一类计量二次抽样方案的ASN的极值

郭同德　韩芝隆

（数学教研室）

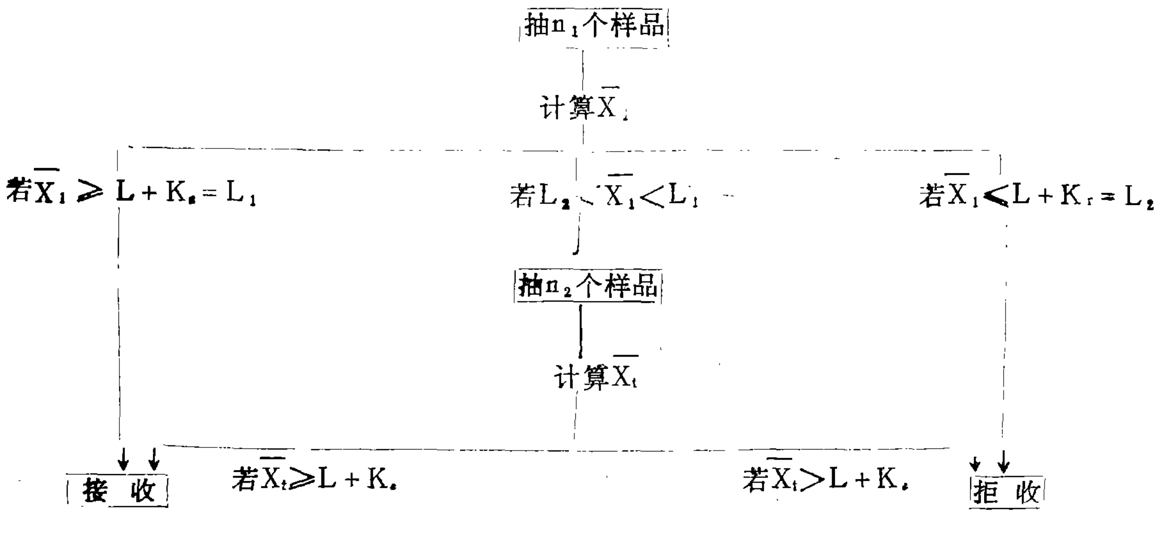
提　要

二次抽样方案的平均抽检个数（简记为ASN），是选取二次抽样方案的一个极为重要的依据。本文就总体服从指数分布的情形，就一类计量二次抽样方案给出ASN的极值，目前在分析电子产品失效时间的统计规律时，多以指数分布为依据，本文对于了解指数分布二次抽样方案的ASN特性有助益。

二次抽样方案的平均抽检个数（简记为ASN），是选取二次抽样方案的一个极为重要的依据，尤其是对于破坏性检验或费用昂贵的检验更是如此。ASN 曲线在它的定义范围内一般为一单峰的铃形曲线。一般人们总希望ASN的极值越小越好。特别是当我们对产品质量的分布情况，比如对不合格品率的分布缺乏先检的信息是如此。显然二次抽样方案的ASN曲线峰值所在的位置也是越远离产品质量的经验分布的众值越好。

1970年，莫利森（J・D・Morrison）仅对总体分布服从波松分布的情形，就一类特殊的计数二次抽样方案给出了ASN的计算公式，1983年马毅林对总体服从二项分布及泊松分布的情形就一般形式的计数二次抽样方案，同时对总体分布服从正态分布（均值μ未知，标准差σ已知），就一类计量二次抽样方案给出了 ASN 的极值。本文就总体服从指数分布的情形，就一类计量二次抽样方案给出ASN的极值。目前在分析电子产品失效时间的统计规律时，多以指数分布为依据，本文对于了解指数分布的二次抽样方案的ASN特性有助益。

设某个产品特征x服从指数分布，其密度函数为（见下页）



$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}\qquad \lambda>0$$

记下限为L，不合格品率$p=p(x<L)$，我们考虑由如上页框图所规定的计量二次抽样方案。

其中K_a，K_r及K_c均为判定数组，n_1与n_2分别为第一样本与第二样本的大小，$\overline{X}_1$为第一样本的均值，$\overline{X}_t$为联合样本的均值。

