

# Riccati法在阶梯梁固有特性计算中的应用

王 伟 张金旺

(力学教研室)

## 提 要

本文在以精确解形式的传递矩阵法的基础上详细介绍了用Riccati传递矩阵法计算阶梯梁的固有频率和振型,讨论了不同的端部条件及中间刚性支承的处理,并对Riccati法中的奇点干扰及解决办法作了详细说明。以BASIC语言编制了程序,用例题进行了运算,得到了较为满意的结果。

随着科学技术的发展,人们对旋转机械动力特性的研究逐步深入,对于解的精确度要求越来越高。而大型电子计算机的使用,使新的计算方法不断出现,如 $\Delta$ 矩阵法、修正矩阵法、综合分析法和Riccati法。在以精确解形式的传递矩阵法的基础上,我们以Riccati法用于阶梯梁动力特性的研究上。

## 一、精确解形式的传递矩阵

对于作平面横向振动的梁(等参数),忽略剪切效应,运动微分方程:

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} + m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (1)$$

$EI$ , 抗弯刚度;  $m$  · 单位长度的质量;  $F(x, t)$  单位长度的分布力。利用(1)的克雷洛夫函数解,可得出无集中质量作用单位的传递矩阵 $T_i^{(1)}$

$$Z_{i+1} = T_i Z_i \quad (2)$$

其中 $Z_i = [Y, \theta, M, Q]^T$

$$T_i^{(1)} = \begin{bmatrix} S & K^{-1}T & K^{-2}(EI)^{-1}U & K^{-3}(EI)^{-1}V \\ KV & S & K^{-1}(EI)^{-1}T & K^{-2}(EI)^{-1}U \\ K^2EIU & KEIV & S & K^{-1}T \\ K^3EIT & K^2EIU & KV & S \end{bmatrix}$$

$S_i, U_i, V_i, T_i$  为

$$S_i = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(K_i l_i) + \cos(K_i l_i)]$$

$$T_i = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(K_i l_i) + \sin(K_i l_i)]$$

$$U_i = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(K_i l_i) - \cos(K_i l_i)]$$

$$V_i = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(K_i l_i) - \sin(K_i l_i)]$$

$k_i = 4\sqrt{\frac{m_i \omega}{EI_i}} \cdot l_i$  为  $i$  单元的长度 ( $i = 1, 2, \dots, n$ )  $\omega$  为所求的固有频率。

设  $i$  单元在  $x = \xi$  处有一集中质量  $M$ , 则惯性力为:

$$P = -M \frac{d^2 y(\xi, t)}{dt^2}$$

自由振动时,  $P$  一般按  $\omega$  变化, 将  $y = \varphi(\xi) \sin(\omega t + \varphi)$  (3)

代入上式,  $P = M\omega^2 \varphi(\xi) \sin(\omega t + \varphi)$

此时有运动微分方程:

$$EI_i \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_i \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p\delta(x - \xi) \quad (4)$$

其中  $\delta$  为单位脉冲函数:

取  $C_{ij} = A_{ij} \times B_{ij}$  且记  $[C] = [A] \cdot [B]$  则有集中质量作用单元的传递矩阵,

$$T_i = T_i^{(1)} + T_i^{(M)} \quad (5)$$

$$T_i^{(M)} = \frac{M}{m_i} [A] \cdot [B] \cdot [D]$$

$$[A] = \begin{bmatrix} K & 1 & (EI)^{-1}K^{-1} & (EI)^{-1}K^{-2} \\ K^2 & k & (EI)^{-1} & (EI)^{-1}K^{-1} \\ EIK^3 & EIK^2 & K & 1 \\ EIK^4 & EIK^3 & K^2 & K \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} V[k(1-\xi)] & \dots & \dots & \dots \\ U[k(1-\xi)] & \dots & \dots & \dots \\ T[k(1-\xi)] & \dots & \dots & \dots \\ S[k(1-\xi)] & \dots & \dots & \dots \\ S(k\xi) & T(k\xi) & U(k\xi) & V(k\xi) \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

