

钢筋混凝土连续梁和框架的非线性计算

黄 振 国

(结构理论研究室)

提 要

本文提出一种考虑钢筋混凝土材料非线性性质的连续梁和框架实用计算方法。该方法从模式化的 $M-\phi$ 、 $N-\epsilon$ 关系出发,借助能量原理导出了考虑材料非线性性质的钢筋混凝土超静定结构的内力和变形计算方程。根据导出的方程可以分析结构受力全过程,给出工作阶段内力与变形及极限承载力,破坏瞬间各塑性铰转角与结构线位移。理论计算与实验结果符合较好。该方法计算简便,不需反复迭代,可用手算也可采用电算。

一. 前 言

目前我们设计钢筋混凝土超静定结构时,按照理想弹性体来计算内力,而截面配筋是按考虑材料塑性性质的极限状态来进行设计的,它们互不相协调,即内力计算和截面强度设计对结构材料性质的基本假定是互相矛盾的。我们知道钢筋混凝土并非理想弹性材料,当荷载较小时,钢筋混凝土超静定结构的内力分布大致接近弹性计算结果,当荷载逐渐增大时,由于混凝土应力应变关系的非线性,拉区混凝土开裂,钢筋与混凝土之间粘着力破坏,以及钢筋屈服等因素先后出现,结构内力分布便随之改变,这种现象称为内力重分布。因之,无论在工作阶段或极限状态时,钢筋混凝土框架的内力和按理想弹性体求得的内力都不一致。如何求得考虑材料塑性性质的钢筋混凝土框架工作阶段和极限状态的实际内力和变形,一直是各国学者关注的问题。早在1920年德国钢筋混凝土学会的一个研究报告中,就指出钢筋混凝土两端固定梁的内力重分布现象。30至50年代苏联学者克雷洛夫(С.М.Крылов)^{[1][2]}、库兹米切夫(А.Е.Кузьмичев)^[3]作了大量试验研究工作。50年代倍克(А.Л.Л.Бaker)

^[4]把钢结构塑性铰概念引进钢筋混凝土结构的弹塑性计算中,验算各塑性铰转角,使不超过极限转角。关于工作阶段内力和变形计算,格涅兹捷夫(А.А.Гвоздѣв)^[5]曾提出用逐步近似法来计算钢筋混凝土超静定结构内力。首先按弹性体求得内力分布,再把结构分为若干小段,取每段中平均弹性弯矩按莫拉谢夫(В.Ц.Мурашев)刚度公式确定该段刚度。由新的变刚度结构再次计算内力,反复计算若干次,直到满意为止。克雷洛夫建议同号弯矩区取相同的最小刚度来计算变形。这些建议已定入苏联1960年“钢筋混凝土超静定结构考虑塑性内力重分布计算规程”中。

电子计算机的出现和应用,使钢筋混凝土超静定结构的弹塑性分析取得较大进展。一些国内外学者^{[7][8][9]}从钢筋及混凝土应力应变关系出发,把框架杆件分成很多小单元,在弹性分析基础上不断修改单元刚度和结构刚度矩阵的逐次逼近法。用这种方法编出电算程序对钢筋混凝土框架进行全过程分析。这种方法虽能较好地反映考虑材料弹塑性性质的受力过程,但计算相当繁锁,即便使用计算机来计算也颇费机时,显然不是一种实用的设计方法。本文

从满足工程精度要求出发, 通过实验及理论分析给出模式化的 $M-\phi$ 、 $N-\epsilon$ 关系曲线, 在此基础上由能量原理导出了钢筋混凝土框架受力全过程非线性分析的理论公式。

二、计算模型

1. 基本假定

(1) 在受力过程中截面变形符合平截面假定。

(2) 剪切应变很小, 可以忽略不计。

(3) 钢筋应力应变关系如图1a示。

$$\text{当 } -\epsilon_y \leq \epsilon_s \leq \epsilon_y \text{ 时, } \sigma_s = \epsilon_s \cdot E_s \quad (1)$$

$$\text{当 } |\epsilon_s| > \epsilon_y \text{ 时, } \sigma_s = R_s \quad (2)$$

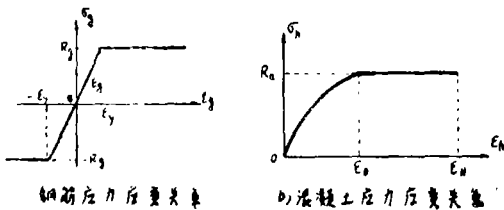


图 1

(4) 混凝土应力应变关系如图1b)示。

当 $0 \leq \epsilon_h \leq \epsilon_0$ 时,

$$\sigma_h = R_a \left[2 \frac{\epsilon_h}{\epsilon_0} - \left(\frac{\epsilon_h}{\epsilon_0} \right)^2 \right] \quad (3)$$

当 $\epsilon_0 < \epsilon_h \leq \epsilon_u$ 时

$$\sigma_h = R_a \quad (4)$$

式中 ϵ_0 为最大应力时应变值, 由实验取 $\epsilon_0 = 0.002$

ϵ_u 为混凝土极限应变, 取 $\epsilon_u = 0.0038^{[1]}$

2. 弯矩和曲率试验曲线 ($M-\phi$ 关系曲线)

为了研究 $M-\phi$ 关系及内力重分布过程本文作者曾作了四根钢筋混凝土连续梁和一根简支梁试验^[6]。其中梁 I、梁 II 为三跨连续梁, 在两边跨中点对称加荷, 中间跨为纯弯段, 以便于量测曲率。采用三跨超静梁的优点还在于形成第一个塑性铰后 (如中间支座) 结构并未

表 1

	E, F 截面	B, C 截面	
梁 I			
梁 II			

变成机构立即破坏, 还能继续加荷, 可测得 $M-\phi$ 曲线的水平段和下降段。梁的尺寸如表一。

材料性能指标。混凝土: 梁 I $R_s^s = 216.5 \text{ kg/cm}^2$, $E_s^s = 2.8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$,

