一边固定对边自由另两边点支承的矩形板

王本瑞　　李桂生

（力学教研室）　（计算中心）

提　　要

在弹性薄板理论中，有些板的边界条件比较复杂，难于求解。但由于工程需要，人们往往采取简化近似的办法求解，很多问题至今尚未得到精确的解答。

本文在［1］［2］的基础上，引用广义简支边的概念和叠加原理，由解微分方程着手，结合边界条件和自由角点条件，求得矩形板在一边固定、对边自由、另两边有点支承下的精确解。文中最后，计算了正方形在板均布荷载作用下的实例。从计算的结果看，这个解法是有效的。

一、引　　言

设矩形板如图1所示，$y=0$边为固定边，$y=b$边为自由边，$x=o$及$x=a$边的$\frac{b}{3}$处，各有一个点支承。板受均布荷载q作用。此时，所求解的问题可归结为：

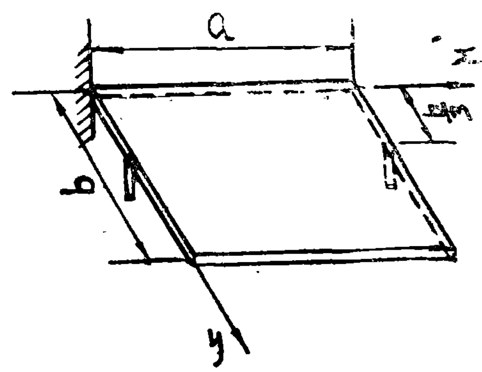

图 1

在板的边界内，须满足偏微分方程

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=\frac{q}{D} \qquad (a)$$

其中，D为抗弯刚度。

在板的边界上，满足下列边界条件：

$$(W)_{y=0}=\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=0}=0 \qquad (b)$$

$$\left.\begin{aligned}&-D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}\right]_{y=b}=0\\&\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{y=b}=0\end{aligned}\right\}(C)$$

$$\left.\begin{aligned}&-D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}\right]_{x=0}=P''\delta\left(y-\frac{b}{3}\right)\\&-D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}\right]_{x=a}=P'\delta\left(y-\frac{b}{3}\right)\end{aligned}\right|(d)$$

$$(W)_{\substack{x=0\\ y=\frac{b}{3}}}(W)_{\substack{x=a\\ y=\frac{b}{3}}}=0 \qquad (e)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\ x=a}}=0 \qquad (f)$$

其中$\delta(y)$为狄拉克函数。此外。由于角点（o，b），（a，b）为自由，其集中力为零，因此在角点上还要求

$$(R)_{\substack{(0,b)\\ (a,b)}}=-2D(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{(0,\ b)\\ (a,\ b)}}=0 \qquad (g)$$

二、迭加法的组成部分

A、设矩形板的三边为简支边，$y=b$边为广义简支边如图2所示。沿$y=b$边各点的挠度由正弦级数表示为：

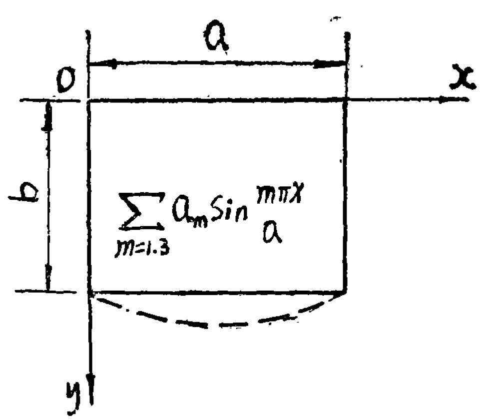

图2

$$(W)_{y=b}=\sum_{m=1\cdot3\cdots}a_m \sin\frac{m\pi x}{a}$$

测板的弯曲面等为：

$$W=\sum_{m=1\cdot3\cdots}\frac{(1-\mu)a_m}{2\,\mathrm{Sh}\alpha_m}\left\{\left(\frac{2}{1-\mu}+\alpha_m \mathrm{cth}\alpha_m\right)\mathrm{Sh}\frac{m\pi y}{a}\right.$$

