本身变化而激发涡旋电场，二是因运动电荷受到洛仑兹力的作用等；对（4）式右端各项的物理解释：第一项是因激发涡旋电场而产生的感生电动势，第二项就是因导线L切割磁感应线而产生的动生电动势。

②倘若第一项为零，单就第二项来考虑导线L可以是闭合的，也可以是不闭合的，$\vec{V}$为L上线元$\vec{dl}$的速度，L的运动形式没有限制，一般地说，$\vec{dl}$不同速度也不相同。

所谓电磁感应定律的两种数学表述的等价性，就是指“通量定则”（3）式与（4）式是否等价的问题。这是目前人们热烈讨论的，也正是本文所要论述的问题。

为了准确显明地比较、判断以上两种表达式是否等价，有必要将（3）式的数学形式加以变换。

既然，根据实验回路中感应电动势产生于磁通量的变化，而通过任意曲面S磁通量的变化产生的原因不外两个方面：一方面由于$\vec{B}$本身的变化，另一方面由于曲面S的周线L（相当于导体回路）的运动、变化，那么，倘若能分别算出其磁通量的增量，然后将二者迭加便可得到磁通量的总增量。设S不变，则仅仅由于$\vec{B}$随时间t的变化，在时间dt内磁通量的增量为：

$$d_1\Phi = \left(\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \vec{ds}\right)dt \qquad (5)$$

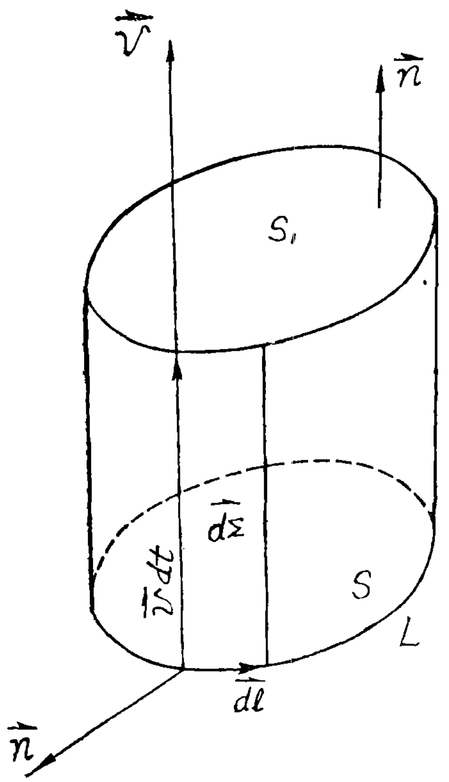
再设B不变，而仅仅L运动、变化，并设S面在经过时间dt后的位置和大小为S_1如图A所示，则通过S面的磁通量的增量，显然是：

$$d_2\Phi = \iint_{S_1} B_n ds - \iint_S B_n ds \qquad (6)$$

以L表示S面的周线，在dt时间内，这一周线L由于本身的位移和变形而扫过一曲面Σ，这个面和S及S_1面组成一闭合曲面。设$\vec{n}$为S和S_1面上的法线方向，取在相同的一侧，若对S_1面来说是外法线，对S面来说则为内法线，对于Σ面也取外法线。于是对这个闭合曲面应用磁场中的高斯定理：

$$\oiint_s \vec{B}\cdot \vec{ds} = 0$$

则得
$$\iint_{S_1} B_n ds - \iint_{S} B_n ds + \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0 \qquad (7)$$



式中第二项积分前面的负号来源于S面的法线为内法线。

显然，Σ面上的面积元$\vec{d\Sigma}$的两邻边为曲线L上的一线元$\vec{dl}$及$\vec{V}dt$，而$\vec{V}$为线元$\vec{dl}$的速度。这里的讨论都是相对于某一静止坐标系而言，例如相对于产生磁场的磁铁或载流线圈静止的坐标系。一般说，不同的线元有不同的速度，运动形式没有限制，$\vec{dl}$，$\vec{V}$和$\vec{d\Sigma}$的方向间的关系如图A所示，L的回转方向必须选取得与S的法线方向$\vec{n}$成右手螺旋关系。所以$d\vec{\Sigma} = \vec{dl} \times \vec{V}dt$将此式代入(7)式，并考虑到(6)式，则得

$$d_2\Phi = \iint_{S_1} B_n ds - \iint_{S} B_n ds$$

$$= -\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$= -\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \left(\vec{dl} \times \vec{V}dt \right) \qquad (6a)$$