梁 II $R_s^s = 210 \text{ kg/cm}^2$, $E_s^s = 2.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ 。钢筋: $\phi 8.07$ 时, $R_s^s = 2840 \text{ kg/cm}^2$, $E_s^s = 2.06 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$; $\phi 9.87$ 时, $R_s^s = 3270 \text{ kg/cm}^2$, $E_s^s = 2.02 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$; $\phi 15.57$ 时,

$R_s^s = 2650 \text{ kg/cm}^2$, $E_s^s = 2.04 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 。

试验时, 中间跨的曲率值采用杠杆应变仪, 倾角仪和曲率仪三种不同仪表同时量测, 以便互相比对, 保证结果的可靠性。B和C支座放置反力计, 直接测得反力, 由平衡条件可求得各截面弯矩值。

梁Ⅰ的M— ϕ 试验曲线如图2。J. S. Ford等^[10]偏心受压柱的试验M— ϕ 曲线如图3。

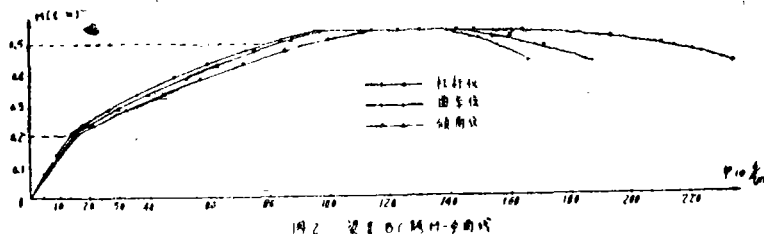


图2 梁Ⅰ的M— ϕ 曲线

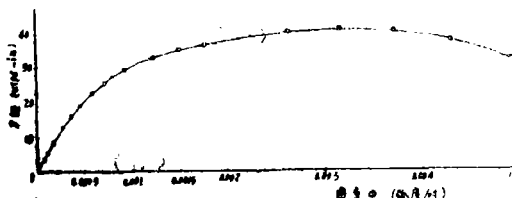


图3 试验SC-1的M— ϕ 关系

由图2可看到: M— ϕ 关系实验曲线, 在裂缝形成前, 接近直线; 裂缝形成后发生转折为一凸曲线; 当弯矩值接近截面极限弯矩时, 形成水平段; 水平段延续到一定程度后, 就产生下降段。图3中偏压柱的M— ϕ 曲线, 除没有图2中裂缝出现时的转折外, 其形状与图2中的M— ϕ 曲线相同。

3. 模式化的M— ϕ 理论曲线

对于适筋梁M— ϕ 关系简化为二次抛物线与水平直线, 如图4所示。曲线方程为

$$\text{当 } 0 \leq M \leq M_p \text{ 时} \quad \phi = AM + BM^2 \quad (5)$$

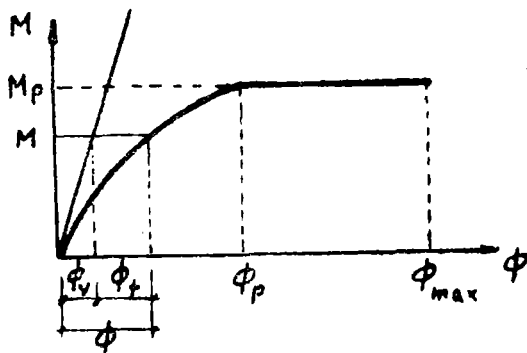


图4 M— ϕ 简化曲线

当 $M = M_p$ 时, 为水平直线。

公式(5)中第一项是线性变形部分, 第二项是非线性变形部分。如图4中曲线上任一点的曲率 ϕ 可认为由线性变形曲率 ϕ_y 和非线性变形曲率 ϕ_t 之和组成, 即 $\phi_y = AM$; $\phi_t = BM^2$

$$\phi = \phi_y + \phi_t = AM + BM^2$$

式中第二项考虑了钢筋混凝土结构的非线性变形

待定系数A可由未开裂时构件刚度

确定

$$\phi_y = AM = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_k I_0}$$

$$\text{则} \quad A = \frac{1}{E_k I_0}$$

$$(6)$$

其中 E_s 为混凝土弹性模量, I_0 为截面折算惯性矩。

待定系数 B , 可由基本假定, 根据对截面在Ⅰ状态(即屈服状态)的应力与应变分析求得。

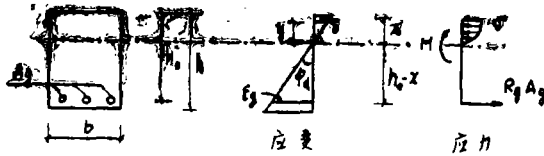


图5 受弯构件在Ⅰ状态的应力与应变

在Ⅰ状态, 纵筋拉应力达屈服强度

R_s , 拉应变 $\epsilon_s = \frac{R_s}{E_s}$ 。这时曲率为

$$\phi_d = \frac{\epsilon_s}{h_0 - x} \quad (7)$$

根据截面的平衡条件, 变形条件及物理条件来求 x 。

$$\text{平衡条件: } \sum x = 0 \quad \int_0^x \sigma b dy - R_s A_s = 0 \quad (a)$$

$$\sum M = 0 \quad M_d = \int_0^x y \sigma b dy + R_s A_s (h_0 - x) \quad (b)$$

$$\text{变形条件: } \epsilon = \phi_d y \quad (c)$$

$$\text{物理条件: } \sigma = R_s \left[\frac{2\epsilon}{\epsilon_0} - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right] \quad (3)$$

将(c)式代入(3)式, 再将(3)式代入(a)式, 积分后得

$$\frac{R_s b}{\epsilon_0} \frac{\epsilon_s}{h_0 - x} \left[x^2 - \frac{\epsilon_s}{\epsilon_0 (h_0 - x)} \frac{x^3}{3} \right] - R_s A_s = 0 \quad (8)$$

由(8)式可求得 x , 代入(7)式求得 ϕ_d 。

将变形条件(c)代入(3), 再代入(b)式, 可求得Ⅰ状态弯矩

$$M_d = \frac{R_s b}{\epsilon_0} \frac{\epsilon_s}{h_0 - x} \left(\frac{2}{3} x^3 - \frac{\epsilon_s}{h_0 - x} \cdot \frac{x^4}{4\epsilon_0} \right) \quad (d)$$