$$\left.-\frac{m\pi y}{a}\mathrm{Ch}\frac{m\pi y}{a}\right\}\sin\frac{m\pi x}{a} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{1-\mu}{2a}\pi\sum_{m=1,3\cdots}\frac{m a_m}{Sh\alpha_m}\times\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right.$$

$$\left.+\alpha_m cth\alpha_m\right)Sin\frac{m\pi x}{a} \qquad (2)$$

$$(\bar{V}_y)_{y=b}=\frac{D(1-\mu)^2\pi^3}{2a^3}\sum_{m=1,3} m^3 a_m\times\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}Cth\alpha_m\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_m}{Sh^2\alpha_m}\right)Sin\frac{m\pi x}{a} \qquad (3)$$

$$(\bar{V}_x)_{x=a}=2D\frac{(1-\mu)^2\pi^2}{a^3}\sum_{m=1,3\cdots}\frac{a_m}{m}$$

$$\times\sum_{i=1}\frac{i^3 Cos i\pi}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}Sin\frac{i\pi y}{b} \qquad (4)$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=-D(1-\mu)^2\frac{\pi^2}{a^2}\sum_{m=1,3.} m^2 a_m$$

$$\times\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}cth\alpha^m+\frac{\alpha_m}{Sh^2\alpha_m}\right) \qquad (5)$$

式中的 $\alpha_m=\frac{m\pi b}{a}$。

B、设矩形板的$y=0$、$y=b$这两边为简支边、$X=0$、$X=a$这两边为广义简支边如图3所示。沿$X=0$、$X=a$边的挠度用正弦级数表示为：

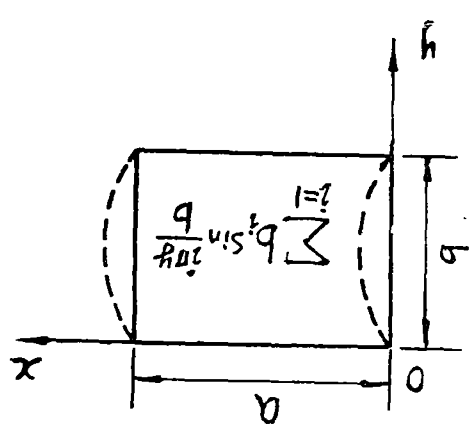

图3

$$(W)_{\substack{x=0\\x=a}}=\sum_{i=1} b_i Sin\frac{i\pi y}{b}$$

于是得到

$$W=\frac{1-\mu}{2}\sum_{i=1}b_i\times\left\{\frac{ch\beta_i-1}{Sh\beta_i}\left[\left(\frac{\beta_i}{sh\beta_i}-\frac{2}{1-\mu}\right)sh\frac{i\pi x}{b}+\frac{i\pi x}{b}ch\frac{i\pi x}{b}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{2}{1-\mu}ch\frac{i\pi x}{b}-\frac{i\pi x}{b}sh\frac{i\pi x}{b}\right\}Sin\frac{i\pi y}{b}\qquad(6)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{4}{b}\sum_{i=1}\frac{bi}{i}\times\sum_{m=1,3\cdots}m$$

$$\times\frac{(2-\mu)\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2}Sin\frac{m\pi x}{a}\qquad(7)$$

$$(\overline{V}_y)_{y=b}=D\frac{4(1-\mu)^2\pi^2}{b^3}\sum_{i=1}\frac{b_i\cos i\pi}{i}$$

$$\times\sum_{m=1,3\cdots}\frac{m^3}{\left(\frac{a^2}{b}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2}Sin\frac{m\pi x}{a}\qquad(8)$$

$$(\overline{V}_x)_{x=a}=\frac{D(1-\mu)^2\pi^3}{2b^3}\sum_{i=1}i^3bi\frac{ch\beta i-1}{sh\beta i}$$

$$\times\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta i}{sh\beta i}\right)sin\frac{i\pi y}{b}\qquad(9)$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=\frac{D(1-\mu)^2\pi^2}{b^2}\sum_{i=1}i^2b_i\frac{Ch\beta i-1}{Sh\beta i}\times\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta i}{Sh\beta i}\right)Cos i\pi\qquad(10)$$

