不含3—回路的极图

刘人杰

（数学教研室）

提　　要

本文讨论不含3—回路的简单图G（V,E）中｜V｜取定值时，｜E｜的极大值与最大值问题，证明不含3—回路的最大线数图的存在性与唯一性，相应地给出其具体的线数值表达式，极图理论中著名的Turan定理是本文结果的自然推论。

定义1：G（V，E）中｜V｜＝p，｜E｜＝q称为（p，q）图。

定义2：若（p，q）不含3—回路，而连接（p，q）中任何两个非邻接点得到的（p，q＋1）出现3—回路，称（P，q）为不含3—回路的极大线数图，简称极图。

显然（p，q）不含3—回路的极图存在，但不具备唯一性，例如：

图1与图2都是｜V｜取定值时的极图。

定义3：（p，q）不含3—回路的极图中，线数值｜E｜＝q最大者称为（p，q）最大线数图，简称最图。记为（p，q_{max}）

定义4：若$V=V_1\cup V_2$，$V_1\cap V_2=\phi$，$|V_1|=P_1$，$|V_2|=P_2$，且$\forall e_{ij}\in E$与e_{ij}邻接的顶点$v_i\in V_1$，$v_j\in V_2$，称（p，q）为p_1p_2二分图（式中$p=p_1+p_2$），记为$(p,p_{1,2})$特殊地，若（p，p_{12}）中任意二顶点$v_i\in V_1$，$v_j\in V_2$都邻接一条边e_{ij}称（p，p_{12}）为完全二分图记为K（p，p_{12}）显然K（p，p_{12}）中$q=p_1p_2$

定理1：K（p_1p_{12}）是不含3—回路的极图。

证：二分图不含奇回路∴K（p，p_{12}）不含3—回路，问题只须证明，连接K（p，p_{12}）中任意两个非邻接点，都出现3—回路。

事实上$V_1=\{v_{11},v_{12},\cdots,v_{1p_1}\}$　　$V_2=\{v_{21},v_{22}\cdots v_{2p_2}\}$

任意两个非邻接点，只能同时出现于v_1内，或同时出现于v_2内，不妨假定它们同属于V_1，连接它们得到（p，$p_{12}+1$），由于v_{1i}，v_{1j}本来都与V_2中的点v_{2i}相邻接，因而在（p，$p_{12}+1$）中由v_{1i}，v_{ij}，v_{2i}构成3—回路，按定义2得知K（p，p_{12}）是不含3—回路的极图。定理1的逆命题显然是不成立的，例如：图3即是不含3—回路的极图，但它不是二分图，当然更不是完全二分图。

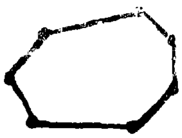

图1

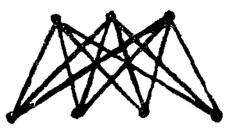

图2

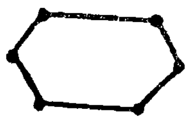

图3

定理2：K（p，p_{12}）中线数最大者是

$$\begin{cases} K\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right) & \text{当}p\text{为偶数时} \\ K\left(\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right) & \text{当}p\text{为奇数时} \end{cases}$$

证： 当P为偶数时$p_1+p_2=p$，$K(p, p_{12})=(p, q)$

这时 $q=p_1p_2=p_1(p-p_1)=f(p_1)$

我们讨论相应的连续函数$f(x)=x(p-x)$可知

当$x=\frac{p}{2}$时$f(x)$取最大值，从而得知$p_1=\frac{p}{2}$

由此$p_1=p_2=\frac{p}{2}$ $\quad\therefore K\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$线数最大。

当p为奇数时，令$p_1=\frac{p-x}{2}$，$p_2=\frac{p+x}{2}$

则$K(p, p_{12})$的线数$q=\frac{p-x}{2}\cdot\frac{p+x}{2}=\frac{p^2-x^2}{4}$

但$\min x=1$ $\quad\therefore q$有最大值$q_{max}=\frac{p^2-1}{4}$

$\therefore K\left(\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right)$线数最大，命题获证。

定理3： 任一不含3—回路的最大线数图(p, q_{max})不含5—回路。

证： 同胚的两个图，视为是两个相同的图，不含3—回路，而含5—回路的图$G(V, E)$中显然$|V|\geqslant 5$，由于$|V|$为奇数或偶数讨论方法相同，不失一般性可只讨论$|V|$为偶数情况。

为此置$|V|=2n$，我们把问题转化为先证明：

若不含3—回路的最大线数图，当$|V|=p$为偶数时，含一个5—回路，则$|E|=q<\frac{p^2}{4}$

事实上$n=3$时，命题显然为真

假定$n=k$（即$|V|=2k$）时命题为真

那末$n=k+1$（即$|V|=2k+2$）时命题亦真

$\because$这时显然会出现两个点v_i，v_j，它们都不是5—回路中的顶点，由$V_1=V-\{v_i, v_j\}$及E_1构成$G(V_1, E_1)$ 式中$|V_1|=P_1=2k$按归纳法假设$G(V_1, E_1)$的线数