再应用矢量混合积公式：$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$，

得
$$\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot (\vec{dl} \times \vec{V}dt) = dt \oint_L (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

代入(6a)式，得
$$d_2\Phi = -dt \oint_L \left(\vec{V} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{dl} \qquad (6b)$$

将(5)式和(6b)式相加就得到两种变化同时存在时磁通量的总增量：

$$d_1\Phi + d_2\Phi = \left(\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds}\right) dt - dt \oint_L \left(\vec{V} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{dl}$$

于是磁通量的时间变化率为：

$$\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = \iint_S \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \cdot \vec{ds} - \oint_L (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \qquad (8)$$

将(8)式代入(3)式，则“通量定则”的数学形式就

变成为
$$\varepsilon=-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}+\oint_L(\vec{V}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} \qquad (9)$$

很明显，（9）式与（3）式是等价的。如果能证明（8）式与（4）式等价，那么（3）式与（4）式也就是等价的了。在讨论它们等价与否之前，先对（9）式说明以下三点：

①推导中物理上的依据为法拉第电磁感应定律，磁场中的高斯定理以及磁通量的定义等；右端两项的物理解释：第一项表示由于磁场$\vec{B}$本身随时间t变化而曲面S不变时，通过S磁通量的时间变化率，第二项表示$\vec{B}$不变，仅仅因周线L（或回路L）运动、变化所引起S面的磁通量的时间变化率。

②由于L是S的周线，所以L必须是闭合线，$\vec{V}$表示线元$d\vec{l}$的速度，一般地，不同的线元，速度不同，运动形式没有限制。

③从推导过程可以看出，（8）式右端第二项表示的是仅仅由于周线L运动、变化所引起的通过S面的磁通量的时间变化率，而它在量值上就等于在由t到t+dt时间内通过Σ面的磁通量（式6a）的时间变化率。再从Σ面的生成过程来看，通过Σ面的全部磁感应线都必然地被运动、变化中的曲面S的周线L在时间dt内所切割，所以它恰好就是在时刻t，周线L在单位时间内所切割的磁感应线数。进一步分析可以看到，这个等值性关系是一个普遍成立的必然关系，不是一个偶然存在的关系。不难理解这和自然界磁感应线都是闭合线有关，也就是和自然界不存在磁单极有关，不然这个等值性关系是不成立的。为了使这个等值性关系更为明确，用一个等式把它表示出来，则得：

$$\boxed{\text{仅由导体回路L运动、变化所引起的S面磁通量的时间变化率}} = \boxed{\text{在时刻t，由导体回路L单位时间内所切割的磁感应线数}} \qquad (\mathrm{I})$$

这一等值性关系（1）对于讨论（3）、（4）两式的等价性很有用，因为根据上面这个等值性关系，这两个量在计算感应电动势时可以互相代换，实质上它们本是一回事，也就是说（4）、（9）两公式右端第二项从数学形式上看相等是必然的。

现在讨论电磁感应定律两种表达式的等价性：

如果把(9)式和（4）式对比分析，便可以看出，虽然导出它们的依据和右端各项的物理解释都有很大的差别，一个是宏观的实验规律，另一个揭露了感应电动势的微观本质，但在数学形式上几乎没有区别。如果两式相对应的物理量也都两两相同，则两式等价不言自明。但是对于同一电磁感应现象，两式相对应的物理量是否完全相同呢？这里有两个问题需要讨论：

第一、两式中的速度$\vec{V}$是否完全相同？

有人认为（4）式中$\vec{V}$为$d\vec{l}$的速度，而在（9）式中$\vec{V}$只能是回路整体的平动速度；另有人认为（4）式中$\vec{V}$没有限制，而在（9）式中，$\vec{V}$必须是常矢，即运动形式有限制；也有人认为（4）式中的$\vec{V}$为导体运动的速度，在（9）式中$\vec{V}$指回路的运动速度等，总之二式速度不尽相同。果真如此，则二式显然不等价，甚至也可以说（4）式优于（9）式。虽然这些看法不是一点道理也没有，但有些例证说明，事实並非如此，理论上也没有必要加上这些限制。所以本文认为对于同一电磁感应现象，两式中的速度完全相同，运动形式没有限制。