由(8)式求得的 x 代入(d), 即求得 M_d 。因为 A 为已知, 将 $M_d \phi_d$ 代入(5)式可求得待定系数 B 。

如梁Ⅰ跨中截面F, 由实测的尺寸及实验强度和弹性模量代入(8)式求得 $x = 9.5 \text{ cm}$ 。

$$\begin{aligned} \text{将 } x \text{ 代入 (7) 式 } \phi_d &= \frac{\epsilon_s}{h_0 - x} = \frac{R_s^s}{E_s (h_0 - x)} = \frac{2650 \text{ kg/cm}^2}{2.09 \times 10^6 (17.5 - 9.5) \text{ kg/cm}} \\ &= 162 \times 10^{-6} / \text{cm} \end{aligned}$$

由(6)式得 A

$$A = \frac{1}{E_s I_0} = 0.334 \times 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$$

由(d)式求得此时弯矩 M_d

$$M_d = 1.42 \times 10^5 \text{ kg/cm}$$

ϕ_d 为相应于 M_d 时曲率, 将 A , ϕ_d , M_d 代入(5)式求得 B 。

$$B = (\phi_d - AM_d) / M_d^2 = 0.568 \times 10^{-14} / \text{kg}^2 \cdot \text{cm}^3$$

则梁 I 跨中截面 F 的 $M-\phi$ 关系式为

$$\phi = 0.334 \times 10^{-9} M + 0.568 \times 10^{-14} M^2 \quad (e)$$

同理可求得 BC 跨的 $M-\phi$ 关系

$$\phi = 0.334 \times 10^{-9} M + 2.39 \times 10^{-14} M^2 \quad (f)$$

将 (e) (f) 式画成曲线与试验值比较见图 6、图 7, 由此可见理论值与实测值符合较好。

4. 轴力与变形关系 ($N-\epsilon$ 关系)

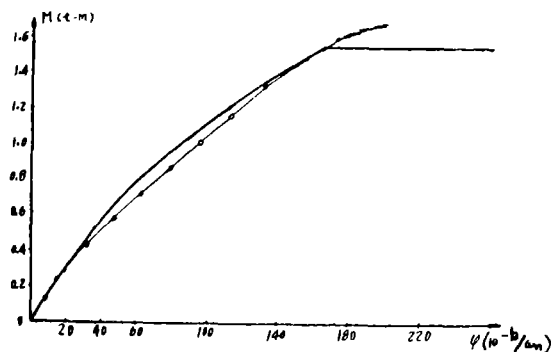


图 6 梁 I, F 截面 $M-\phi$ 关系的理论计算与试验值

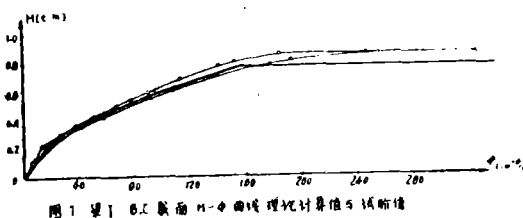


图 7 梁 I, BC 截面 $M-\phi$ 曲线理论计算值与试验值

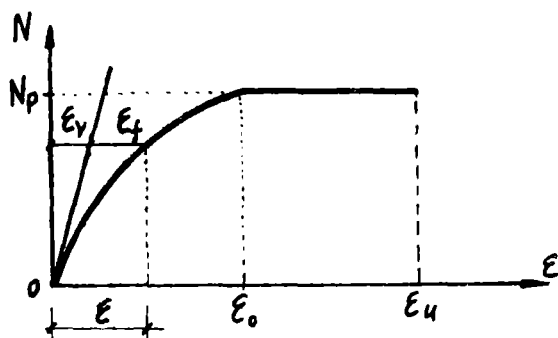


图 8

根据图 1a), b) 中钢筋及混凝土应力应变关系, $N-\epsilon$ 关系简化为二次抛物线与水平直线, 如图 8 所示。

$$\text{当 } 0 \leq N \leq N_p \text{ 时, } \epsilon = CN + DN^2 \quad (9)$$

当 $N = N_p$ 时 为水平直线

式中有 C、D 两个待定系数。式中第一项 (CN) 为与内力呈线性关系变形部分。可用

$$\text{下面方法确定待定系数 C。因 } CN = \frac{N}{E_b F_0}$$

$$\text{则 } C = \frac{1}{E_b F_0} \quad (10)$$

其中 F_0 为截面折算面积 ($F_0 = A_b + \frac{E_s}{E_b} A_s$)

试验证明按一般箍筋配置量箍筋对混凝土极限变形影响不大, 则可认为达极限轴力 N_p 时的屈服应变与素混凝土相同 $\epsilon_0 = 0.002$ 。由此可求得系数 D。

$$0.002 = CN_p + DN_p^2$$

将 (10) 式代入则

$$D = (0.002 - \frac{N_p}{E_b F_0}) / N_p^2 \quad (11)$$

三、计算内力与变形的理论公式

根据基本假定及 $M-\phi$ 、 $N-\varepsilon$ 理论公式,由虚功原理可导出计算内力和变形的理论公式。

对 n 次超静定结构,形成由 $(n+1)$ 个塑性铰组成的破坏机构,认为是正规的破坏。在破坏前结构可以有 0 至 n 个塑性铰。 n 次超静定结构可以有 n 个自应力状态,令单位自应力状态为 $\overline{M}_1 \overline{N}_1, \overline{M}_2 \overline{N}_2, \dots, \overline{M}_n \overline{N}_n$, 每个自应力状态与零荷载平衡。令结构实际状态为状态“1”,单位自应力状态 $\overline{M}_1 \overline{N}_1, \overline{M}_2 \overline{N}_2, \dots, \overline{M}_n \overline{N}_n$ 分别为状态“2”。利用虚功原理使状态“2”的力经历状态“1”的位移,因为自应力状态与零荷载成平衡,则外力虚功为零。写出虚功方程为:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} \overline{M}_1 \theta_i + \sum \int \overline{M}_1 \phi dx + \sum \int \overline{N}_1 \varepsilon dx = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} \overline{M}_2 \theta_i + \sum \int \overline{M}_2 \phi dx + \sum \int \overline{N}_2 \varepsilon dx = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} \overline{M}_n \theta_i + \sum \int \overline{M}_n \phi dx + \sum \int \overline{N}_n \varepsilon dx = 0 \end{cases} \quad (12)$$