$$(W)_{\substack{x=a\\y=\frac{b}{3}}}=\sum_{i=1}b_iSin\frac{i\pi}{3}\qquad(11)$$

式中的　$\beta i=\frac{i\pi a}{b}$

C、设有一四边简支的矩形板，沿 $y=0$ 边作用了分布弯矩如图4所示：

$$M(x)=\sum_{m=1,3\cdots}E_mSin\frac{m\pi x}{a}$$

求得板的弯曲面等为：

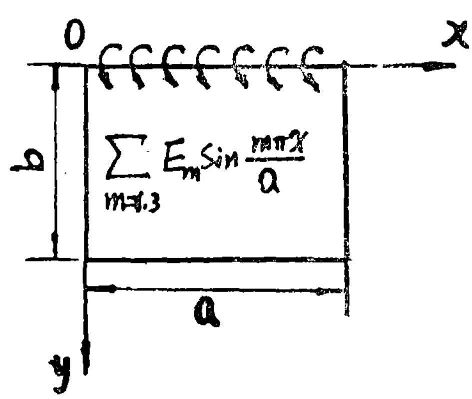

图4

$$W=\frac{a^2}{2D\pi^2}\sum_{m=1,3\cdots}\frac{E_m}{m^2}\left[-\frac{\alpha_m}{Sh^2\alpha_m}Sh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}Sh\frac{m\pi y}{a}\right.$$

$$\left.+Cth\alpha_m\cdot\frac{m\pi y}{a}Ch\frac{m\pi y}{a}\right]Sin\frac{m\pi x}{a} \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{a}{2\pi D}\sum_{m=1,3\cdots}\frac{E_m}{m}\left[Cth\alpha_m-\frac{\alpha_m}{Sh^2\alpha_m}\right]Sin\frac{m\pi x}{a} \quad (13)$$

$$(\overline{V}_y)_{y=b}=-(1+\mu)\frac{\pi}{2a}\sum_{m=1,3}\frac{mE_m}{Sh\alpha_m}$$

$$\times\left(1+\frac{1-\mu}{1+\mu}\alpha_m cth\alpha_m\right)Sin\frac{m\pi x}{a} \quad (14)$$

$$(\overline{V}_x)_{x=a}=\frac{2}{a}\sum_{i=1}\sum_{m=1,3\cdots}\frac{E_m i\left[\frac{b^2}{a^2}+(2-\mu)\frac{i^2}{m^2}\right]}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}$$

$$\times Cosm\pi\ Sin\frac{i\pi y}{b} \quad (15)$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=-(1-\mu)\sum_{m=1,3\cdots}\frac{E_m cosm\pi}{Sh\alpha_m}(\alpha_m cth\alpha_m-1) \quad (16)$$

D、在均布荷载q作用下，四边为简支的矩形板，其板的弯曲面等为：

$$W=\frac{4qa^4}{D\pi^5}\sum_{m=1,3\cdots}\frac{1}{m^5}\left\{1-Ch\frac{m\pi y}{a}+\frac{m\pi y}{2a}sh\frac{m\pi y}{a}\right.$$

$$+\frac{Ch\alpha_m-1}{2Sh\alpha_m}\left[\frac{m\pi y}{a}ch\frac{m\pi y}{a}-2\left(1-\frac{\alpha_m}{2sh\alpha_m}\right)\right.$$

$$\left.\left.\times sh\frac{m\pi y}{a}\right]\right\}Sin\frac{m\pi y}{a} \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{2qa^3}{D\pi^4}\sum_{m=1,3\cdots}\frac{1}{m^4}$$

$$\times\left[th\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\alpha_m/2}{ch^2\frac{\alpha_m}{2}}\right]Sin\frac{m\pi x}{a} \quad (18)$$

$$(\overline{V}_y)_{y=b}=-\frac{2qa}{\pi^2}\sum_{m=1,3\cdots}\frac{1}{m^2}\left[(3-\mu)th\frac{\alpha_m}{2}\right.$$

$$\left.-(1-\mu)\frac{\frac{\alpha_m}{2}}{ch^2\frac{\alpha_m}{2}}\right]Sin\frac{m\pi x}{a} \quad (19)$$

$$(\overline{V}_x)_{x=a}=-\frac{2qb}{\pi^2}\sum_{i=1,3\cdots}\frac{1}{i^2}\left[(3-\mu)\,\mathrm{th}\frac{\beta_i}{2}-(1-\mu)\frac{\frac{\beta_i}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{\beta_i}{2}}\right]\sin\frac{i\pi y}{b} \qquad (20)$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=\frac{4(1-\mu)}{\pi^3}qa^2\sum_{m=1,3\cdots}\frac{1}{m^3}\left(\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{\alpha_m}{2}}\right) \qquad (21)$$