为求出ASN的极值，先看下面的引理。

引理：设X服从以λ为参数的指数分布，$X_1\ X_2\cdots X_n$为其一组样本，

$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$，则$\overline{X}$的密度函数为

$$f_{\overline{X}}(y)=\begin{cases}\frac{(n\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}n\lambda e^{-n\lambda y} & y\geqslant 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

证：X的特征函数为$\varphi_0(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$

$\therefore\overline{X}$的特征函数为$\varphi(t)=[\varphi_0(\frac{t}{n})]^n=(\frac{n\lambda}{n\lambda-it})^n$

又 $$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ity}f_{\overline{X}}(y)dy=\int_0^{+\infty}\frac{(n\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-(n\lambda-it)y}n\lambda dy$$

$$=(\frac{n\lambda}{n\lambda-it})^n\int_0^{+\infty}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}e^{-u}du=\varphi(t)$$

$\therefore\overline{X}$的密度函数为$f_{\overline{X}}(y)$。引理得证。

由上面框图可知

$$ASN(p)=n_1+n_2[1-p(\overline{X}_1\geqslant L_1)-p(\overline{X}_1\leqslant L_2)]$$
$$=n_1+n_2[p(\overline{X}_1<L_1)-p(\overline{X}_1\leqslant L_2)]$$

$$\therefore\frac{dASN(p)}{dp}=n_2\left[\frac{dp(\overline{X}_1<L_1)}{dp}-\frac{dp(\overline{X}_1\leqslant L_2)}{dp}\right]$$

$$\frac{dp(\overline{X}_1<L_1)}{dp}=\frac{d}{dp}\int_0^{L_1}\frac{(n_1\lambda y)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{-n_1\lambda y}n_1\lambda dy$$

$$\underline{\underline{令n_1\lambda y=t}}\ \frac{d}{dp}\int_0^{n_1\lambda L_1}\frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{-t}dt$$

$$=\frac{(n_1\lambda L_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{-n_1\lambda L_1}n_1L_1\frac{d\lambda}{dp}$$

27029

同理可得$\dfrac{dp(\overline{X}_1\leqslant L_2)}{dp}=\dfrac{(n_1\lambda L_2)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{-n_1\lambda L_2}n_1L_2\dfrac{d\lambda}{dp}$

而$p=p(X<L)=\int_0^L\lambda e^{-\lambda y}dy=1-e^{-L\lambda}$

$$\therefore\frac{d\lambda}{dp}=\frac{1}{L}e^{\lambda L}$$

$$\therefore\frac{dASN(p)}{dp}=n_1n_2\ \frac{e^{\lambda L}}{L}\ \frac{(n_1\lambda)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\left[L_1^{n_1}e^{-n_1\lambda L_1}-L_2^{n_1}e^{-n_1\lambda L_2}\right]$$

令$\dfrac{dASN(p)}{dp}=0$　　　$\lambda_0=\dfrac{\ln\dfrac{L_1}{L_2}}{L_1-L_2}$

当$\lambda<\lambda_0$时，$\lambda(L_1-L_2)<\ln\dfrac{L_1}{L_2}$

$\therefore e^{\lambda(L_1-L_2)}<\dfrac{L_1}{L_2}$　　　$L_1^{n_1}e^{-n_1\lambda L_1}>L_2^{n_1}e^{-n_1\lambda L_2}$

$$\therefore\frac{dASN(p)}{dp}>0$$

同样当$\lambda>\lambda_0$时，$\dfrac{dASN(p)}{dp}<0$，而$p=1-e^{-\lambda L}$为λ的增函数，故当$p<p_0=1-e^{-\lambda_0 L}$