式中第一项为塑性铰转动的虚功,第二、三项分别为弯矩和轴力作的虚功,根据基本假定忽略剪力所作的虚功。将(5)及(9)式代入上式得

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} \overline{M}_1 \theta_i + \sum \int \overline{M}_1 (AM + BM^2) dx + \sum \int \overline{N}_1 (CN + DN^2) dx = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} \overline{M}_2 \theta_i + \sum \int \overline{M}_2 (AM + BM^2) dx + \sum \int \overline{N}_2 (CN + DN^2) dx = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} \overline{M}_n \theta_i + \sum \int \overline{M}_n (AM + BM^2) dx + \sum \int \overline{N}_n (CN + DN^2) dx = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n+1}$ 为各塑性铰转角, M 为结构的实际内力。如取自应力 $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_n$ 分别为塑性铰 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 处单位弯矩, 则 $M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \dots + \overline{M}_n X_n + M_P^0$, $N = \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + \dots + \overline{N}_n X_n + N_P^0$ 。 M_P^0, N_P^0 为荷载在静定体系中产生的弯矩与轴力。

公式(13)可用来求破坏瞬间各塑性铰转角,也可用来求使用阶段内力及塑性铰转角和线位移。

对于层数较少的框架,轴力引起的变形较小,可略去轴力影响,则式(13)简化为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} \overline{M}_1 \theta_i + \sum \int \overline{M}_1 (AM + BM^2) dx = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} \overline{M}_2 \theta_i + \sum \int \overline{M}_2 (AM + BM^2) dx = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} \overline{M}_n \theta_i + \sum \int \overline{M}_n (AM + BM^2) dx = 0 \end{cases} \quad (14)$$

公式的应用

1. 求破坏瞬间各塑性铰转角

在破坏瞬间除最后一个塑性铰未转动外 ($\theta = 0$), 其他铰均已形成。此时结构为静定结构, 各塑性铰处弯矩均达到极限弯矩, 可由静力平衡条件求得内力分布。因此结构的 M 、 N 是已知的, A 、 B 、 C 、 D 为常数与构件截面尺寸及配筋有关, 未知量有 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n+1}$ 为 $(n+1)$ 个, 而式 (13) 只有 n 个方程, 但破坏瞬间第 $(n+1)$ 个塑性铰刚刚形成, 其转角为零, 可减少一个未知量。假定某个塑性铰最后形成, 求得各塑性铰转角均与该截面弯矩正方向一致时, 为正确解。

2. 求破坏瞬间线的位移

取任意静定基本体系, 在所求位移方向上加单位荷载, 其内力图为 \bar{M}_P 、 \bar{N}_P 。应用功虚原理, 令结构实际状态为位移状态, 单位荷载作用状态为力状态, 写出虚功方程

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{M}_P \theta_i + \sum \int \bar{M}_P \phi dx + \sum \int \bar{N}_P \epsilon dx \quad (15)$$

将式 (5) 及 (9) 代入, 则得

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{M}_P \theta_i + \sum \int \bar{M}_P (AM + BM^2) dx + \sum \int \bar{N}_P (CN + DN^2) dx \quad (16)$$

式中 \bar{M}_P 、 \bar{N}_P 、 A 、 B 、 C 、 D 、 M 、 N 为已知, θ_i 可由式 (13) 求得, 则由式 (16) 可求得位移。

3. 求使用阶段内力

如在使用阶段当塑性铰未形成时, 因 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n+1}$ 均等于零, 则方程 (14) 中 $\sum_{i=1}^{n+1} M_K \theta_i = 0$,

方程变为

$$\begin{cases} \sum \int \bar{M}_1 (AM + BM^2) dx = 0 \\ \sum \int \bar{M}_2 (AM + BM^2) dx = 0 \\ \vdots \\ \sum \int \bar{M}_n (AM + BM^2) dx = 0 \end{cases} \quad (17)$$

其中 $M = \bar{M}_1 x_1 + \bar{M}_2 x_2 + \dots + \bar{M}_n x_n + M_P$

式 (17) 有方程 n 个, 未知量也为 n 个, 解方程可求得 x_1, x_2, \dots, x_n 。

当结构有部分塑性铰存在时, 求内力的方法有两种。

(1) 采用公式 (14), 如结构为 n 次超静定, 有 R 个塑性铰形成时, 未知的 θ 为 R 个。因塑性铰处弯矩为已知, 每形成一个塑性铰减少一次超静定次数, 则未知弯矩减为 $(n - R)$ 个, 而方程为 n 个可求得所有未知 θ 和未知弯矩。

(2) 取破坏瞬间的静定体系为基本体系, 以各塑性铰处弯矩作为未知量 x_1, x_2, \dots, x_n 。当未形成塑性铰时, 可用式 (17) 计算。每形成一个塑性铰破坏一个连续条件, 式 (17) 中减少一个方程。但此时塑性铰断面处弯矩为已知, 未知量也少一个, 仍可求得最后弯矩图。

4. 求使用阶段变形

求使用阶段变形, 仍可用式(16)计算。如未出现塑性铰时, $\sum_{i=1}^{n+1} \bar{M}_P \theta = 0$, 则式(16)

变为

$$\Delta = \sum \int \bar{M}_P (AM + BM^2) dx + \sum \int \bar{N}_P (CN + DN^2) dx \quad (18)$$

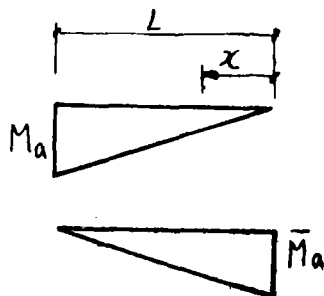


图 9

5. 积分表

为了计算方便, 作出公式(13)(14)(16)(17)