对于弹性支座, 可令  $P = -C\varphi_i(\xi) \sin(\omega t + \varphi)$ 。

传递矩阵法虽为主要的计算方法, 但存在着严重的缺点, 当转子过长, 单元数较多, 有较多的弹性支承时, 传递矩阵数目增加, 计算误差增大, 且很敏感地影响到振型。Riccati 法利用解除同一节点间物理耦合的方法, 提高了精度, 改善了数值解的稳定性。

## 二、Riccati法

Riccati 法的理论基础是传递矩阵法, 思想方法是把状态向量分块, 解除耦合作用。下面是解决问题的方法。

### 1、传递单元的分法

- ①同一阶梯, 或中间刚性支承。
- ②集中扰动力作用处到下一个分段处。

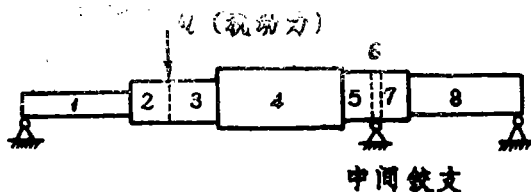


图1

$$\begin{Bmatrix} Y \\ \delta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_{i+1} = T_i \begin{Bmatrix} Y \\ \delta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i + P_i \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{EIK^2} & \frac{1}{EIK} & \frac{1}{K} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} V(Kl) \\ U(Kl) \\ T(Kl) \\ S(Kl) \end{Bmatrix}$$

$$\text{即 } z_{i+1} = T_i z_i + F_i \quad (6)$$

把状态向量分块:

$$\begin{Bmatrix} f \\ e \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} T_{11} & \vdots & T_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{21} & \vdots & T_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} f \\ e \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} F_f \\ \vdots \\ F_e \end{Bmatrix}_i \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{展开: } f_{i+1} &= T_{11}^i f_i + T_{12}^i e_i + F_f^i \\ e_{i+1} &= T_{21}^i f_i + T_{22}^i e_i + F_e^i \end{aligned} \quad (8)$$

$f_i$  在计算模型的始端为 0 向量,  $f_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ,  $e_i$  是未知的, 引进 Riccati 传递阵  $S_i$ ,

$$f_i = S_i e_i + P_i \quad (9)$$

其中  $P_i$  为与外力有关的列向量。

把(9)代入(3)的第二式

$$e_i = [T_{21}S + T_{22}]_i^{-1} e_{i+1} - [T_{21}S + T_{22}]_i^{-1} [T_{21}P + F_e]_i \quad (10)$$

把  $e_i$  代入(8)中第一式:

$$f_{i+1} = [T_{11}S + T_{12}]_i [T_{21}S + T_{22}]_i^{-1} e_{i+1} + [T_{11}P + F_f]_i^{-1} S_{i+1} [T_{21}P + F_e]_i \quad (11)$$

比较(11)和(9)可得

$$S_{i+1} = [T_{11}S + T_{12}]_i [T_{21}S + T_{22}]_i^{-1} \quad (12)$$

$$P_{i+1} = [T_{11}P + F_f]_i - S_{i+1} [T_{21}P + F_e]_i \quad (13)$$

$$\text{引进矩阵: } R_i = [T_{21}S + T_{22}]_i^{-1} \quad (14)$$

$$Q_i = [-R_i] [T_{21}P + F_e] \quad (15)$$

$$\text{则有 } e_i = R_i e_{i+1} + Q_i \quad (16)$$

由  $f_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_1$  可确定,  $S_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_1$ ,  $P_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_1$ . 这样我们便得到了初始传递

阵。假定一个频率值  $\omega$ , 使各传递阵可运算, 利用传递公式(12)~(15), 便可传到末端。传递步骤是:

$S_1, P_1, R_1, Q_1, S_2, P_2, R_2, Q_2, \dots, S_N, P_N$ 。最后得到末端的Riccati变换,

$$f_N = S_N e_N + P_N \quad (17)$$

### 3、对几个问题的讨论

#### ①根据始端的约束条件确定 $f$ 、 $e$ 中的元素

以自由端为例,  $f_i = \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_i$ ,  $e_i = \begin{Bmatrix} Y \\ \vartheta \end{Bmatrix}_i$ , 此时传递矩阵(6)的行(列)要作相应的变换。

