求Fuzzy关系传递闭包的矩形法

闫家杰　陈国勋

（郑州工学院基础部）　（郑州大学数学系）

提　要

Fuzzy关系的传递闭包在Fuzzy数学的理论和应用两方面均有重要作用。本文给出求Fuzzy关系传递闭包的矩形法，它是[1]中所介绍的轮流做凑法的改进与简化。笔者首先提出并证明几个引理，然后给出矩形法的计算公式，最后用例子说明用矩形法求传递闭包的计算量较小。

一、予备知识

[定义1]　设X和Y为论域，称笛卡尔乘积X×Y的任一子集$\underset{\sim}{R}$为从X到Y的一个Fuzzy（二元）关系，记作

$$X \xrightarrow{\underset{\sim}{R}} Y \qquad \text{或} \qquad \underset{\sim}{R} \in F(X\times Y)$$

特别地，称从X到X的一个Fuzzy关系$\underset{\sim}{R}$为X中的一个Fuzzy（二元）关系，记作

$$\underset{\sim}{R} \in F(X\times X)$$

[定义2]　设$\underset{\sim}{R} \in F(X\times X)$，若$\forall \lambda \in [0,1]$，均有

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \geqslant \lambda$，$\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \geqslant \lambda \Rightarrow \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z) \geqslant \lambda$则称Fuzzy关系$\underset{\sim}{R}$是具有传递性的。

容易证明下面两个结果：

（1）$\underset{\sim}{R}$具有传递性的充要条件是

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z) \geqslant \bigvee_{y\in X} (\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z))$$

（2）$\underset{\sim}{R}$具有传递性的充要条件是$\underset{\sim}{R} \supseteq \underset{\sim}{R}^2$，其中$\underset{\sim}{R}^2 \triangleq \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R}$。

[定义3]　设$\underset{\sim}{R} \in F(X\times X)$，规定Fuzzy关系

$$t(\underset{\sim}{R}) \triangleq \bigcup_{j=1}^{\infty} \underset{\sim}{R}^j \cup \underset{\sim}{R}^2 \cup \underset{\sim}{R}^3 \cup \cdots\cdots$$

其中$\underset{\sim}{R}^n \triangleq \underset{\sim}{R}^{n-1} \circ \underset{\sim}{R}$（$n=2,3,\cdots$），称$t(\underset{\sim}{R})$为Fuzzy关系$\underset{\sim}{R}$的传递闭包。

$\underset{\sim}{R}$的传递闭包具有下列性质

（1）$t(\underset{\sim}{R}) \supseteq \underset{\sim}{R}$；

（2）$t(\underset{\sim}{R})$具有传递性；

（3）若Fuzzy关系$\underset{\sim}{Q}$具有传递性，且$\underset{\sim}{Q} \supseteq \underset{\sim}{R}$，则$\underset{\sim}{Q} \supseteq t(\underset{\sim}{R})$

由此可见，$t(\underset{\sim}{R})$是包含$\underset{\sim}{R}$的“最小的”Fuzzy传递关系。

设Fuzzy关系$\underset{\sim}{R}$是n阶Fuzzy矩阵：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

则求$t(\underset{\sim}{R})$的轮流做媒法如下：

设$X=\{\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_n\}$

令$K=1$，以χ_1作媒，∀一对元素χ_i，χ_j，将二步路

$$\chi_i,\quad \chi_1,\quad \chi_j$$

的权重(即$r_{i1}\wedge r_{1j}$)与$\chi_i\chi_j$的权重r_{ij}进行比较，取较大者为$\chi_i\to\chi_j$的新权重$r_{ij}^{(1)}$，遍历所有$i\cdot j$后，$\underset{\sim}{R}$被改造为$\underset{\sim}{R}^{(1)}=\{r_{ij}^{(1)}\}_{n\times n}$.