(18)中的积分 $\int \bar{M}(AM + BM^2) dx$ 及

$$\int \bar{N}(CN + DN^2) dx。$$

如已知结构某段的自应力状态弯矩图 \bar{M} 和结构实际弯矩图形 M , 表示在图9中。

$$M = M_a \frac{x}{L} \quad \bar{M} = \bar{M}_b \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \bar{M} (AM + BM^2) dx &= \int_0^L \bar{M}_b \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left[A \left(M_a \frac{x}{L}\right) + B \left(M_a \frac{x}{L}\right)^2\right] dx \\ &= \bar{M}_b L \left[\frac{A}{6} M_a + \frac{B}{12} M_a^2 \right] \end{aligned}$$

同理可求其他图形的积分列于表2中。

表2

积分表

M	\bar{M}	$\int \bar{M} (AM + BM^2) dx$	编号
		$\bar{M}_b L \left[\frac{A}{3} M_a + \frac{B}{4} M_a^2 \right]$	①
		$\bar{M}_b L \left[\frac{A}{6} M_a + \frac{B}{12} M_a^2 \right]$	②
		$\bar{M} L \left[\frac{A}{2} M_a + \frac{B}{3} M_a^2 \right]$	③
		① + ②	④
		$\bar{M}_b L \left[\frac{A}{2} M + \frac{B}{2} M^2 \right]$	⑤
		$\bar{M} L \left[AM + BM^2 \right]$	⑥
		$L \left[(\bar{M}_a + \bar{M}_b) \left(\frac{A}{2} M + \frac{B}{2} M^2 \right) \right]$	⑦

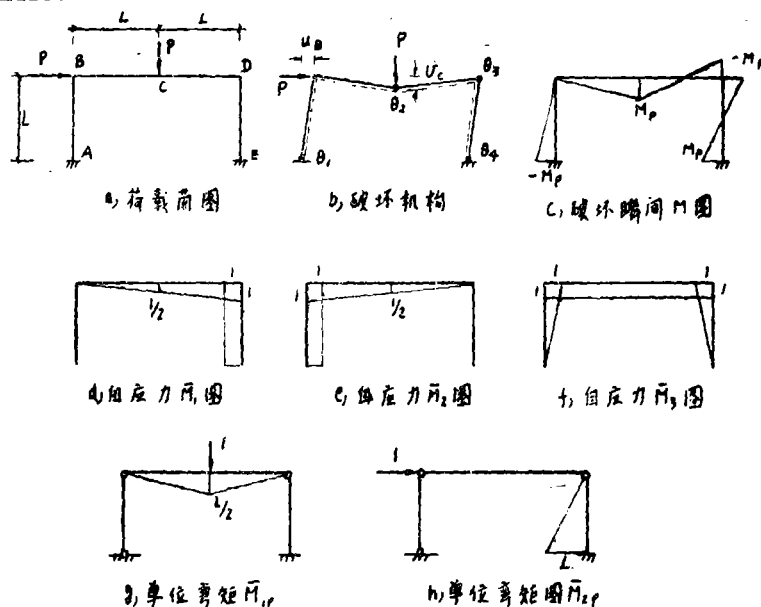


图10 门形框架

(1) 求极限状态时各塑性铰转角。

利用公式(14)写出

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 \bar{M}_1 \theta_i + \sum \int \bar{M}_1 (AM + BM^2) dx = 0 & \text{①} \\ \sum_{i=1}^4 \bar{M}_2 \theta_i + \sum \int \bar{M}_2 (AM + BM^2) dx = 0 & \text{②} \\ \sum_{i=1}^4 \bar{M}_3 \theta_i + \sum \int \bar{M}_3 (AM + BM^2) dx = 0 & \text{③} \end{cases}$$

式①利用积分表中①④项得

$$\frac{1}{2} \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \frac{1}{2} L \left(\frac{A}{3} M_P + \frac{B}{4} M_P^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{L}{2} \left(\frac{A}{3} M_P + \frac{B}{4} M_P^2 \right) + \frac{3}{4} \frac{L}{2} \left(\frac{A}{6} M_P + \frac{B}{12} M_P^2 \right) - 1 \times \frac{L}{2} \left(\frac{A}{3} M_P + \frac{B}{4} M_P^2 \right) - \frac{3}{4} \left(\frac{A}{6} M_P + \frac{B}{12} M_P^2 \right) = 0$$

化简后得

$$\frac{1}{2} \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + L \left(\frac{A}{12} M_P + \frac{B}{16} M_P^2 \right) = 0 \quad \text{①}$$

同理可得②③式

$$\theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2 + L \left(-\frac{A}{12} M_P - \frac{B}{16} M_P^2 \right) = 0 \quad \text{②}$$

$$\theta_2 - \theta_3 + L \left(\frac{A}{6} M_P + \frac{B}{8} M_P^2 \right) = 0 \quad (3)$$

解联立方程得各 θ 值

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2} \theta_2 - L \left(\frac{A}{12} M_P + \frac{B}{16} M_P^2 \right) \\ \theta_2 = \theta_2 \\ \theta_3 = \theta_2 + L \left(\frac{A}{6} M_P + \frac{B}{8} M_P^2 \right) \\ \theta_4 = \frac{1}{2} \theta_2 + L \left(\frac{A}{12} M_P + \frac{B}{16} M_P^2 \right) \end{cases}$$

如设 θ_2 为最后一个塑性铰(即 $\theta_2 = 0$), 则

$$\begin{cases} \theta_1 = -L \left(\frac{A}{12} M_P + \frac{B}{16} M_P^2 \right) \\ \theta_2 = 0 \\ \theta_3 = L \left(\frac{A}{6} M_P + \frac{B}{8} M_P^2 \right) \\ \theta_4 = L \left(\frac{A}{12} M_P + \frac{B}{16} M_P^2 \right) \end{cases}$$

θ_1 为负值, 铰转动方向与断面极限弯矩方向相反, 则计算结果不正确, 如设 θ_1 为最后一个塑性铰, 则

$$\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = L \left(\frac{A}{6} M_P + \frac{B}{8} M_P^2 \right) \\ \theta_3 = L \left(\frac{A}{3} M_P + \frac{B}{4} M_P^2 \right) \\ \theta_4 = L \left(\frac{A}{6} M_P + \frac{B}{8} M_P^2 \right) \end{cases}$$

