关于稳定性理论几个基本定理的证明

王世强

（数学教研室）

本文用同一种方法证明常微分方程稳定性理论的几个基本定理，其证明方法较之现有的某些证明方法简便和便于掌握。本文还减弱了非自治情形切达耶夫不稳定性定理的一个条件，使之更便于应用[1]。本文最后讨论了定理的一个条件。

（一） 两个引理

对自治系统

$$\dot{x}_s = x_s(x_1, \cdots, x_n), \qquad (S=1, \cdots, n). \tag{1}$$

与非自治系统 $\dot{x}_s = x_s(t; x_1, \cdots x_n)$，$(s=1, \cdots n)$ （2）

都有如下二引理

引理1 系统（1）或系统（2）相空间给定点的非空ω极限点集，是由整条轨线组成的闭集。

本引理的证明见〔1〕P22。

引理2 系统（1）或系统（2）相空间一点x_0引出的有界正半轨"$x(t; x_0, t_0)$，$t \geqslant t_0$"之ω极限并集

$\Omega^* = \{x \mid x(t; x_0, t_0), t \geqslant t_0\} \cup \Omega$

为一有界闭集。其中Ω为轨线$x(t; x_0, t_0)$之ω极限点集。

由ω极限点与闭集定义及引理1即可证明引理2。

（二） 证明不稳定性定理

下面我们对系统（1），总假定x_s在区域

$$|x_s| \leqslant H, \quad (S=1, 2, \cdots n) \tag{3}$$

内满足解的存在唯一性条件，且原点0为（1）在区域(3)内之唯一奇点。对系统（2）也总假定其x_s在区域

$$t \geqslant t_0; \quad |x_s| \leqslant H, \quad (S=1, 2, \cdots, n). \tag{4}$$

内满足解的存在与唯一性条件，且原点0为其相空间对应区域中之唯一奇点。

定理1（切达耶夫）：对系统（1），若存在李雅普诺夫函数$V(x_1, x_2 \cdots, x_n)$，使有

（Ⅰ）在坐标原点的任意小邻域内存在有$V>0$的区域，且在其边界上有$V=0$。

（Ⅱ）在$V>0$区域内之所有点处有$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} > 0$。则系统（1）之零解是不稳定的。

证 设区域（3）为坐标原点的一任意小邻域，由条件（Ⅰ），在（3）内存在$V>0$之区域。在$V>0$区域内任取定一点x_0，显然有$V(x_0)>0$。设$x(t, x_0)$为过x_0之轨线，要证

它在$t>t_0$之某一时刻要越出区域（3）

用反证法。设$x(t, x_0)$当$t>t_0$时不越出（3），由上段引理2，轨线"$x(t, x_0)$，$t\geqslant t_0$"之ω极限并集Ω^*为含于$V>0$区域内一有界闭集[2]。设在$V>0$区域内恒为正的连续函数$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}$在该有界闭集$\Omega^*$上的下确界为L，即有

$$\frac{dV(x(t, x_0))}{dt}\geqslant L,\ (t\geqslant t_0)$$

其中L为大于零之正常数。取积分得

$$V(x(t, x_0))\geqslant V(x_0)+L(t-t_0)$$

上式当$t\to\infty$时有$V(x(t, x_0))\to\infty$。但这是不可能的，因$V(x)$在区域（3）内是有界的。从而证得轨线$x(t, x_0)$在$t>t_0$某时刻要越出区域（3），由不稳定性定义得证本定理。

定理2（切达耶夫）对系统（2）若存在$V(t, x_1\cdots x_n)$，满足：

（Ⅰ）在任意大的t值和任意小的坐标原点邻域（3）内存在有$V>0$的区域，

（Ⅱ）在$V>0$区域内V是有界的，

（Ⅲ）在$V>0$区域内恒有$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2)}\geqslant W(x_1, \cdots x_n)>0$。其中W为在$V>0$区域内连续的正函数。则系统（2）之零解是不稳定的[3]。

证 与定理1证明法类似。用反证法证明。设过$V>0$区域内点x_0之轨线"$x(t, x_0)$，$\geqslant t_0$"当$t>t_0$时不越出区域（3），由定理条件知，轨线"$x(t, x_0)$，$t\geqslant t_0$"之ω极限并集Ω^*为含于$V>0$区域内一有界闭集。由$W(x)$在Ω^*上连续且恒为正，设其下确界为L，于是当$t\geqslant t_0$时有$\frac{dV(t, x(t,x_0))}{dt}\geqslant W(x(t, x_0))\geqslant L$

其中L为大于零的正常数，积分得

$$V(t, x(t, x_0))\geqslant V(t_0, x_0)+L(t-t_0)$$

上式当$t\to\infty$时有$V(t, x(t, x_0))\to\infty$，这与V在$V>0$区域内有界相矛盾。故轨线$x(t, x_0)$在$t>t_0$之某时刻要越出区域（3），得证本定理。