以$\underset{\sim}{R}^{(1)}$作为原始矩阵，令$K=2$，以χ_2作媒，$\forall i,j$,将二步路

$$\chi_i,\quad \chi_2,\quad \chi_j$$

的权重$r_{i2}^{(1)}\wedge r_{2j}^{(1)}$与$r_{ij}^{(1)}$进行比较，取

$$r_{ij}^{(2)}=(r_{i2}^{(1)}\wedge r_{2j}^{(1)})\vee r_{ij}^{(1)}$$

得$\underset{\sim}{R}^{(2)}=\{r_{ij}^{(2)}\}_{n\times n}$

直至$K=n$，取

$$r_{ij}^{(n)}=(r_{in}^{(n-1)}\wedge r_{nj}^{(n-1)})\vee r_{ij}^{(n-1)}\cdots\cdots(1.1)$$

得$\underset{\sim}{R}^{(n)}=\{r_{ij}^{(n)}\}_{n\times n}$，则有

$$t(\underset{\sim}{R})=\underset{\sim}{R}^{(n)}$$

二、几个引理

［**引理**1］设$\underset{\sim}{R}$是n阶Fuzzy矩阵。若以轮流做媒法求$t(\underset{\sim}{R})$，则以χ_K（$1\leqslant K\leqslant n$）作媒时必有

$$r_{Kj}^{(k)}=r_{Kj}^{(k-1)}\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$
$$r_{ik}^{(k)}=r_{ik}^{(k-1)}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

证明：依照轮流作媒法，当χ_k作媒时有

$$r_{ij}^{(k)}=(r_{ik}^{(k-1)}\wedge r_{kj}^{(k-1)})\vee r_{ij}^{(k-1)}\cdots\cdots\cdots(1.2)$$
$$\Rightarrow r_{kj}^{(k-1)}=(r_{kk}^{(k-1)}\wedge r_{kj}^{(k-1)})\vee r_{kj}^{(k-1)}$$
$$\because r_{kk}^{(k-1)}\wedge(r_{kj}^{(k-1)})\leqslant r_{kj}^{(k-1)}$$
$$\therefore (r_{kk}^{(k-1)}\wedge r_{kj}^{(k-1)})\vee r_{kj}^{(k-1)}=r_{kj}^{(k-1)}$$
即$r_{kj}^{(k)}=r_{kj}^{(k-1)}\qquad(j=1,2,\cdots,n)$

同理可证 $r_{ik}^{(k)}=r_{ik}^{(k-1)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$

［**引理**］2设$\underset{\sim}{R}$是n阶Fuzzy矩阵，以轮流作媒法去求$t(\underset{\sim}{R})$时，若以χ_k作媒，则当$r_{kj}^{(k-1)}=0$（$1\leqslant j\leqslant n$）时，有$r_{ij}^{(k)}=r_{ij}^{(k-1)}$（$i=1,2,\cdots,n$），当$r_{ik}^{(k-1)}=0$（$1\leqslant i\leqslant n$）时，有$r_{ij}^{(k)}=r_{ij}^{(k-1)}$（$j=1,2,\cdots,n$）

证明：由(1、2)

$$r_{ij}^{(k)}=(r_{ik}^{(k-1)}\wedge r_{kj}^{(k-1)})\vee r_{ij}^{(k-1)}$$

若对某个$j(1\leqslant j\leqslant n)$，有$r_{kj}^{(k-1)}=0$，则

$$\begin{aligned} r_{ij}^{(k)} &= (r_{ik}^{(k-1)}\wedge 0)\vee r_{ij}^{(k-1)} \\ &= 0\vee r_{ij}^{(k-1)} \\ &= r_{ij}^{(k-1)} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

同样，若对某个$i(1\leqslant i\leqslant n)$，有$r_{ik}^{(k-1)}=0$，则

$$\begin{aligned} r_{ij}^{(k)} &= (0\wedge r_{kj}^{(k-1)})\vee r_{ij}^{(k-1)} \\ &= 0\vee r_{ij}^{(k-1)} \\ &= r_{ij}^{(k-1)} \qquad (j=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

