多点边值问题的探讨

王 广 德

（数学教研室）

在研究具有非均匀介质的实际问题时，如非均匀电磁场理论，水土和湿土动力学问题等提出常微分方程和偏微分方程的多点边值问题[1]（非局部边值问题）。这一课题新近工作可参看〔2〕—〔6〕，〔8〕。此文运用常微分方程求周期解的M·Urabe方法[7]，改进了文〔6〕的结果。

设Ω是由直线$x=0$，$y=1$及$y=x$所围成的三角形区域。问题(G)：

$$\begin{cases} u_{xy}=F(x,\ y,\ u,\ u_x)-b(x,\ y)u_y, & (x,\ y)\in\Omega \quad (A)\\ u(x,\ 1)=h(x), & x\in[0,\ 1] \quad (B)\\ u(0,\ y)=\sum\limits_{i-1}^{n-j}\alpha^i_{n-j}(y)u(x_i,\ y)+\beta_{n-j}(y) & \quad (C)\\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1 \end{cases}$$

称为非局部边值问题（多点边值问题），而条件（B）（C）称非局部边值条件，其中$0<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1$，$x_{n-j-1}\leqslant y\leqslant x_{n-j}$，以下假设：$1^\circ.b(x,y)\in C(\overline{\Omega})$；$2^\circ.\alpha^i_{n-j}(y),\beta_{n-j}(y)\in C^1[0,\ 1]$；$3^\circ.h(x)\in C^2[0,\ 1]$；$4^\circ.\Delta(y)=1-\sum\limits_{i-1}^{n-j}\alpha^i_{n-j}(y)\exp(\int_0^{x_i}b(x,\ y)dx)\neq 0$

引理： 设$L(u)=u_{xy}+b(x,\ y)u_y$，$b(x,\ y)\in C^1(\overline{\Omega})$且条件$2^\circ$—$4^\circ$成立，则问题（$G_1$）：

$$\begin{cases} L[u]=Q(x,\ y), & (x,\ y)\in\Omega\\ (B),\ (C) \end{cases}$$

对任一$Q(x,\ y)\in C(\overline{\Omega})$，正则解存在唯一。

证明： $(x_0,\ y_0)$为Ω内的任意固定点，则不难作出$L[u]$的Riemann函数$V(x,\ y;\ x_0,\ y_0)=\exp\ (\int_x^{x_0}b(x,\ y)dx)$于是由Green公式以及非局部边值条件（B），(C)立即得到问题（G_1）的解的表达式

$$(1)\qquad u(x_0,\ y_0)=G(x_0)+A(x_0,\ y_0)\varphi(y_0)-\int_1^{y_0}V_y(0,\ y;\ x_0,\ y_0)\varphi(y)dy$$

$$+\int_0^{x_0}\int_1^{y_0}V(x,\ y;\ x_0,\ y_0)Q(x,\ y)dxdy.$$

而$u(0,\ y)=\varphi(y)$是Volterra积分方程

$$(2)\quad \varphi(y_0)=F(y_0)+\int_1^{y_0}k(y_0,y)\varphi(y_0)dy$$

$$+\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_{n-j}^{i}(y_0)\int_0^{x_i}\int_1^{y_0}V(x,y;x_0,y_0)Q(x,y)dxdy \text{的解,}$$

其中$A(x_0,y_0)=\exp(\int_0^{x_0}b(x,y_0)dx)$,

$$G(x_0)=A(x_0,1)h(0)+h(x_0)$$

$$k(y_0,y)=1/\Delta(y_0)\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_{n-j}^{i}(y_0)A(x_i,y\int_0^{x_i}b_y(x,y)dx$$

$$F(y_0)=1/\Delta(y_0)\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_{n-j}^{i}(y_0)G(x_i)$$

现设Volterra积分方程的予解式为$R(y_0,y)$ 则有

$$(3)\quad \varphi(y_0)=\int_1^{y_0}R(y_0,y)V(y,Q)dy+F_1(y_0)+V(y_0,Q),$$

其中 $V(y_0,Q)=\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_{n-j}^{i}(y_0)\int_0^{x_i}\int_1^{y_0}V(x,y;x_0,y_0)Q(x,y)dxdy$,

$$F_1(y_0)=\int_1^{y_0}R(y_0,y)F(y)dy+F(y_0)。$$

将(3)代入(1)得问题(G_1)的解:

$$(4)\quad u(x_0,y_0)=\int_0^{x_0}\int_1^{y_0}V(x,y;x_0,y_0)Q(x,y)dxdy$$

$$+A(x_0,y_0)R(y_0,Q)+G'(x_0,y_0)$$

$$+\int_1^{y_0}V_y(0,y;x_0,y_0)R(y,Q)dy,$$

其中$G'(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)F_1(y_0)+G(x_0)+\int_1^{y_0}V_y(0,y;x_0,y_0)F_1(y)dy$,