#### ②根据不同的始、末端约束, 确定频率方程的形式

当求梁的固有频率时,  $P = 0$ , 这样传递的结果便是  $f_N = S_N e_N$ , 下面就用它确定频率方程:

始端为自由端

i) 末端自由:  $M_N = Q_N = 0$   $Y_N \neq 0$   $\vartheta_N \neq 0$

$$\text{所以 } \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{Bmatrix}_N \begin{Bmatrix} Y \\ \vartheta \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_N \quad (18)$$

故  $|S_N| = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix}_N = 0$  即为两端自由的频率方程。

ii) 末端固定:  $Y_N = \vartheta_N = 0$   $M_N \neq 0$   $Q_N \neq 0$

$$\text{所以有: } \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_N = S_N \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_N$$

故  $|S_N^{-1}| = 0$  即为自由—固定梁的频率方程。

iii) 末端铰支:  $Y_N = M_N = 0$   $\vartheta_N \neq 0$   $Q_N \neq 0$

$$\text{所以 } \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{Bmatrix}_N \begin{Bmatrix} 0 \\ \vartheta_N \end{Bmatrix}_N$$

故  $(S_{22})_N = 0$  即为自由—铰支型的频率方程。

iv) 末端滑动:  $\vartheta_N = Q_N = 0$   $Y_N \neq 0$   $M_N \neq 0$

$$\text{所以 } \begin{Bmatrix} M \\ 0 \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{Bmatrix}_N \begin{Bmatrix} Y \\ 0 \end{Bmatrix}_N$$

故  $(S_{21})_N = 0$  即为自由—滑动梁的频率方程。

进一步地考查发现Riccati法共有四种频率方程:

始端 约 束	状 态 向 量		末 端 约 束			
	f	e	自 由	固 定	铰 支	滑 动
自 由	M	y	I	II	III	IV
	Q	$\theta$				
固 定	y	M	I	I	III	IV
	$\theta$	Q				
铰 支	y	Q	IV	III	I	I
	M	$\theta$				
滑 动	$\theta$	y	IV	III	I	I
	Q	M				

其中: I:  $|S_N| = 0$ ; II:  $|S_N^{-1}| = 0$ ; III:  $(S_{12})_N = 0$ ; IV:  $(S_{21})_N = 0$

由频率方程求得固有频率后,便可确定状态向量,从而确定出振型。

### ③中间刚性支承的处理

在划分单元时,我们把铰作为一个单元,它的长度 $l_i = 0$ ,在自由振动中,铰的反力一般和梁的振动是同步的。把 $l_i = 0$   $\xi = 0$   $P_i = V_i$ 代入(6)式:

$$(11) \quad \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^R = \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^L + U_i \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

上式即为铰两边状态向量间的关系,下边对不同的始端支承进行讨论。

#### i)(1)自由

$$\text{此时有} \quad \begin{Bmatrix} M \\ Q \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} M \\ Q \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} V_i$$

$$\text{写成分块形式:} \quad f_{i+1} = f_i + \begin{Bmatrix} 0 \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$e_{i+1} = e_i \quad (21)$$

当由始端传到 $i$ 面时,就已得到 $f_i = S_i e_i$ 。将 $e_i = e_{i+1}$ 代入(20):

$$f_{i+1} = S_i e_{i+1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ V_i \end{Bmatrix}$$

$$\text{两边同乘以} S_i^{-1}: \quad S_i^{-1} f_{i+1} = e_{i+1} + S_i^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ V_i \end{Bmatrix}$$

展开第一行:

$$\frac{1}{\det |S_i|} [S_{21}, -S_{12}] \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_{i+1} = y_{i+1} + \frac{1}{\det |S_i|} [S_{22}, -S_{12}] \begin{Bmatrix} 0 \\ V_i \end{Bmatrix}$$

但  $y_{i+1} = 0$

$$\text{所以 } V_i = [-\frac{S_{22}}{S_{12}}, 1] \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_{i+1} \quad (22)$$