$=1-\left(\dfrac{L_1}{L_2}\right)^{\frac{L}{L_2-L_1}}$ 时，$\dfrac{dASN(P)}{dp}>0$

当$p>p_0$时，$\dfrac{dASN(p)}{dp}<0$

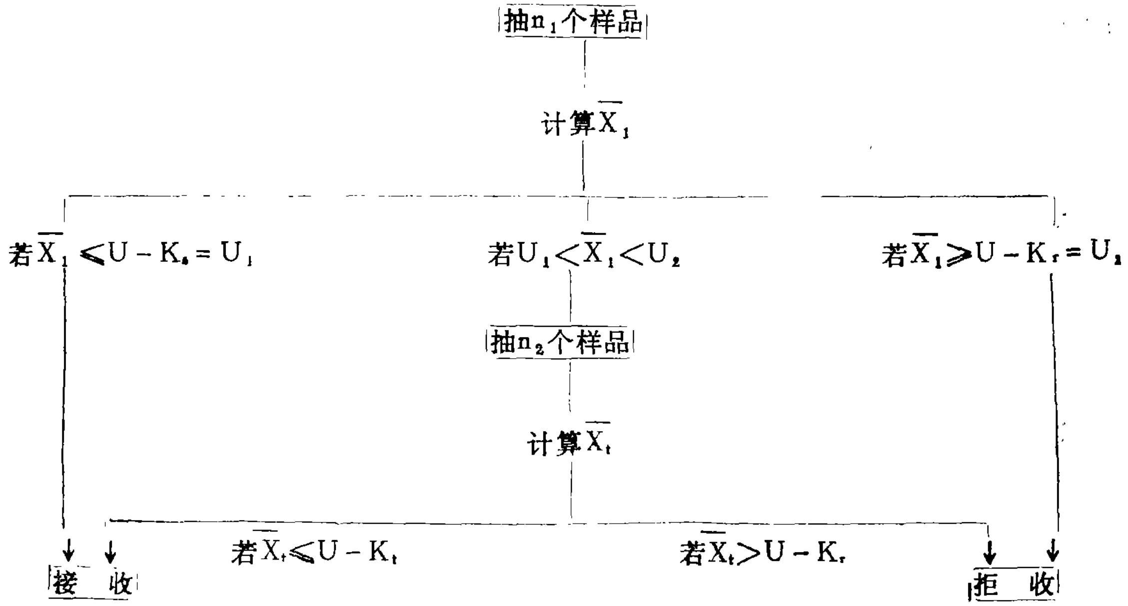
$\therefore p_0=1-\left(\dfrac{L_1}{L_2}\right)^{\frac{L}{L_2-L_1}}$　为ASN(p)的极大值点

$$\because ASN(p)=n_1+n_2\left[\int_0^{L_1}\frac{(n_1\lambda y)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{-n_1\lambda y}n_1\lambda dy-\int_0^{L_2}\frac{(n_1\lambda y)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{-n_1\lambda y}n_1\lambda dy\right]$$

$$\therefore ASN_{极大}=n_1+n_2\Big[(1+n_1\lambda_0L_2+\cdots+\frac{(n_1\lambda_0L_2)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{-n_1\lambda_0L_2}$$

$$-(1+n_1\lambda_0L_1+\cdots+\frac{(n_1\lambda_0L_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!})e^{-n_1\lambda_0L_1}\Big]$$

同样，对于规定上限的情形，设上限为u不合格品率$p=p(X>U)$，我们考虑由如下框图所规定的计量二次抽样方案：



其中K_a，K_r，K_t均为判定数组，n_1与n_2分别为第一样本与第二样本的大小，$\overline{X}_1$为第一样本的均值，$\overline{X}_t$为联合样本的均值。

则$p_0=\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^{\frac{U}{U_1-U_2}}$为ASN(p)的极大值点，

$$\lambda_0=\frac{\ln\frac{U_2}{U_1}}{U_2-U_1}$$

$$ASN_{极大}=n_1+n_2\Big[\Big(1+n_1\lambda_0U_1+\cdots+\frac{(n_1\lambda_0U_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\Big)e^{-n_1\lambda_0U_1}$$

$$-\Big(1+n_1\lambda_0U_2+\cdots+\frac{(n_1\lambda_0U_2)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\Big)e^{-n_1\lambda_0U_2}\Big]$$

其证明与规定下限时的证法相同。

参 考 文 献

〈1〉 马毅林编 《工业应用抽样检验方法》
〈2〉 《应用数学学报》 第六卷 第一期 1983年1月
〈3〉 中山大学数学系编 《概率论及数理统计》