$$R(y_0,Q)=\int_1^{y_0}R(y_0,y)V(y,Q)dy-V(y_0,Q)$$

以下我们运用M・Urabe方法证明(G)的正则解的存在唯一性。设$b_\delta(x,y)=J_\delta b(x,y)$,

其中J_δ为Friedrich算子。于是$b_\delta(x,y)$有以下性质:(1)$b_\delta(x,y)\in C^{\infty}_{\alpha}(\overline{\Omega})$;(2)当$\delta\to0$时,$b_\delta(x,y)\to b(x,y)$一致成立。作$L_\delta[u]=u_{xy}+b_\delta(x,y)u_y$,这样我们得到与问题(G)等价的问题$(G_\delta)$:

$$\begin{cases}L_\delta[u]=F(x,y,u,u_x)-[b(x,y)-b_\delta(x,y)]u_y\\(B),(C)\end{cases}$$

由$b_\delta(x, y)$的性质(1)知，$L_\delta[u]$的Riemann函数存在且

$$V_\delta(x, y; x_0, y_0)=\exp\left(\int_x^{x_0} b_\delta(x, y_0)dx\right).$$

又由$b_\delta(x, y)$的性质(2)知，$\Delta_\delta(y)\to\Delta(y)\neq 0$，

$$其中\Delta_\delta(y)=1-\sum_{i=1}^{n-j}\alpha^i_{n-j}(y)\exp\left(\int_0^{x_i} b_\delta(x, y)d_x\right).$$

现取定$\delta_0>0$使得当$0<\delta<\delta_0$时，对任意$\varepsilon>0$，有$|b-b_\delta|<\varepsilon$，$\Delta_\delta(y)\neq 0$，置$Q(x, y)=F(x, y, u, u_x)-[b(x, y)-b_\delta(x, y)]u_y$，将(4)中$V(x, y; x_0, y_0)$换为$V_\delta(x, y; x_0, y_0)$，则由引理得泛函积分方程：

$$(5)\qquad Q(x_0, y_0)=F(x_0, y_0, \rho_1(Q), \rho_2(Q))-[b(x_0, y_0)-b_\delta(x_0, y_0)]\rho_3(Q).$$

其中$\rho_1(Q)$，$\rho_2(Q)$ $\rho_3(Q)$分别表示(4)中$V(x, y; x_0, y_0)$换为$V_\delta(x, y; x_0, y_0)$后所得的$u(x, y)$，$u_x(x, y)$，$u_y(x, y)$。

定理。设条件1°—4°成立，并且$F(x, y, u, u_x)$对一切变元连续，对变元u，u_x满足Lipschitz条件，则问题(G)的正则解存在唯一。

证明。因问题(G)与(G_δ)等价，故由引理只须证明泛函积分方程(5)存在唯一连续解。设$D=\{Q(x, y)\,|\,Q\in C(\Omega)\}$为具有模$\|Q\|_\lambda=\mathrm{Sup}(|Q|e^{-\lambda y})$的Banach空间，定义算子T：$TQ=F(x, y, \rho_1(Q)\rho_2(Q)), -(b-b_\delta)\rho_3(Q)$，由$\rho_i$的表达式易知，T映D到自身。由条件，对$Q_1$，$Q_2\in D$，有（记L为Lipschitz常数）

$$(6)\qquad |TQ_1-TQ_2|\leqslant L\sum_{i=1}^{2}|\rho_i(Q_1)-\rho_i(Q_2)|+\varepsilon|\rho_3(Q_1)-\rho_3(Q_2)|$$

注意到表达式

$$V(y_0, Q)=\sum_{i=1}^{n-j}\alpha^i_{n-i}(y_0)\int_0^{x_0}\int_1^{y_0}V(x, y; x_0, y_0)Q(x, y)dxdy.$$

故存在$M>0$，使得

$$\begin{aligned}|V(y_0, Q_1)-V(y_0, Q_2)|&\leqslant M\int_0^{x_i}\int_1^{y_0}|Q_1(x, y)-Q_2(x, y)|dxdy\\&\leqslant M\|Q_1-Q_2\|\int_1^{y_0}e^{\lambda y}dy\\&\leqslant\frac{M}{\lambda}\|Q_1-Q_2\|_\lambda e^{\lambda y_0}\end{aligned}$$