把  $V_i$  代入 (20) 可求得:

$$M_{i+1} = (S_{12})_i \delta_{i+1}$$

写成矩阵形式:

$$\begin{aligned} f_{i+1} = \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_{i+1} &= \begin{pmatrix} 0 & S_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_i \begin{Bmatrix} y \\ \delta \end{Bmatrix}_{i+1} = S_{i+1} e_{i+1} \\ \text{所以 } S_{i+1} &= \begin{Bmatrix} 0 & S_{12} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_i \\ \text{又 } e_i &= e_{i+1}, R_i = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

ii) 始端为固定端

$$\text{此时有 } \begin{Bmatrix} Y \\ \delta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} Y \\ \delta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_i \end{Bmatrix}$$

$$\text{写成分块形式: } f_{i+1} = f_i \quad (24)$$

$$e_{i+1} = e_i + \begin{Bmatrix} 0 \\ V_i \end{Bmatrix} \dots \quad (25)$$

$$\text{由 } f_i = S_i e_i \quad \text{和 } e_i = e_{i+1} - \begin{Bmatrix} 0 \\ V_i \end{Bmatrix} \text{ 可得:}$$

$$f_i = S_i e_{i+1} - S_i \begin{Bmatrix} 0 \\ V_i \end{Bmatrix}$$

$$\text{所以 } f_{i+1} = S_i e_{i+1} - S_i \begin{Bmatrix} 0 \\ V_i \end{Bmatrix}$$

展开, 且  $y_{i+1} = 0$  得

$$V_i = [S_{11}/S_{12}, 1]_i \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_{i+1} \quad (26)$$

$$\text{将 } V_i \text{ 代入 } f_{i+1} = S_i e_{i+1} - S_i \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} V_i$$

$$f_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\det|S_i|}{(S_{12})_i} e_{i+1}$$

所以 
$$S_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\det|S_i|}{(S_{12})_i}$$

将 $V_i$ 代入(25):

$$R_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S_{11}/S_{12} & 0 \end{pmatrix}_i$$

利用同样的方法可求得始端铰支时:

$$S_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\det|S_i|}{(S_{12})_i}, \quad R_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S_{11}/S_{12} & 0 \end{pmatrix}_i$$

始端滑动时:

$$S_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_i, \quad R_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_i$$

以上所述为Riccati法中对刚性支承的处理,即在传递过程中遇到刚性支承时,只需按上述作一次变换即可。

#### ④Riccati法中的奇点问题及解决办法

##### i) 奇点产生的原因及物理意义

我们认为奇点是由于在Riccati传递过程中有矩阵求逆所致。至于它的物理意义,我们只用自由-自由梁作一说明。它的频率方程为 $|S_N| = 0$ 。如果末端为固定,频率方程为 $|S_N^{-1}| = 0$ ,这样在 $|S_N| = 0$ 的根时就有可能遇到 $|S_N^{-1}| = 0$ 的根,从而使得 $|S_N| \rightarrow \infty$ ,产生奇点。因此求 $|S_N|$ 时遇到奇点正是同一模型在末端固支时的固有频率。这就是此种情况下奇点的物理意义。在计算过程中,我们还发现所有奇点均为反号无穷点,这可能是 $|S_N|$ 中包含 $\frac{1}{\omega - \omega^*}$ 的奇次项所致。

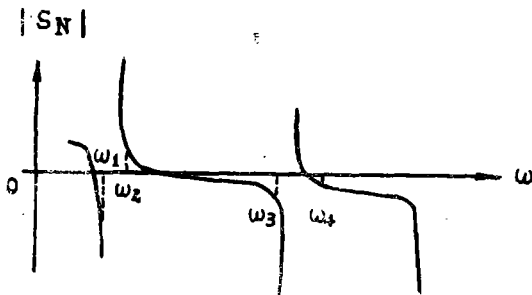


图2

##### ii) 增根和漏根现象

Riccati法中的 $|S_N| - \omega$ 曲线有反号无穷点如图2示,虽然 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 两点值反号,但 $(\omega_1, \omega_2)$ 内并无根,用二分法求解时就会产生增根现象或出现死循环,对于 $\omega_3$ 和 $\omega_4$ 两点,则可能出现丢根现象。