E、对于以上的几个部分，角点（0，b），（a，b）是被支承的，要使它们有位移，应叠加以下刚体位移，即

$$W=Ky \qquad (22)$$

K为一常数，于是

$$\left(\frac{\partial w}{\partial w}\right)_{y=0}=K=\frac{4K}{\pi}\sum_{m=1,3\cdots}\frac{1}{m}\,\mathrm{Sin}\frac{m\pi x}{a} \qquad (23)$$

$$(W)_{\substack{x=a\\y=\frac{b}{3}}}=\frac{1}{3}Kb \qquad (24)$$

三、以迭加法解矩形板的弯曲问题

要满足固定边的条件（b），只须叠加由算式（2）、（7）、（13）、（18）、（23）分别所给斜度，并使它们的和等于零。于是得到

$$\frac{(1-\mu)\pi}{4}\frac{a_m}{\mathrm{Sh}\alpha_m}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}+\alpha_m\mathrm{cth}\alpha_m\right)+\frac{2}{m^2}\frac{Ka}{\pi}$$

$$+\frac{2a}{b}\sum_{i=1}\frac{b_i}{i}\frac{(2-\mu)\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2}+\frac{a^2E_m}{4\pi Dm^2}\left(\mathrm{Cth}\alpha_m-\frac{\alpha_m}{\mathrm{Sh}^2\alpha_m}\right)$$

$$+\frac{qa^4}{D\pi^4}\cdot\frac{1}{m^5}\left(\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\alpha_m/2}{\mathrm{ch}^2\frac{\alpha_m}{2}}\right)=0 \qquad m=1,3,5\cdots\cdots \qquad (25)$$

要满足自由边的条件（C），又须叠加算式（3）、（8）、（14）、（19）分别所给剪力，并使它们的和等于零。于是得到

$$\frac{(1-\mu)^2}{2}\pi\alpha_m\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}\mathrm{cth}\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\mathrm{sh}^2\alpha_m}\right)+4(1-\mu)^2\frac{a^3}{b^3}\sum_{i=1}b_i\frac{\cos i\pi}{i\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2}$$

$$-\frac{(1+\mu)a^2}{2\pi D}\frac{E_m}{m^2\mathrm{sh}\alpha_m}\left(1+\frac{1-\mu}{1+\mu}\alpha_m\mathrm{cth}\alpha_m\right)-\frac{qa^4}{D\pi^4}\cdot\frac{2}{m^5}\left[(3-\mu)\mathrm{th}\frac{\alpha_m}{2}-(1-\mu)\frac{\alpha_m/2}{\mathrm{ch}^2\frac{\alpha_m}{2}}\right]=0$$

$$m=1,3,5,\cdots \tag{26}$$

要满足沿x=a的边界条件(d),只须叠加算式(4)、(9)、(15)、(20)分别所给剪力,并使它们的和等于支点(a、b/3)的反力的级数展开式:

$$P'\delta\left(N-\frac{b}{3}\right)=\frac{2}{b}\sum_{i=1}\sin\frac{i\pi y}{b}\int_{\frac{b}{3}-\triangle}^{\frac{b}{3}+\triangle}q\sin\frac{i\pi y}{b}dy=\frac{2p'}{b}\sum_{i=1}\sin\frac{i\pi}{3}\sin\frac{i\pi y}{b}$$