第二、两式中的L是否必须闭合？

前面曾说过，当两式中第一项为零，只考虑第二项时，则在（4）式中L可以闭合，也可以不闭合，但在（9）式中L必须是闭合的。由此可见，它们的适用范围不同，（4）式适用于闭合回路和非闭合回路，而（9）式则仅仅适用于闭合回路，在这个适用范围的意义上它们是不等价的，从而“通量定则”（3）式与（4）式也是不等价的。但是如果把L限制在闭合曲线范围之内，联系（Ⅰ）式考虑，则（4）、（9）两式完全相同（由麦克斯威“涡旋电场的假设”可知两式第一项相等；由“等值性关系（Ⅰ）”可知两式第二项相等），因此对于同一问题应用这两个公式分别计算感应电动势必能得到相同的结果，所以在这个L闭合范围内它们确切是等价的。当然，如果在L不闭合范围内把运动的不闭合导体理解成某一适当选取的闭合回路的运动部分，此回路中不含此导体的部分，应选得其感应电动势为零，则根据关系（Ⅰ）可知，分别应用（9）、（4）两式也必然可以得到相同的计算结果，从而可以导出在计算感应电动势时，它们的适用范围完全一样的结论。

根据以上讨论可以断定：（9）式和（4）式是完全等价的。于是“通量定则”（3）式和（4）式也是完全等价的了。这就是本文对电磁感应定律的两种数学表述等价性的结论。

<二>

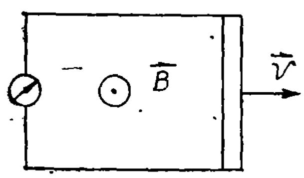
根据以上的讨论可以判断，下面的一些实例不是“通量定则”的例外，可能是解决实际问题时思想上的混乱。为了避免思想上的无谓混乱，辨明它们是否为“通量定则”的例外，先在方法上明确下面的约定：

（1）只有针对同一问题，分别应用（4）、（9）或（3）两个公式，才好分辨它们等价与否。所谓同一问题，具体地说，就是指同一电磁感应现象，同一磁场B，同一曲面S，同一周线L做同一形式的运动、变化，相对应的线元$\vec{dl}$的速度V相等。既然L一定是运动、变化中的曲面S的周界线，所以它必然是闭合的，这一关系在L和S运动、变化过程中必须始终满足。由于在实际问题中，导体回路就相当于曲面S的周界线L，所以积分回路应尽可能是线形的，这样其计算结果才能唯一确定，才好比较它们给出的结果是否一致。

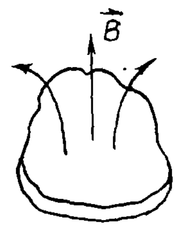
（2）在分析、解决问题时特别须要考虑（4）、（9）两公式中，回路的运动、变化是否一致及第一项和第二项是否对应相等。

同意了上面的约定，再把对这些实例的不同看法，列成一个表，通过对照、分析、判别正误，可以看到例外论者根据对某一问题计算结果的不同，否定（4）、（9）或（3）两公式的等价性。等价论者则认为这两个公式在计算同一电磁感应现象的感应电动势时，所得的结果是一致的，因此无理由说它们不等价，它们是等价的。

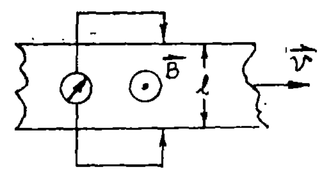
分歧的发生在于所考虑的线形闭合回路是否前后一致确定。如果应用（9）式计算时考虑的回路不动，而应用（4）式计算时所考虑的回路运动，两次计算结果不一致，于是根据它判定（9）式与（4）式不等价，那不是分析问题时思维上的混乱又是什么？



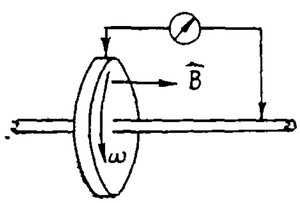
图一



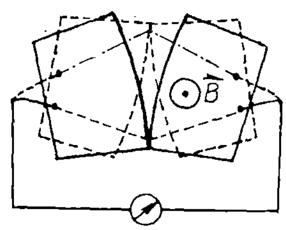
图二



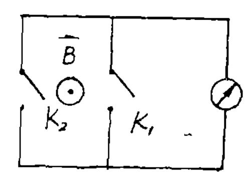
图三



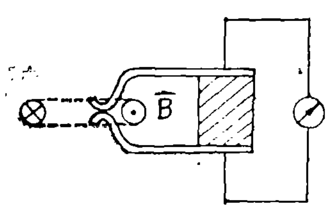
图四



图五



图六



图七

<三>

最后，说明一下有人利用导数：$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)$ 推导出"通量定则"的表达式（9）的过程中可能有错误（∇为哈密顿算子）