##### iii) 目前解决办法

工程中有些梁,一端的支承情况改变后对其固有频率值影响很大,这样情况下奇点和根间的距离就可能大些,因此,计算时只需把步长选小些就有可能避免漏根现象。对于增根问

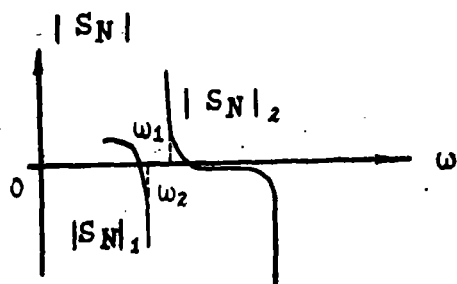


图3

即使改变支承情况,对梁的固有特性影响也很小,这就使得根和奇点很接近,以至于“重合”。

现在我们考查一下 $e_N$

$$\begin{aligned} e_N &= [T_{21}S + T_{22}]_{N-1} e_{N-1} \\ &= [T_{21}S + T_{22}]_{N-1} [T_{21}S + T_{22}]_{N-2} e_{N-2} \\ &= \dots \dots \dots \\ &= [T_{21}S + T_{22}]_{N-1} [T_{21}S + T_{22}]_{N-2} [T_{21}S + T_{22}]_{N-3} \dots [T_{22}]_1 \text{这样便有} \end{aligned}$$

$$S_N e_N = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$S_N [T_{21}S + T_{22}]_{N-1} [T_{21}S + T_{22}]_{N-2} \dots [T_{22}]_1 e_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{故: } |S_N [T_{21}S + T_{22}]_{N-1} [T_{21}S + T_{22}]_{N-2} \dots [T_{22}]_1| = 0 \quad (29)$$

上式和 $|S_N| = 0$ 代表的是同一梁的振动,因此它们是等价的,但(29)式已不存在奇点,而是一条连续的曲线。这样求解不会有增、丢根的问题了。

在解方程(29)时,如果采用二分法,便可使问题简化,我们可取(29)式的符号,而用 $|S_N|$ 的值,也就是用Prohi法的符号,和Riccati的值。记此时频率行列式的值为 $D_N$

$$D_N = \text{ABS} |S_N| \text{Sign}(|S_N|) \sum_{i=1}^{N-1} \text{Sign}([T_{21}S + T_{22}]_i) = |S_N| \sum_{i=1}^{N-1} \text{Sign}([T_{21}S + T_{22}]_i)$$

此时  $D_N - \omega$  曲线又有奇点,但已是同号无穷奇点。如图4所示:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \text{Sign}([T_{21}S + T_{22}]_i)$$

这样我们就很容易地消除了奇点的干扰,前边所提到的四种类型的方程式,便为

$$\text{I} \quad D_N = |S_N| \sum_{i=1}^{N-1} \text{Sign}([T_{21}S + T_{22}]_i) = 0$$

$$\text{II} \quad D_N = |S_{N-1}| \text{Sign}(|S_N|) \cdot \sum_{i=1}^{N-1} |\text{Sign}([T_{21}S + T_{22}]_i)| = 0$$

题,我们可以加一些条件来断定有根区间的真假。

如图3,  $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 处的值反号,我们可以再计算一点 $\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ 的值,若得到的值 $D_3$ 与 $D_1$ 同号,且 $|D_3|$ 大于 $|D_1|$ ,则 $(\omega_1, \omega_2)$ 为假有根区间;反之则为真有根区间。若它与 $D_2$ 的符号相同,也作同样的判断。

然而,有些梁在振动过程中,一端的振幅很小,



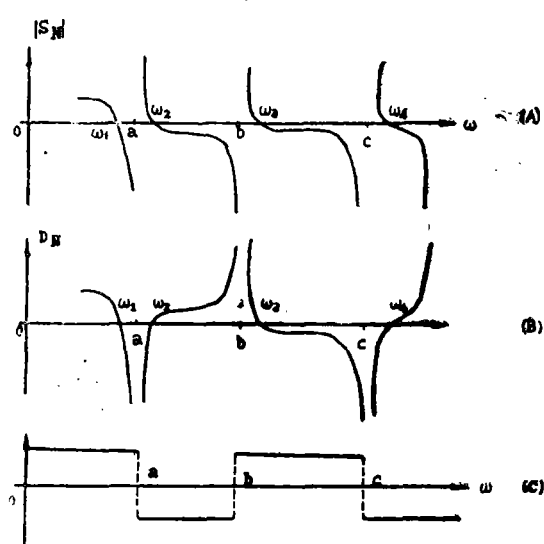


图4

$$\text{I: } e_N = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P_{11}/S_{12} \end{Bmatrix}_N$$