[引理3] 设$\underset{\sim}{R}$是n阶Fuzzy矩阵，在求$t(\underset{\sim}{R})$的轮流作媒算法中，若$\underset{\sim}{R}$是自反的，则$\underset{\sim}{R}^{(k)}$也是自反的；若$\underset{\sim}{R}$是对称的，则$\underset{\sim}{R}^{(k)}$也是对称的$(K=1,2,\cdots,n)$

证明：设$\underset{\sim}{R}$自反、对称，

$$\Rightarrow r_{ii}=1,\quad r_{ij}=r_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

由(1.2)

$$r_{ij}^{(k)}=(r_{ik}^{(k-1)}\wedge r_{kj}^{(k-1)})\vee r_{ij}^{(k-1)}$$

令$K=1$，$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} r_{ii}^{(1)} &= (r_{i1}\wedge r_{1i})\vee r_{ii} \\ &= r_{ii}=1 \\ r_{ij}^{(1)} &= (r_{i1}\wedge r_{1j})\vee r_{ij} \\ &= (r_{j1}\wedge r_{1i})\vee r_{ji} \\ &= r_{ji}^{(1)} \end{aligned}$$

即$\underset{\sim}{R}^{(1)}$自反、对称。

假定$R^{(s-1)}$自反、对称，$\Rightarrow$

$$r_{ii}^{(s-1)}=1,\quad r_{ij}^{(s-1)}=r_{ji}^{(s-1)}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

在(1.2)中令$K=S$，$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} r_{ii}^{(s)} &= (r_{is}^{(s-1)}\wedge r_{Si}^{(s-1)})\vee r_{ii}^{(s-1)} \\ &= r_{ii}^{(s-1)}=1 \\ r_{ij}^{(s)} &= (r_{is}^{(s-1)}\wedge r_{sj}^{(s-1)})\vee r_{ij}^{(s-1)} \\ &= (r_{js}^{(s-1)}\wedge r_{si}^{(s-1)})\vee r_{ji}^{(s-1)} \\ &= r_{ji}^{(s)} \end{aligned}$$

即$\underset{\sim}{R}^{(s)}$也自反、对称。

综上，$\forall K(K=1,2,\cdots,n)$，$\underset{\sim}{R}^{(k)}$自反、对称。

（证毕）

[推论1] 若$\underset{\sim}{R}$是相似矩阵，则$t(\underset{\sim}{R})$也是相似矩阵。

[推论2] 若$\underset{\sim}{R}$是相似矩阵，则用轮流作媒法求$t(\underset{\sim}{R})$的计算公式为

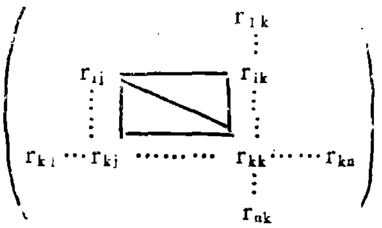
$$r_{ij}^{(k)}=\begin{cases} 1 & ,\ i=j \\ (r_{ik}^{(k-1)}\wedge r_{kj}^{(k-1)})\vee r_{ij}^{(k-1)} & ,\ i<j \\ r_{ji}^{(k)} & ,\ i>j \end{cases}$$

$(K=1,2,\cdots,n)$

三、矩形法的计算公式

根据以上引理，我们可以用下边的所谓矩形法求Fuzzy关系$\underset{\sim}{R}$的传递闭包$t(\underset{\sim}{R})$。

设$\underset{\sim}{R}=\{r_{ij}\}_{n\times n}$是n阶Fuzzy矩阵，对于任意指定的$K(1\leqslant K\leqslant n)$，以第K行的任一非零元素$r_{kj}(j\neq k)$与第k列的任一非零元素$r_{ik}(i\neq k)$的连线为对角线作矩形(如下图所示)，对位于该矩形顶点处的四个元素，仅对其中的r_{ij}作如下修改：



$$r_{ij}'=(r_{ik}\wedge r_{kj})\vee r_{ij}\cdots\cdots\cdots(1、3)$$

即把r_{ij}修改为r_{ij}'，其余三个元素不变(见引理1)。依$k=1,2,\cdots,n$之顺序按上法操作，其结果就是所求的传递闭包$t(\underset{\sim}{R})$。