现将其推导步骤简述如下：

$$\because \quad \varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\iint_s\vec{B}\cdot\vec{ds}$$

$$又 \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)$$

$$\therefore \quad \varepsilon=-\iint_s\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{ds}-\iint_s(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{B}\cdot\vec{ds}$$

根据二重矢量积公式：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$$有 \quad \nabla\times(\vec{V}\times\vec{B})=\vec{V}(\nabla\cdot\vec{B})-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{V})$$

$$=\vec{V}(\nabla\cdot\vec{B})-(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$于是 \quad \varepsilon=-\iint_s\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{ds}-\iint_s[\vec{V}(\nabla\vec{B})-\nabla\times(\vec{V}\times\vec{B})]\vec{ds}$$

再虑虑到 $\nabla\cdot\vec{B}=O$ 　并应用斯托克斯定理，则得

$$\varepsilon=-\iint_s\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{ds}+\iint_s\nabla\times(\vec{V}\times\vec{B})\cdot\vec{ds}$$

$$=-\iint_s\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{ds}+\oint_L(\vec{V}\times\vec{B})\cdot\vec{dl} \qquad (9)$$

可以看出，上面推导过程中有两个地方值得提出商量：

（1）将微分算子∇看成一个普通矢量合适否？

微分算子∇和普通矢量不同，它既有矢量性又有微分性，它不作用于某一函数便毫无意义，因此在运算过程中，它既要服从微分运算规则，也要服从矢量运算规则。在运算时应先按微分规则运算，然后再按矢量运算规则调整。在上面的推导中，直接按二重矢量积公式展开，没有考虑算子∇的微分性，这就错了，何况$\vec{B}(\nabla\cdot\vec{V})$ 不能写成$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{B}$呢！

可以证明，正确的关系式是：$\nabla\times(\vec{V}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{V}-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{V})-(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{V}(\nabla\cdot\vec{B})$。

（2）在这里，求导运算和积分运算的顺序无条件地任意交换，可以吗？

如果将（8）式稍加变换就可以看出对于$\frac{d}{dt}\iint_s \vec{B}\cdot\vec{ds}$式里边的求导运算和积分运算不可无条件地任意交换顺序。

果然，利用上式将（8）式变换如下：

$$\frac{d}{dt}\iint_s \vec{B}\cdot\vec{ds}=\iint_s \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{ds}-\oint_L(\vec{V}\times\vec{B})d\vec{l}$$

$$=\iint_s \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{ds}-\iint_s \nabla\times(\vec{V}\times\vec{B})\cdot\vec{ds}\qquad\text{（斯托克斯定理）}$$

$$=\iint_s\left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{B}(\nabla\cdot\vec{V})-(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{V}\right]\vec{ds}$$

$$=\iint_s \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot\vec{ds}+\iint_s\left[\vec{B}(\nabla\cdot\vec{V})-(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{V}\right]\vec{ds}$$

由此可见，若（8）式成立，则

$$\frac{d}{dt}\iint_s \vec{B}\cdot\vec{ds}\text{不等于}\iint_s \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot\vec{ds}$$

$$\text{除非}\quad\iint_s\left[\vec{B}(\nabla\cdot\vec{V})-(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{V}\right]\vec{ds}=0$$

也就是说，在这里没有附加条件就将求导运算和积分运算顺序调换是不允许的。很明显，如果要导出（9）式，则首先必须把$\vec{V}$看成常矢，这样恰好能使前面最后一个等式得到满足。

参　考　文　献

〔1〕　赵凯华　陈熙谋著　电磁学

〔2〕　曹昌祺著　电动力学

〔3〕　程守洙　江之永主编，《普通物理学》第二册（第三版）

〔4〕　A. A. 富拉索夫著　宏观电动力学　罗零译　高等教育出版社1959年9月第一版

〔5〕　R. P. Feynman,　The Feynman Lecture on Physics, Vol. Ⅱ

〔6〕J. D. 克劳斯著　电磁学　安绍萱译　人民邮电出版社1979年3北京第一版。

〔7〕E. M. 珀塞尔著　电磁学　《伯克利物理学教程》第二卷　南开大学物理系译　科学出版社1979年6月第一版

〔8〕　大学物理　1982年2期1983年3期，8期

〔9〕　物理通报　1982年2期