各转角 θ 值均为正值, 与断面极限弯矩方向一致, 则求得结果为正确解。

(2) 求C点竖向位移 V_c (极限状态时)

取任意静定基本体系, 在C点加竖向单位力, 作单位弯矩图 \bar{M} (图10g)。由方程(16)得

$$V_c = \sum_{i=1}^4 \bar{M}_{iP} \theta_i + \sum \int \bar{M}_{iP} (AM + BM^2) dx = \frac{L}{2} \theta_2 + \frac{L}{2} L \left(\frac{A}{3} M_P + \frac{B}{4} M_P^2 \right) +$$

$$\frac{L}{2} \frac{L}{2} \left(\frac{A}{3} M_P + \frac{B}{4} M_P^2 \right) + \frac{L}{4} \frac{L}{2} \left(\frac{A}{6} M_P + \frac{B}{12} M_P^2 \right) + \left(-\frac{L}{4} \right) \frac{L}{2} \left(\frac{A}{6} M_P + \frac{B}{12} M_P^2 \right)$$

$$V_C = L^2 \left(\frac{A}{3} M_P + \frac{B}{4} M_P^2 \right)$$

(3) 求B点水平位移 U_B 。

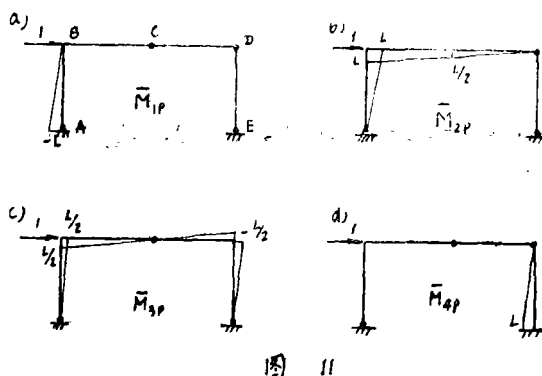
取任意静定基本体系, 在B点加水平单位力, 作单位 \bar{M} 图(图10n)。由公式(16)得

$$U_B = L\theta_4 + \sum \int \bar{M}_{2P} (AM_P + BM_P^2) dx = L^2 \left(\frac{A}{3} M_P + \frac{B}{4} M_P^2 \right)$$

上面的例子说明应用式(14)、(16)来求极限状态时的塑性铰转角和线位移。有时仅需要求线位移, 而用公式(16)时, 首先要求得各塑性铰转角, 再求线位移。为了简化计算采用最大位移定理, 最大位移定理在文献[6]中已给出推论。最大位移定理: 计算弹塑性体系(包括非线性)的线位移时, 可不考虑塑性铰转角产生的变形, 按公式(18)或下式

$$\Delta = \sum \int \bar{M}_P (AM + BM^2) dx \quad (19)$$

来计算。但要分别假定每个塑性铰最后形成, 求得相应的位移 Δ , 其中最大者为真正的线位移。



例2、求上面例1中框架破坏瞬间B点水平位移 U_B 。我们可以不必去求各塑性铰转角, 而分别假定 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 最后形成时的静定体系, 在B点加水平单位力作 \bar{M} 图(图11)。

(1) 假定 θ_1 最后形成, 取图11a, 中单位弯矩图。由式(19), 并利用积分表, 得:

$$U_B = \sum \int \bar{M}_{1P} (AM_P + BM_P^2) dx$$

$$= L^2 \left(\frac{A}{3} M_P + \frac{B}{4} M_P^2 \right)$$

(2) 假定 θ_2 最后形成, 取图11b)中单位弯矩图。

$$U_B = \sum \int \bar{M}_{2P} (AM_P + BM_P^2) dx = L^2 \left(\frac{A}{4} M_P + \frac{3B}{16} M_P^2 \right)$$

(3) 假定 θ_3 最后形成, 取图11c)中单位弯矩图。

$$U_B = L^2 \left(\frac{A}{6} M_P + \frac{B}{8} M_P^2 \right)$$

(4) 假定 θ_4 最后形成, 取图11d)中单位弯矩图。

$$U_B = L^2 \left(\frac{A}{6} M_P + \frac{B}{8} M_P^2 \right)$$

根据最大位移定理, 则

$$U_B = L^2 \left(\frac{A}{3} M_P + \frac{B}{4} M_P^2 \right)$$

与例1计算结果相同。

四、理论计算与实验比较

1. 计算非线性内力全过程

例3 梁Ⅰ三跨钢筋混凝土连续梁(图12)截面尺寸及配筋见表1。求得极限弯矩及截面

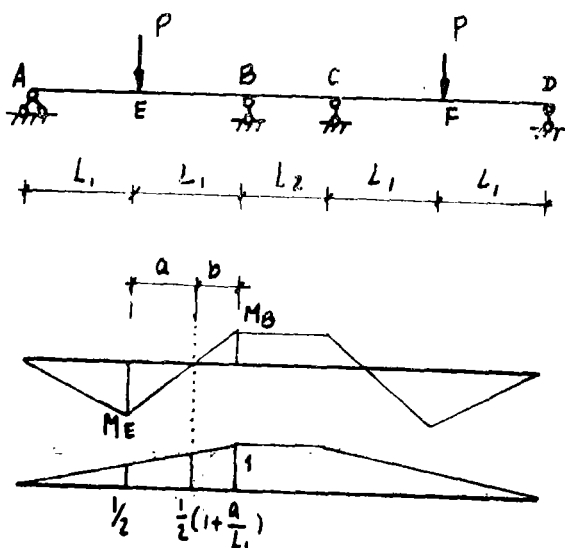


图12 梁Ⅰ

系数如下。 $M_P^E = 2.01 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 、
 $M_P^B = 0.5 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 、 $A_e = 0.348 \times$
 $10^{-9} / \text{kg} \cdot \text{cm}$ 、 $B_e = 0.563 \times 10^{-14} / \text{kg}^2 \cdot$
 cm^3 、 $A_b = 0.348 \times 10^{-9} / \text{kg} \cdot \text{cm}^2$ 、
 $B_b = 4.6 \times 10^{-14} / \text{kg} \cdot \text{cm}^3$ 。