$$\text{IV: } e_N = \begin{Bmatrix} -P_{21}/S_{21} \\ 0 \end{Bmatrix}_N$$

求响应时对刚性支承的处理, 以左端固定为例

$$e_i = \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_i \quad f_i = \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_i \quad \text{在铰的两边有:}$$

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_i \end{Bmatrix}$$

分块:  $f_{i+1} = f_i$ ,  $e_{i+1} = e_i + \begin{Bmatrix} 0 \\ V_i \end{Bmatrix}$ , 并代入  $f_i = S_i e_i + P_i$  再加  $y_{i+1} = 0$  可得:

$$V_i = [S_{11}/S_{12}, 1] \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_{i+1} + (P_{11}/S_{12})_i$$

$$\text{故有: } S_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\det |S_i|}{(S_{12})_i}$$

$$P_{i+1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{P_{21}S_{12} - P_{11}S_{21}}{S_{12}} \end{Bmatrix}_i$$

$$R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -S_{11}/S_{12} & 0 \end{bmatrix}_i$$

$$\text{I} \quad D_N = (S_{12})_N \sum_{i=1}^{N-1} \text{Sign}(|[T_{21}S +$$

$$T_{22}]_i|) = 0$$

$$\text{IV} \quad D_N^{(4)} = (S_{21})_N \sum_{i=1}^{N-1} \text{Sign}(|[T_{21}S +$$

$$T_{22}]_i|) = 0$$

#### 4、求响应

(B) 由  $f_N = S_N e_N + P_N$ ,  $e_i = R_i e_{i+1} + Q_i$  和  $f_i = S_i e_i + P_i$  进行反推。对应于不同的频率方程,  $e_N$  有不同的确定方法:

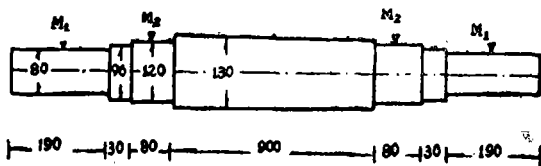
$$\text{I: } e_N = -S_N^{-1} P_N$$

$$\text{I: } e_N = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### 三 利用Riccati法计算的结果及误差分析

为了方便地看出计算中的舍入误差,我们选了一个两端自由对称阶梯梁作为例题,如图5所示。

在直径为80和120的两段分别有重 $W_1 = 150\text{Kg}$ 和 $W_2 = 240\text{Kg}$ 的集中质量作用在中间,



轴的弹性模量 $E = 2.1 \times 10^8 (\text{Kg/Kcm}^2)$

其它参数:

图5	$\varnothing$	m (单位长度的质量)	J (惯性矩)
	80	$4 \times 10^{-4}$	201
	96	$575 \times 10^{-4}$	415
	120	$9 \times 10^{-4}$	1017
	130	$1057 \times 10^{-4}$	1402

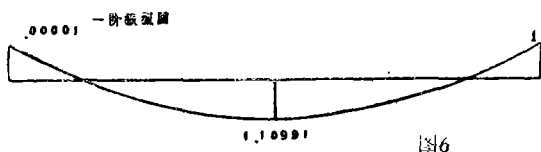
把 $W_1$ ,  $W_2$ 换成质量的单位后

$$M_1 = 0.1530612$$

$$M_2 = 0.2448979$$

分段法: 为了作振型方便,我们把它分了26段,实际计算不必分这么多。

	分段数	每段长度 (cm)
$\varnothing = 80$	5	3.8
96	1	3
120	2	4
130	10	9



集中质量放在传递单元的左面或中间,下面是计算的结果。

一阶振型图如图6所示

第一阶固有频率 $\omega_1 = 976.584 (1/\text{秒})$

节点号:

