均布荷载下板内有两点支承的一边固定三边自由的矩形板

王本瑞　　李桂生

（基础部）　　（土建系）

提　要

本文利用广义简支边的概念和叠加原理，求得了在均布荷载下板内有两个点支承的一边固定、三边自由矩形板的弯曲解。

一、引　言

矩形板的一边为固定，三边为自由，并且沿自由边有若干点支承的弯曲问题，张福范教授及其他同志在最近的工作[1]，[2]，[3]，[4]中，引用广义简支边的概念和叠加原理，已经讨论过。本文仍采用广义简支边的概念和叠加原理，讨论在均布荷载作用下，在板内与固定边相平行的中线上有两个点支承的一边固定、三边自由的矩形板的弯曲解。

设矩形板的边$y=0$为固定边，其他三边$x=0$，$x=a$，$y=b$为自由边，并且在板内$x=\frac{a}{4}$，$y=\frac{b}{2}$及$x=\frac{3a}{4}$，$y=\frac{b}{2}$处均有一个点支承，令支承反力分别为P'、P''，方向向上。此时，所欲求解的问题可归结为：

在板的边界内，须满足偏微分方程和点支承条件：

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D} \qquad (a)$$

$$(w)_{\substack{x=\frac{a}{4}\\ y=\frac{b}{2}}}=(w)_{\substack{x=\frac{3a}{4}\\ y=\frac{b}{2}}}=0 \qquad (b)$$

其中：q为荷载集度，D为抗弯刚度。

在板的边界上，须满足边界条件和角点条件：

$$(w)_{y=0}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=0 \qquad (c)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\ x=a}}=0 \qquad (d)$$

＊本文于1984年9月10日收到。

$$D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\x=a}}=0 \qquad (e)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b}=0 \qquad (f)$$

$$D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]_{y=b}=0 \qquad (g)$$

$$(R)_{\substack{(0,\ b)\\(a,\ b)}}=2(1-\mu)D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{(0,\ b)\\(a,\ b)}}=0 \qquad (h)$$

二、叠加法的组成部分

A、一四边简支的矩形板，在均布荷载q作用下。板的弯曲面等为：

$$w=\frac{4qa^4}{D\pi^4}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{1}{m^5}\left\{1-\cosh\frac{m\pi y}{a}+\frac{1}{2}\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right.$$
$$-\frac{\cosh\alpha_m-1}{\sinh\alpha_m}\left[\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right.$$
$$\left.\left.-2\left(1-\frac{\alpha_m}{2\sinh\alpha_m}\right)\sinh\frac{m\pi y}{a}\right]\right\}\sin\frac{m\pi x}{a} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{2qa^3}{D\pi^4}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{1}{m^4}$$
$$\times\left[\tanh\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\cosh^2\frac{\alpha_m}{2}}\right]\sin\frac{m\pi x}{a} \qquad (2)$$

$$(V_y)_{y=b}=-\frac{2qa}{\pi^2}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\frac{m\pi x}{a}$$
$$\times\left[(3-\mu)\tanh\frac{\alpha_m}{2}-(1-\mu)\frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\cosh^2\frac{\alpha_m}{2}}\right] \qquad (3)$$

$$(V_x)_{x=a}=-\frac{2qb}{\pi^2}\sum_{i=1,3\cdots}^{\infty}\frac{1}{i^2}\sin\frac{i\pi y}{b}$$
$$\times\left[(3-\mu)\tanh\frac{\beta_i}{2}-(1-\mu)\frac{\frac{\beta_i}{2}}{\cosh\frac{\beta_i}{2}}\right] \qquad (4)$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=\frac{4(1-\mu)}{\pi^3}qa^2\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{1}{m^3}$$

$$\times\left(\tanh\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\cosh^2\frac{\alpha_m}{2}}\right) \tag{5}$$

$$(w)_{\substack{x=\frac{a}{4}\\y=\frac{b}{2}}}=\frac{4qa^4}{D\pi^5}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{1}{m^5}\left\{1-\cosh\frac{\alpha_m}{2}+\frac{\alpha_m}{2}\sinh\frac{\alpha_m}{2}\right.$$

$$-\frac{\cosh\alpha_m-1}{\sinh\alpha_m}\left[\frac{\alpha_m}{2}\cosh\frac{\alpha_m}{2}\right.$$

$$\left.\left.-2\left(1-\frac{\alpha_m}{2\sinh\alpha_m}\right)\sinh\frac{\alpha_m}{2}\right]\right\}\sin\frac{m\pi}{4} \tag{6}$$

其中， $\alpha_m=\frac{m\pi b}{a}$ $\beta_i=\frac{i\pi a}{b}$

B、一四边简支的矩形板，有一集中力P'作用在板的对称线$y=\frac{b}{2}$上的一点$\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)$