公式(1、3)与公式(1、2)在形式上是一样的，但是，由于这里利用了引理中所得到的结果，并且采取了表上作业法，因此使计算传递闭包的工作量明显地减少。

［例1］ 设

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0.2\\ 0 & 0.2 & 0\end{pmatrix}$$

求$t(\underset{\sim}{R})$

我们使用矩形法。

当$k=1$时，显然，没有一条连线，因而所有元素都不必修改。

当$k=2$时，只有两条连线：

$$\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0.2\\ 0 & 0.2 & 0\end{pmatrix}$$

依矩形法计算公式(1、3)，只需把元素$r_{13}=0$修改为$r_{13}'=(0.5\wedge 0.2)\vee 0;=0.2$把元素$r_{33}=0$修改为$r_{33}'=(0.2\wedge 0.2)\vee 0=0.2$，于是得到

$$\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0.2\\ 0 & 0 & 0.2\\ 0 & 0.2 & 0.2\end{pmatrix}$$

当$k=3$时，也只有两条连线：

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

依公式(1、3)，只需把元素$r_{12}=0.5$修改为$r_{12}'=(0.2\wedge 0.2)\vee 0.5=0.5$(实际上$r_{12}$不变)；把元素$r_{22}=0$修改为$r_{22}'=(0.2\wedge 0.2)\vee 0=0.2$，于是得

$$t(\underset{\smile}{R})=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

此例若用轮流作媒法计算，要使用迭代公式(1、2)27次，可是，用矩形法计算，实际上只使用迭代公式4次。

如果$\underset{\smile}{R}$是相似矩阵，并且在用矩形法计算$t(\underset{\smile}{R})$时注意利用［引理3］的结果，则计算量的减小就更加显著。

［例2］ 设

$$\underset{\smile}{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

求$t(\underset{\smile}{R})$。

由于$\underset{\smile}{R}$是相似矩阵，根据［引理3］的推论，$t(\underset{\smile}{R})$也一定是相似矩阵，因此，只需计算出$t(\underset{\smile}{R})$的主对角线以上的元素。我们仍用矩形法。

当$k=1$时，显然不需要作任何修改。

当$k=2$时，只有一条连线：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$，把元素$r_{13}=0$修改为

$$r_{13}'=(0.5\wedge 0.3)\vee 0=0.3$$

得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

当$k=3$时，也只有一条连线：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$，把元素$r_{12}=0.5$修改为

$$r_{12}'=(0.3\wedge 0.3)\vee 0.5=0.5$$

(实际上r_{12}不变)

故有

$$t(\underset{\sim}{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

在这个例子中，我们把使用迭代公式的次数由27次减少到2次。

一搬地，当$\underset{\sim}{R}$是n阶Fuzzy矩阵时，用矩形法求传递闭包$t(\underset{\sim}{R})$使用迭代公式的次数比用轮流作媒法求$t(\underset{\sim}{R})$使用迭代公式的次数至少减少$(2n-1)n$次；当$\underset{\sim}{R}$是相似矩阵时，至少减少$\frac{1}{2}n(n^2+3n-2)$次。比如，当$n=6$时，前者至少减少66次；后者至少减少156次。显然，随着$\underset{\sim}{R}$的阶数n的增加，工作量的减小就愈来愈显著。

参 考 文 献

[1]汪培庄，"Fuzzy数学讲义"，北京师范大学数学系，1981.

[2]M.N.S.SWAMY and K.THULASIRAMAN, "Qraphs, Networks, and Algorithms", September 1980, P428, Transitive Closure (Warshall)

[3]孙荣光，"关于Fuzzy关系的传递闭包的一个注记"，河南省第三次Fuzzy数学年会论文集.