（三） 证明渐近稳定性定理

定理3（李雅普诺夫）对系统（1），若存在正定函数$V(x_1,\cdots,x_n)$，使$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)}$为负定，则系统（1）零解是渐近稳定的

证 由$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)}$负定，它必然也是常负的，而V正定，由稳定性定理，系统（1）之零解是稳定的[3]。即对任给的$\varepsilon>0$（$\varepsilon<H$），存在正数$\eta=\eta(\varepsilon)$，使对（1）初值满足

$$|x_{s0}|=|x_s(t_0)|<\eta(\varepsilon),\ (S=1, \cdots, n)$$

之任一非零解"$x_s(t)$，$S=1, \cdots, n$"，对所有$t\geqslant t_0$都有

$$|x_s(t)|<\varepsilon,\ (S=1, \cdots, n) \qquad (5)$$

下面用反证法证明等式

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t)=0,\ (S=1, \cdots, n) \qquad (6)$$

成立。将上述任一非零解记为"$x(t, x_0)$"。若（6）不成立，由（5）与前引理知，非

零解$x(t, x_0)$之ω极限并集Ω^*为一在区域（3）内不包含坐标原点0的有界闭集。设负定的连续函数$\frac{dV}{dt}\Big|_{(1)}$在Ω^*上的上确界为$-b$，即

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(1)}\leqslant -b,\quad (x\in\Omega^*)$$

其中b为一正数，沿该轨线取积分得不等式

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = V(x_1(t_0), \cdots x_n(t_0)) + \int_{t_0}^{t}\frac{dV}{dt}dt$$

$$\leqslant V(x_1(t_0), \cdots, x_n(t_0)) - b(t-t_0),\qquad (t\geqslant t_0)$$

但这显然是不可能的，因对足够大的t值上式右端将成为负值，这与V正定条件相矛盾，从而证得等式（6）成立，按定义本定理得证。

用上述证明方法，同样可证明系统（2）相应的渐近稳定性定理以及系统（1）与系统（2）相应的全局渐近稳定性定理，这里不再赘述。

最后要指出马塞尔一个例题的最后论断是不恰当的[4]，例题中的$V(t, x)$不仅没有无限小上界，而且关于t是无界的。所谈及的渐进稳定性定理[5]其条件是充分条件而不是必要条件。由该定理的条件不仅可证零解是渐近稳定的，还可证明零解是一致渐近稳定的[7]，而渐近稳定不一定一致渐近稳定，一致渐近稳定必然是渐近稳定的[6]。下面对马塞尔例题中的$V(t, x)$，证明它关于t是无界的。

引理3　若$f(x)$在$[a, +\infty)$内连续，$f(x)>0$且广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则$\frac{1}{f(x)}$在$[a, +\infty)$内无界。

证：由柯西收敛原理，对任给$\varepsilon>0$，存在$b(>a)$，当$b_2=b_1+1>b_1>b$时就有

$$\int_{b_1}^{b_1+1}f(x)dx<\varepsilon$$

又由积分中值定理，在$[b_1, b_1+1]$上存在一点ξ使有$f(\xi)<\varepsilon$，令$\varepsilon=\frac{1}{M}$，就有$\frac{1}{f(\xi)}>M$，

即对任给$M>0$（不论多么大），存在$\xi\in(a, +\infty)$，使$\frac{1}{f(\xi)}>M$，引理得证。

在马塞尔例题中，$(Vt, x)=\frac{x^2}{g^2(t)}\left(c^2+\int_t^{+\infty}g^2(t)dt\right)$，$\int_0^{+\infty}g(t)dt$收敛，$g(t)>0$；由上引理3知$V(t, x)$关于t是无界的，所以例题最后的结论“关于V有无限小上界的假设是不可缺少的”是不恰当的。因为致使例题中的$x=0$不是渐近稳定的原因，是由于“V不具无限小上界”或“V关于t无界”是前者或后者不能确定。如上选取的V既不能断定$x=0$是渐近稳定的，也不能断定$x=0$不是渐近稳定的。而$x=0$不是渐近稳定的是由其一般解的结构确定的。

参考文献

[1] 秦元勋、王联，王慕秋"运动稳定性理论与应用"科学出版社，1981年。

[2] 见[1]第32页：（二）定理4·1的几何解释。

[3] 见[1]第15页定理3·1。

[4] 许淞庆著"常微分方程稳定性理论"第45页。

[5] 见[4]第33页定理1*

[6] 见[1]104页。

[7] 见[1]90页定理4·5（此时$V \in c_0$）与77页。

（上接28页）

参考文献

[1] 张福范，一边固定两角点支承的矩形板，上海力学，1981年11月，第二期

[2] 林鹏程，均布荷载下一边固定其对中点被支承另两边自由的矩形板，上海力学，1983年，第一期

[3] 黄晓梅等，一边固定对边由多个点支承的矩形板，上海力学，1984年，第一期

[4] 王本瑞 李桂生，均布荷载下一边固定对边自由另两边有点支承的矩形板

[5] 张福范，均布荷载下悬臂矩形板的弯曲，应用数学和力学，第一卷第三期，1980年