$|E_1|=q_1<\frac{p_1^2}{4}=\frac{(2k)^2}{4}=k^2$而$G(V_1, E_1)$中任一顶点不可能同时邻接$v_i, v_j$，不然的话该顶点就与$v_i$，$v_j$构成3—回路（$\because G(V, E)$为最图$v_i$，$v_j$必然有连线）于是$v_i$，$v_j$与

$G(V_1,E_1)$只能连接2k条边，由此$G(V,E)$的线数$q<\frac{p_1^2}{4}+2k+1=K^2+2K+1=(k+1)^2$

然而$p=|V|=2k+2=2(k+1)$　　亦即$k+1=\frac{p}{2}$

∴　$q<\frac{p^2}{4}$。按定理2不含3—回路的最大线数图应为$q=\frac{p^2}{4}$

∴　含5—回路时$G(V,E,)$不是最图，从而定理3获证。

定理4：任一不含3—回路的最大线数图(p,q_{max})不含奇回路。

证：由最图概念及定理3，(p,q_{max})不含3—回路，也不含5—回路，或叙为不含$2k-1$回路$(k=2,3)$用归纳法可进一步证明，(p,q_{max})不含奇回路。

事实上置$n=2k-1$

当$k=2$，3时命题为真

假定$n=2k-1$时命题为真

那末$n=2k+1$时奇回路可表为$V_1V_2V_3V_4\cdots V_{2k+1}V_1$，这时$V_1$，$V_4$必然不是邻接点，∵不然的话，由$V_1V_4V_5\cdots V_{2k+1}V_1$可构成$2k-1$奇回路（按归纳法假设这是不可能的）。另一方面$\Lambda_1$、$V_4$必然设有公共邻接点，∵不然的话这个公共邻接点将与$V_1V_2V_3V_4$构成5—回路（按定理3这是不可能的）。既然$V_1$，$V_4$具有上述两性质，那末连接$V_1V_4$得到$(p,q+1)$显然不出现3—回路这与q是不含3--回路的最大线数图矛盾，由此定理4获证。

定理5：$G(V,E)$是最图(P,q_{max})的充要条件是$G(V,E)$是完全二分图。

证：按$G(V,E)$当而仅当它不含奇回路时是二分图。∴按定理4得知(p,q_{max})为二分图，另一方面按定理2二分图中线数最大者是完全二分图$K(p,p_{12})$命题获证。

按定理2及定理5立即得知下面的定理。

定理6：不含3—回路的最大线数图(P,q_{max})是唯一存在的，而且它就是完全二分图：

$$\begin{cases} K\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right) & \text{当}p\text{为偶数} \\ K\left(\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}\right) & \text{当}p\text{为奇数} \end{cases}$$

由此可得下列推论：

推论1：所有$|V|=p$不含3—回路的图$G(V,E)$都满足不等式

$$q\leqslant\left[\frac{p^2}{4}\right]\quad\text{式中}q\ |E|$$

此即极图理论中著名的Turan定理。

推论2：若$|V|$为偶数2n则不含3—回路的最大线数图$(2n,q_{max})$增加一条线，即

含有n个3—回路。事实上按（p，q_{max}）的唯一性，（2n，q_{max}）是也只是K（n，n），它的任意两非邻接点，必然同时属于V_1，或同时属于V_2连结两个非邻接点即为（2n，n^2+1）不妨设此两非邻接点v_i，v_j均属于V_1，这时邻接v_i，v_j的边e_{ij}与V_2中（$|V_2|=n$）的每一顶点构成一个3—回路。

推论3：若$|V|$为奇数2n+1则不含3—回路的最大线数图（2n+1，q_{max}）增加一条边即含有

$$\begin{cases} n+1\text{个} & 3\text{—回路} \quad \text{当该边的邻接点属于}V_1（|V_1|=n） \\ n\text{个} & 3\text{—回路} \quad \text{当该边的邻接点属于}V_2（|V_2|=n+1） \end{cases}$$

（证法与推论2相同）

参 考 文 献

〔1〕J. A. Bondy and U. S. R. Murty GRAPH THEORY WITH APPLICATIONS .

〔2〕美F.哈拉里著《图论》

（上接16页）

参 考 文 献

[1]A • M · Нахумев,Диффереп · Урав 18（1982）NO.1

[2]曹策问，一个带多点边界条件的特征问题 郑州大学学报（自然科学报）1 （1981）89—100.

[3]李岳生，中国科学 2 （1983） 147—157

[4]魏光祖，袁忠信．拟抛物型方程的某些非局部边值问题与Volterra积分方程。

[5]M • X · MXанукoв, Диффереп, урав19（1983）NO.1

[6]M · P · Kхан, Диффереп · урав（1982）NO.6

[7]M • Ro s eau, Differen. Equat. Masson（9）6.

[8]G · Morosamu, J · Differen. Equat. 43（1982）NO.3.