求各阶段内力。

$$L_1 = 0.75 \text{ m}$$

$$L_2 = 0.6 \text{ m}$$

$$a = \frac{M_E}{M_E + M_B} L_1, \quad b = \frac{M_E}{M_E + M_B} L_1$$

$$\text{令} \begin{cases} \beta = L_2 / L_1 = 0.8 \\ \alpha = PL_1 \end{cases}$$

$$\text{由式(17)} \quad \Sigma \int \bar{M}_1 (AM + BM^2) dx = 0$$

利用积分表①④⑥项, 分段积分得

$$2 \left\{ -\frac{1}{2} L_1 \left(\frac{A_e}{3} M_E + \frac{B_e}{4} M_E^2 \right) - \frac{1}{2} a \left(\frac{A_e}{3} M_E + \frac{B_e}{4} M_E^2 \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{L_1} \right) a \times \right. \\ \left. \left(\frac{A_e}{6} M_E + \frac{B_e}{12} M_E^2 \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{L_1} \right) b \left(\frac{A_b}{6} M_B + \frac{B_b}{12} M_B^2 \right) + b \left(\frac{A_b}{3} M_B + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{B_b}{4} M_B^2 \right) + 1 \times \frac{L_2}{2} \left(A_b M_B + B_b M_B^2 \right) \right\} = 0$$

$$\text{由平衡条件} \quad \frac{PL_1}{2} = M_E + \frac{1}{2} M_B$$

$$\text{得} \quad M_E = \frac{1}{2} (PL_1 - M_B) = \frac{1}{2} (\alpha - M_B) \quad (a)$$

将式(a)及a、b代入得 $\alpha - M_B$ 即P - M_B 关系式。

$$\begin{aligned}
 & (3B_b + 3\beta B_b) M_B^4 + [\alpha(-\frac{1}{4}B_s + 4B_e + 6\beta B_b) + (4A_b + 3\beta A_b)] M_B^3 + [\alpha^2 \\
 & (3\beta B_b) + \alpha(\frac{1}{2}A_s + 6A_b + 6\beta A_b)] M_B^2 + [\alpha^3(\frac{3}{4}B_s) + \alpha^2(A_s + 3\beta A_b)] M_B - \\
 & (\frac{1}{2}B_s\alpha^4 + \frac{3}{2}A_s\alpha^3) = 0 \quad (b)
 \end{aligned}$$

将 A_s, B_s, A_b, B_b 及 β 代入得

$$\begin{aligned}
 & 25.9 \times 10^{-14} M_B^4 + [\alpha(40 \times 10^{-14}) + 2.2 \times 10^{-9}] M_B^3 + [\alpha^2(1.1 \times 10^{-14}) \\
 & + (3.9 \times 10^{-9})\alpha] M_B^2 + [\alpha^3(0.42 \times 10^{-14}) + \alpha^2(1.1 \times 10^{-9})] M_B - \\
 & [\alpha^4(0.283 \times 10^{-14}) + \alpha(0.522 \times 10^{-9})] = 0 \quad (c)
 \end{aligned}$$

式(c)为 $\alpha - M_B$ 即 $P - M_B$ 方程, 每给定一个荷载 P 的数值, 可求得 M_B 值, 再由式(a)得 M_E 值。

(1) 当 $P = 1^t$ 时, $\alpha = PL_1 = 1 \times 0.75 = 0.75^t \cdot m$ 代入(c)式得

$$M_B = 0.15^t \cdot m \quad \text{再代入式(a)得}$$

$$M_E = \frac{1}{2}(\alpha - M_B) = \frac{1}{2}(0.75 - 0.15) = 0.3^t \cdot m$$

同理可求得

$$(2) P = 2^t \text{ 时} \quad M_B = 0.26^t \cdot m \quad M_E = 0.62^t \cdot m$$

$$(3) P = 3^t \text{ 时} \quad M_B = 0.35^t \cdot m \quad M_E = 0.95^t \cdot m$$

$$(4) P = 4^t \text{ 时} \quad M_B = 0.43^t \cdot m \quad M_E = 1.28^t \cdot m$$

(5) 当 $M_B = 0.5^t \cdot m$ 时, B截面形成塑性铰。将 $M_B = 0.5^t \cdot m$ 代入(c)式可求得 α , 由 α 求得 $P = 4.5^t$ 。P=4.5^t时形成第一个塑性铰, 再加荷载时 M_B 保持不变, M_E 可由平衡条件(a)式求得。如当 $P = 5^t$ 时

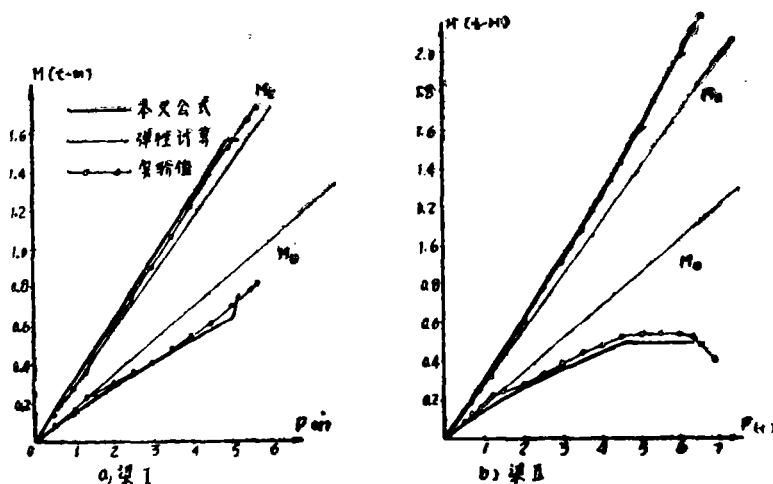


图13 本文公式计算内力与实验内力比较

$$M_E = \frac{1}{2} (\alpha - M_B) = \frac{1}{2} (5 \times 0.75 - 0.5) = 1.625 \text{ t-m}$$