于是边界条件(d)写成:

$$-\frac{qb^4}{D\pi^4}\frac{1}{i^5}\left[(3-\mu)\text{th}\frac{\beta i}{2}-(1-\mu)\frac{\beta i/2}{\text{ch}^2\frac{\beta i}{2}}\right]+(1-\mu)^2\frac{b^3}{a^3}\cos i\pi\sum_{m=1,3\cdots}\frac{\alpha_m}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}$$

$$+\frac{(1-\mu)^2\pi}{4}b_i\frac{\text{ch}\beta i-1}{\text{sh}\beta i}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta i}{\text{sh}\beta i}\right)-\frac{1}{i^2\pi^2}\frac{b^3}{Da}\sum_{m=1\cdot3\cdots}\frac{Em}{m}\frac{\left[\frac{b^2}{a^2}+(2-\mu)\frac{i^2}{m^2}\right]}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}$$

$$=\frac{p'b^2}{D\pi^2i^3}\sin\frac{i\pi}{3}$$

$$i=1、2、3\cdots\cdots \tag{27}$$

上式第一项,当i为偶数时应取为零。根据对称性,X=0边,将得到同样的方程。

又为了满足支座(a、$\frac{b}{3}$)处的条件(e),只须叠加算式(11)、(24)分别所给挠度,并使它们的和等于零。于是得到

$$\sum_{i=1}b_i\sin\frac{i\pi}{3}+\frac{1}{3}Kb=0 \tag{28}$$

根据对称性,在(0、$\frac{b}{3}$)支座处,将得到同样的方程。

为了满足角点(a、b)处的条件(g),只须叠加算式(5)、(10)、(16)、(21)分别所给的角点力,并使它们的和等于零。于是得到

$$-\sum_{m=1\cdot3\cdots}m^2a_m\left[\frac{1+\mu}{1+\mu}\text{cth}\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\text{sh}^2\alpha_m}\right]+\frac{a^2}{b^2}\sum_{i=1\cdot\cdot}i^2b_i\cos i\pi\frac{\text{ch}\beta i-1}{\text{sh}\beta i}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta i}{\text{sh}\beta i}\right)$$

$$+\frac{1}{(1-\mu)\pi^2}\frac{a^2}{D}\sum_{m=1\cdot3\cdots}\frac{Em}{\text{sh}\alpha_m}\left(\alpha_m\text{cth}\alpha_m-1\right)+\frac{4}{(1-\mu)\pi}\frac{qa^4}{D\pi^4}\sum_{m=1\cdot3}\frac{1}{m^3}\left(\text{th}\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\alpha_m/2}{\text{ch}^2\frac{\alpha_m}{2}}\right)=0 \tag{29}$$

由于对称,从另一角点(0.b)处的条件,将得到同样的方程。这样,我们就得到(25)、(26)、(27)、三个无穷联立方程及(28),(29)两个单独的方程,于是就可以解出末知数,a_m、bi、E_m、K、p′(P′=p″),从而即可求得板的挠度及内力。

四、计算实例

考虑在均布荷载作用下的正方形板。此时,a=b,取μ=0.3。在计算中,a_m、bi、E_m各取30项,连同K、p′共有92个未知数。由计算机自方程(25)、(26)、(27)、(28)、

（29）得到：

$a_m=0.699474\dfrac{qa^4}{D\pi^4}$	0.290054×10^{-2}	0.36834^{-3}
0.995418×10^{-4}	0.379101×10^{-4}	0.176752×10^{-4}
0.939085×10^{-5}	0.546238×10^{-5}	0.339491×10^{-5}
0.221922×10^{-5}	0.150954×10^{-5}	0.106041×10^{-5}
0.765051×10^{-6}	0.564554×10^{-6}	0.424760×10^{-6}
0.325034×10^{-6}	0.252465×10^{-6}	0.198729×10^{-6}
0.158318×10^{-6}	0.127502×10^{-6}	0.103707×10^{-6}
0.851231×10^{-7}	0.704560×10^{-7}	0.587686×10^{-7}
0.493724×10^{-7}	0.417558×10^{-7}	0.355342×10^{-7}
0.304155×10^{-7}	0.261759×10^{-7}	0.226422×10^{-7}