由$R(y_0, Q)$的表达式立即得到

$$|R(y_0, Q_1)-R(y_0, Q_2)|\leqslant\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}\right)M\|Q_1-Q_2\|_\lambda e^{\lambda y_0},$$

$$|R_{y_0}(y_0, Q_1)-R_{y_0}(y_0, Q_2)|\leqslant\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)M\|Q_1-Q_2\|_\lambda e^{\lambda y_0},$$

完全类似地可得估计：

$$\left|\int_0^{x_0}\int_1^{y_0} V(x,y;x_0,y_0)[Q_1(x,y)-Q_2(x,y)]dxdy\right| \leqslant \frac{M}{\lambda}\|Q_1-Q_2\|_\lambda e^{\lambda y_0}$$

$$\left|\int_0^{x_0}\int_1^{y_0} V_{x_0}(x,y;x_0,y_0)[Q_1(x,y)-Q_2(x,y)]dxdy\right| \leqslant \frac{M}{\lambda}\|Q_1-Q_2\|_\lambda e^{\lambda y_0},$$

$$\left|\int_0^{x_0}\int_1^{y_0} V_{y_0}(x,y;x_0,y_0)[Q_1(x,y)-Q_2(x,y)]dxdy\right| \leqslant \frac{M}{\lambda}\|Q_1-Q_2\|_\lambda e^{\lambda y_0},$$

$$\left|\int_0^{x_0} V(x,y_0;x_0,y_0)[Q_1(x,y_0)-Q_2(x,y_0)]dx\right| \leqslant M\|Q_1-Q_2\|_\lambda e^{\lambda y_0}$$

注意到$\rho_1(Q)$，$\rho_2(Q)$，$\rho_3(Q)$的表达式，得估计式

$$|\rho_i(Q_1)-\rho_i(Q_2)|\leqslant M\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\|Q_1-Q_2\|_\lambda e^{\lambda y_0},$$

其中$i=1, 2$。

$$|\rho_3(Q_1)-\rho_3(Q_2)|\leqslant M\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\|Q_1-Q_2\|_\lambda e^{\lambda y_0}$$

由（6）得估计

$$\|TQ_1-TQ_2\|_\lambda\leqslant\left[LM\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)+\varepsilon M\right]\|Q_1-Q_2\|_\lambda$$

由$\varepsilon>0$的任意性，选取$\varepsilon\leqslant\frac{1}{3M}$，再选取$\lambda$足够大，使得$LM\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{3M\lambda}\right)<\frac{2}{3}$，则T是映D到自身的压缩映象，从而存在$Q\in D$，使得$TQ=Q$成立，即得定理的证明。

推论。设条件1°—4°成立，且$a, c, f\in c(\overline{\Omega})$。则Laplace双曲型方程

$u_{xy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=f(x,y)$ 的多点边值问题(G)存在唯一正则解。

M·P·Kxa$_H$要求$a, b\in C^1(\overline{\Omega})$，而推论仅须$a, b\in c(\overline{\Omega})$。

（下转第4页）

含有n个3—回路。事实上按（p，q_{max}）的唯一性，（2n，q_{max}）是也只是K（n，n），它的任意两非邻接点，必然同时属于V_1，或同时属于V_2连结两个非邻接点即为（2n，n^2+1）不妨设此两非邻接点v_i，v_j均属于V_1，这时邻接v_i，v_j的边e_{ij}与V_2中（$|V_2|=n$）的每一顶点构成一个3—回路。

推论3：若$|V|$为奇数2n+1则不含3—回路的最大线数图（2n+1，q_{max}）增加一条边即含有

$$\begin{cases} n+1\text{个}\quad 3\text{—回路}\quad \text{当该边的邻接点属于}V_1\ (|V_1|=n) \\ n\text{个}\quad 3\text{—回路}\quad \text{当该边的邻接点属于}V_2\ (|V_2|=n+1) \end{cases}$$

（证法与推论2相同）

参 考 文 献

〔1〕J. A. Bondy and U. S. R. Murty GRAPH THEORY WITH APPLICATIONS .

〔2〕美F.哈拉里著《图论》

（上接16页）

参 考 文 献

[1]A • M · Нахумев,Дифферен · Урав 18（1982）NO.1

[2]曹策问，一个带多点边界条件的特征问题 郑州大学学报（自然科学报）1 （1981）89－100.

[3]李岳生，中国科学 2 （1983） 147－157

[4]魏光祖，袁忠信. 拟抛物型方程的某些非局部边值问题与Volterra积分方程。

[5]M • X · MXанукoв，Дифферен，урав19（1983）NO.1

[6]M · P · Кхан，Дифферен · урав（1982）NO.6

[7]M • Ro s eau，Differen. Equat. Masson（9）6.

[8]G · Morosamu，J · Differen. Equat. 43（1982）NO.3.