当 $M_B = 0.5 \text{ t-m}$ 、 $M_E = 2.01 \text{ t-m}$ 都达到极限弯矩时, 可由平衡条件(a)式求得极限荷载 P 。

将梁 I、梁 II 的按本文公式计算内力与实验值及弹性理论计算值比较画在图13a) 和 b) 中。由图中可看到从裂缝形成直到破坏, 本文给出的理论计算值较好地与试验值相符合, 反映出内力重分布的过程。

2. 求各阶段变形

在未形成塑性铰前采用式(18)计算。

$$\Delta = \sum \bar{M}_P (AM + BM^2) dx + \sum \int \bar{N}_P (CN + DN^2) dx \quad (18)$$

形成塑性铰后的变形有两种计算方法:

①采用(16)式可选取任意静定体系

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{M}_P \theta_i + \sum \int \bar{M}_P (AM + BM^2) dx + \sum \int \bar{N}_P (CN + DN^2) dx \quad (16)$$

②根据最大位移定理也可采用(18)式计算。

例4: 求梁 I 各阶段非线性变形。取图14c) 所示静定体系, 因E铰直到破坏时才形成, 根据最大位移定理可用式(18)来对算直到破坏前各阶段的变形。

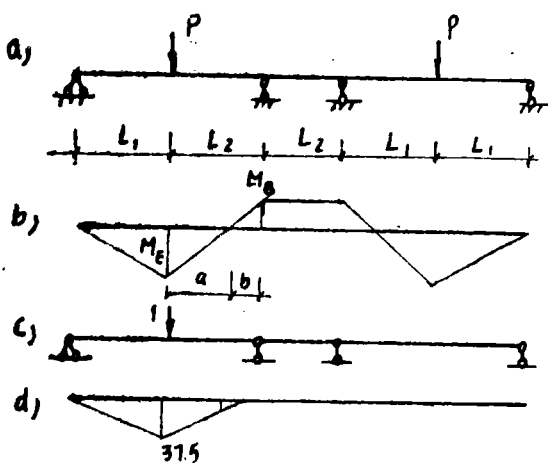


图 14

因轴力为零, 则

$$f_E = \sum \int \bar{M}_P (AM + BM^2) dx$$

利用积分表①④②项得

$$f_E = (37.5) (L_1 + a) \left[\frac{A_a}{3} M_E + \right.$$

$$\left. \frac{B_a}{4} M_E^2 \right] + a \left(\frac{b}{L_1} 37.5 \right) \left(\frac{A_b}{6} M_E + \frac{B_b}{12} \right.$$

$$\left. M_E^2 \right) + b \left(-\frac{b}{L_1} 37.5 \right) \left(\frac{A_b}{6} M_B + \frac{B_b}{12} \right.$$

$$\left. M_B^2 \right) \quad (d)$$

如当 $P = 3 \text{ t}$ 时由上例知 $M_B = 0.35 \text{ t-m}$ $M_E = 0.95 \text{ t-m}$

$$a = \frac{M_E}{M_E + M_B} L_1 = 54.8 \text{ cm} \quad b = L_1 - a = 20.2 \text{ cm}$$

A_a, B_a, A_b, B_b 及 M_B, M_E 为已知代入 (d) 式得

$$f_E = 0.12 \text{ cm}$$

同理可求得其他荷载时的挠度值。将计算结果画于图15b) 与实验比较。图15a) 为梁 I

的E点挠度计算值与实验值比较。可看到理论计算与实验值符合较好。

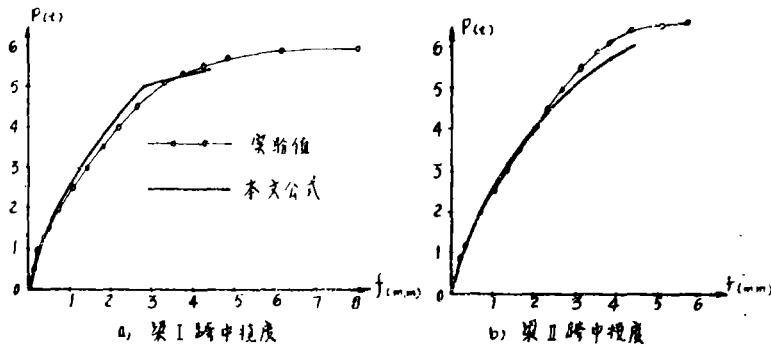


图15 跨中挠度的计算值与实验值比较

参 考 文 献

- [1] С.М.Крылов И Ю.В.Зайцев "Исследования перераспределения усилий в неразрезных Железобетонных балках" расчет Железобетонных конструкций москва 1961.
- [2] С.М.Крылов. "перераспределение усилий в статически неопределимых Железобетонных Конструкциях" теория расчета И Конструирования Железобетонных Конструкций 1958.
- [3] А.Е.Кузьмичев "Исследование влияния пластических деформаций сжатого бетона на перераспределение усилий в железобетонных рамах" НИИЖБ. Исследования по теории железобетона Госстройиздат 1960
- [4] A.L.L Baker "A General equatin for frame analgsis" Concrete and Costructional Engineering 1961.No.3
- [5] А.А.Гюлов "论普通钢筋混凝土和予应力钢筋混凝土静不定结构中内力重分布"建筑工程出版社 1956年。
- [6] 黄振国 "钢筋混凝土连续梁和框架在短时一次加荷下的弹塑性变形和内力"清华大学研究生论文 1963年。
- [7] W.C.Kroenke,M.J.Gutzwiller,R.H.Lee,Finite Element for Reinforced concrete Frame stgdy. ASCE ST. 1973.7.
- [8] 刘南科 "钢筋混凝土框架考虑刚度的弹塑性计算。重庆建工学院资料 1981年。
- [9] 杨彦余、郑德芳 "钢筋混凝土有限元非线性全过程分析" 四川建筑科研所资料 1982年
- [10] "钢筋混凝土框架译文集" 郑州工学院土建系 1983年。
- [11] 蒋大骅 "钢筋混凝土力学" 同济大学结构工程系讲义 1983年11月