$b_i=-2.20754\dfrac{qa^4}{D\pi^4}$	-0.358827	0.234078×10^{-1}
0.539438×10^{-1}	0.310291×10^{-1}	0.582887×10^{-2}
-0.344182×10^{-2}	-0.219197×10^{-2}	0.243718×10^{-2}
0.452326×10^{-2}	0.350444×10^{-2}	0.114419×10^{-2}
-0.283556×10^{-3}	-0.222535×10^{-3}	0.647841×10^{-3}
0.119655×10^{-2}	0.101202×10^{-2}	0.387791×10^{-3}
-0.568254×10^{-4}	-0.493696×10^{-4}	0.255168×10^{-3}
0.475589×10^{-3}	0.419523×10^{-3}	0.172379×10^{-3}
-0.187633×10^{-4}	-0.174797×10^{-4}	0.12348×10^{-3}
0.233424×10^{-3}	0.211052×10^{-3}	0.89628×10^{-4}

$E_m=-24.5068\dfrac{qa^2}{\pi^4}$	6.56689	6.72394
5.74234	4.94416	4.34151
3.88168	3.52512	3.24464
3.02124	2.84139	2.69521
2.57537	2.47635	2.39393
2.32485	2.26658	2.21712
2.17489	2.13863	2.10732
2.08016	2.05648	2.03573
2.01748	2.00134	1.98703
1.97428	1.96288	1.95265

$K=0.70316\dfrac{qa^3}{D}$　　　　$P'=P''=-56.0266qa^2$

从所得结果可以看出，系数a_m与b_i收斂得快，E_m收斂较慢。当各系数都取30项，E_{30}等于E_1的7.9%。若取更多的项，E_m的后续项将更小下去。由于计算机的条件有限，仅算至此。

计算板内及板边几个点的挠度，以计算得到的a_m、b_i、E_m和K的值代入到挠度公式（1）、（6）、（12）、（22）并与挠度公式（17）迭加起来，即得到板的总挠度方程。代入诸点坐标，便求得下表列出的一些点的挠度值（单位qa^4/D）。

从表中可以看出，最大挠度发生在自由边y＝b的中点处，其值为0.07834528qa^4/D。与文献［1］相比减少了38.97%。

表1　正方形板的各点挠度（单位 $\frac{qa^4}{\triangle}$）

y \ x	0	0.125	0.25	0.375	0.5
0.000a	0	0	0	0	0
0.0625a	-0.508377×10^{-3}	0.428537×10^{-4}	0.332561×10^{-3}	0.470643×10^{-3}	0.511315×10^{-3}
0.125a	-0.135783×10^{-2}	0.294436×10^{-3}	0.128094×10^{-2}	0.177204×10^{-2}	0.191893×10^{-2}
0.1875a	-0.195847×10^{-2}	0.993161×10^{-3}	0.284904×10^{-2}	0.380179×10^{-2}	0.409094×10^{-2}
0.25a	-0.191219×10^{-2}	0.238541×10^{-2}	0.509652×10^{-2}	0.651587×10^{-2}	0.695271×10^{-2}
0.3125a	-0.77629×10^{-3}	0.470916×10^{-2}	0.809004×10^{-2}	0.989721×10^{-2}	0.104621×10^{-1}
0.3333a	0.0000	0.572385×10^{-2}	0.926116×10^{-2}	0.111703×10^{-1}	0.117704×10^{-1}
0.375a	0.238374×10^{-2}	0.812711×10^{-2}	0.118641×10^{-1}	0.139304×10^{-1}	0.145879×10^{-1}
0.4375a	0.722452×10^{-2}	0.126047×10^{-1}	0.163972×10^{-1}	0.185853×10^{-1}	0.192955×10^{-1}
0.5000a	0.130366×10^{-1}	0.179531×10^{-1}	0.216143×10^{-1}	0.23812×10^{-1}	0.245391×10^{-1}
0.56250a	0.195093×10^{-1}	0.239662×10^{-1}	0.274104×10^{-1}	0.295435×10^{-1}	0.302609×10^{-1}
0.6250a	0.264360×10^{-1}	0.304715×10^{-1}	0.33674×10^{-1}	0.357036×10^{-1}	0.36395×10^{-1}
0.6875a	0.336641×10^{-1}	0.373314×10^{-1}	0.403009×10^{-1}	0.422143×10^{-1}	0.428723×10^{-1}
0.75a	0.410776×10^{-1}	0.444373×10^{-1}	0.472009×10^{-1}	0.490023×10^{-1}	0.496259×10^{-1}
0.8125a	0.485887×10^{-1}	0.517054×10^{-1}	0.542994×10^{-1}	0560031×10^{-1}	0.565953×10^{-1}
0.875a	0.56134×10^{-1}	0.590743×10^{-1}	0.615385×10^{-1}	0.631636×10^{-1}	0.637297×10^{-1}
0.9375a	0.636735×10^{-1}	0.665032×10^{-1}	0.688768×10^{-1}	0.704432×10^{-1}	0.709892×10^{-1}
1.000a	0.711923×10^{-1}	0.739723×10^{-1}	0.762886×10^{-1}	0.778139×10^{-1}	0.783452×10^{-1}