1	1.000000	11	-0.809857	21	$-0.325876 \times 10^{-1}$
2	0.801016	12	-0.974532	22	$0.850986 \times 10^{-1}$
3	0.622132	13	-1.07576	23	0.251369
4	0.433797	14	-1.10991	24	0.433796
5	0.251371	15	-1.07576	25	0.022137
6	$0.851014 \times 10^{-1}$	16	-0.974534	26	0.811024
7	$-0.325847 \times 10^{-1}$	17	-0.80986	27	1.00001
8	-0.178788	18	-0.587527		
9	-0.315123	19	-0.315127		
10	-0.587524	20	-0.178791		

第二阶固有频率为:  $\omega_2$ : 1940.76 (1/秒)

振型为:

节点号

1	1.000000	11	-0.415066	21	0.210832
2	0.758485	12	-0.319018	22	0.115465
3	0.517364	13	-0.172499	23	$-0.531628 \times 10^{-1}$
4	0.278145	14	$0.2563 \times 10^{-1}$	24	-0.278138
5	$-0.569905 \times 10^{-1}$	15	0.172503	25	-0.51735
6	-0.115463	16	0.319022	26	-0.758464
7	-0.210832	17	0.415068	27	-0.999966
8	-0.305924	18	0.438908		
9	-0.372385	19	0.372385		
10	-0.438908	20	0.305924		

二阶振型图

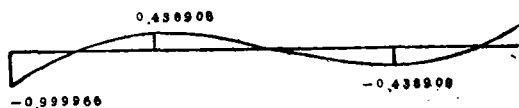


图7

二阶振型图如图7所示

误差分析: 从计算的结果可以看出, 一、二阶振型在两端点的相对误差都是很小的。

## 结 论

- 1、Riccati传递矩阵与克雷洛夫精确解的结合, 使计算精度进一步提高, 并且减少了分数。
  - 2、对刚性支承的处理进一步提高了此法的通用性。
  - 3、此法不仅可以求解固有特性问题, 还可以求响应问题。
  - 4、对于求振型, 此法要比传递矩振法好些, 这种方法有一定的价值和实际意义。
- 主框图: 如图8 所示。

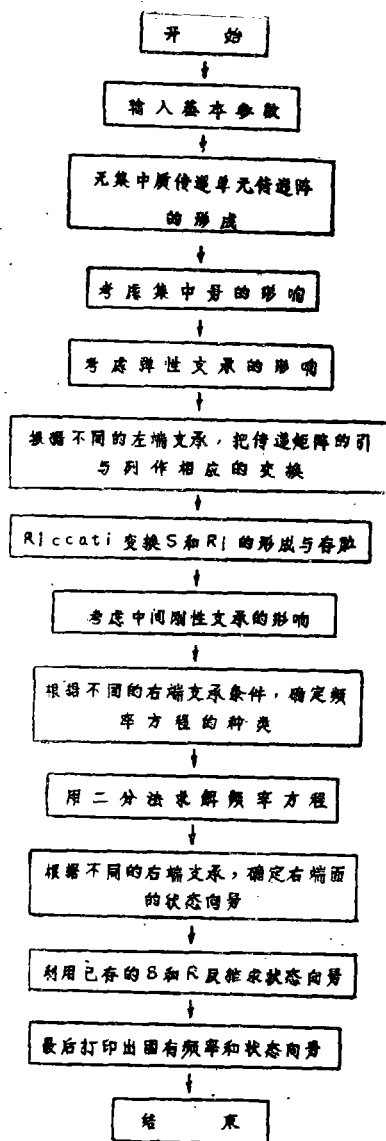


图8

## 参 考 文 献

- (1). S. Timoshenko, D. H. Young, W. Weaver 胡人礼译 "vibration problems in Engineering" 1978
- (2). 清华大学工程力学系 转子动力学 1983.2
- (3). 王海期 阶梯梁固有频率的计算 (华中工学院学报) 1977.3
- (4). 王正 Riccati传递矩阵法在转子动力学中的应用 清华大学工程力学系 1982 7
- (5). 覃钧 临界转数计算的Riccati法 郑州机械所 1981 7