沿固定边y=0弯距的分布为

$$M(x)=\sum_{m=1,3} E_m\sin\frac{m\pi x}{a}=-\frac{qa^2}{\pi^4}\Big\{-24.5068\sin\frac{\pi x}{a}$$

$$+6.56689\sin\frac{3\pi x}{a}+6.72394\sin\frac{5\pi x}{a}+5.74234\sin\frac{7\pi x}{a}+4.94416\sin\frac{9\pi x}{a}$$

$$+4.34151\sin\frac{11\pi x}{a}+3.88168\sin\frac{13\pi x}{a}+3.52512\sin\frac{15\pi x}{a}+3.24464\sin\frac{17\pi x}{a}$$

$$+3.02124\sin\frac{19\pi x}{a}+2.84139\sin\frac{21\pi x}{a}+2.69521\sin\frac{23\pi x}{a}+2.57537\sin\frac{25\pi x}{a}$$

$$+2.47635\sin\frac{27\pi x}{a}+2.39393\sin\frac{29\pi x}{a}+2.32485\sin\frac{31\pi x}{a}+2.26658\sin\frac{33\pi x}{a}$$

$$+2.21712\sin\frac{35\pi x}{a}+2.17489\sin\frac{37\pi x}{a}+2.13863\sin\frac{39\pi x}{a}+2.10732\sin\frac{41\pi x}{a}$$

$$+2.08016\sin\frac{43\pi x}{a}+2.05648\sin\frac{45\pi x}{a}+2.03573\sin\frac{47\pi x}{a}+2.01748\sin\frac{49\pi x}{a}$$

$$+2.00134\sin\frac{51\pi x}{a}+1.98703\sin\frac{53\pi x}{a}+1.97428\sin\frac{55\pi x}{a}+1.96288\sin\frac{57\pi x}{a}$$

$$+1.95265\sin\frac{59\pi x}{a}\Big\}$$

为了便于比较，在下表内，列出了本文及文献［1］、［2］沿固定边几个点的弯距值，它们依次用$M(x)$、$M(\overset{*}{x})$、$M(\overset{**}{x})$表示。从表中可以看出，本文的结果在以上两者之间，这显然与直观结果相符。另外，由于点支承的影响，在固定边的两端附近出现正值弯距。

表2　固定边各点弯距（单位qa^2）

x	0.5a	0.375a	0.25 a	0.125a	0.09375a	0.0625a	0.03125a	0
$M(x)$	−0.29179	−0.25952	−0.16861	−0.01470	0.03952	0.10246	0.15965	0
$M(\overset{*}{x})$	−0.53560	−0.53550	−0.53353	−0.51270		−0.47314	−0.39115	0
$M(\overset{**}{x})$	−0.15438	−0.15186	−0.14459	−0.13109				

为了验证计算结果，我们利用板的整体平衡条件得到：

$$\left\{\frac{qab^2}{2}-\left[|P'+P''|\times\frac{b}{3}-\int_0^a M(x)_{y=0}dx\right]\right\}\div\frac{qab^2}{2}=1\%$$

由此可见，计算结果是比较满意的。

参考文献

〔1〕、张福范，均布荷载下悬臂距形扳的弯曲、应用数学和力学，1980，一卷，3期
〔2〕、张福范，一边固定两角点支承的距形扳，上海力学，1981、2卷，1期
〔3〕. S、Timoshenko, Theory of Plates and Shells, McGraw—Hill Book Co, 1959.