此时，板的弯曲面方程为：

$$w=-\frac{p'a^2}{2D\pi^3}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{4}\sin\frac{m\pi x}{a}}{m^3\cosh\frac{\alpha_m}{2}}\left[\sinh\frac{m\pi y}{a}\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_m}{2}\tanh\frac{\alpha_m}{2}\sinh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right] \tag{7}$$

这弯曲面方程只适用于$y\leqslant\frac{b}{2}$。但由于对称，我们也可以用这方程计算另一半板的挠度与内力分量弯矩等。

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=-\frac{p'b}{4\pi D}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{\tanh\frac{\alpha_m}{2}}{m\cosh\frac{\alpha_m}{2}}\sin\frac{m\pi}{4}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{8}$$

$$(V_y)_{y=b}=\frac{p'}{a}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\sin\frac{m\pi}{4}\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$\times\frac{2+(1-\mu)\frac{\alpha_m}{2}\tanh\frac{\alpha_m}{2}}{2\cosh\frac{\alpha_m}{2}} \tag{9}$$

$$(V_x)_{x=a}=\frac{p'}{b}\sum_{i=1,3\cdots}^{\infty}\frac{\sinh\frac{\beta_i}{4}}{\sinh\beta_i}\sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{i\pi y}{b}$$

$$\times\left[2+(1-\mu)\beta_i\coth\beta_i-(1-\mu)\frac{\beta_i}{4}\coth\frac{\beta_i}{4}\right] \quad (10)$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=-\frac{p'b}{2a}(1-\mu)\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{4}}{\cosh\frac{\alpha_m}{2}}\tanh\frac{\alpha_m}{2} \quad (11)$$

$$(W)_{\substack{x=\frac{a}{4}\\y=\frac{b}{2}}}=-\frac{p'a^2}{2D\pi^3}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{1}{m^3}\sin^2\frac{m\pi}{4}$$

$$\times\left[\tanh\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\alpha_m/2}{\cosh^2\frac{\alpha_m}{2}}\right] \quad (12)$$

C、一四边简支的矩形板，有一集中力P''作用在板的对称线$y=\frac{b}{2}$上的一点（$\frac{3a}{4}$，$\frac{b}{2}$）上，用求B诸式类似的方法，可得板的弯曲面方程等为：

$$W=-\frac{P''a^2}{2D\pi^3}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{\sin\frac{3m\pi}{4}\sin\frac{m\pi x}{a}}{m^3\cosh\frac{\alpha_m}{2}}$$

$$\times\left[\sinh\frac{m\pi y}{a}+\frac{\alpha_m}{2}\tanh\frac{\alpha_m}{2}\sinh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right] \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=-\frac{p''b}{4\pi D}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{\tanh\frac{\alpha_m}{2}}{m\cosh\frac{\alpha_m}{2}}\sin\frac{3m\pi}{4}\sin\frac{m\pi x}{a} \quad (14)$$

$$(V_y)_{y=b}=\frac{p''}{a}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\sin\frac{3m\pi}{4}\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$\times\frac{2+(1-\mu)\frac{\alpha_m}{2}\tanh\frac{\alpha_m}{2}}{2\cosh\frac{\alpha_m}{2}} \quad (15)$$

$$(V_x)_{x=a}=\frac{p''}{b}\sum_{i=1,3\cdots}^{\infty}\frac{\sinh\frac{3\beta_i}{4}}{\sinh\beta_i}\sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{i\pi y}{b}$$

$$\times\left[2+(1-\mu)\beta_i\coth\beta_i-(1-\mu)\frac{3\beta_i}{4}\coth\frac{3\beta_i}{4}\right] \tag{16}$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=-\frac{p''b}{2a}(1-\mu)\sum_{m=1,3\cdots}\frac{\sin\frac{3m\pi}{4}}{\cosh\frac{\alpha_m}{2}}\tanh\frac{\alpha_m}{2} \tag{17}$$

$$(W)_{\substack{x=\frac{a}{4}\\y=\frac{b}{2}}}=-\frac{p''a^2}{2D\pi^3}\sum_{m=1,3\cdots}\frac{\sin\frac{3m\pi}{4}}{m^3}\cdot\sin\frac{m\pi}{4}$$

$$\times\left[\tanh\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\cosh^2\frac{\alpha_m}{2}}\right] \tag{18}$$

D、设矩形板的三边为简支边，y＝b边为广义简支边（图1）。设y＝b边各点的挠度由正弦级数表示为：

$$(W)_{y=b}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}a_m\sin\frac{m\pi x}{a}$$

于是得到：

$$W=\frac{1-\mu}{2}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{a_m}{\sinh\alpha_m}$$

$$\left\{\left(\frac{2}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)\sinh\frac{m\pi y}{a}\right.$$

$$\left.-\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right\}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{19}$$

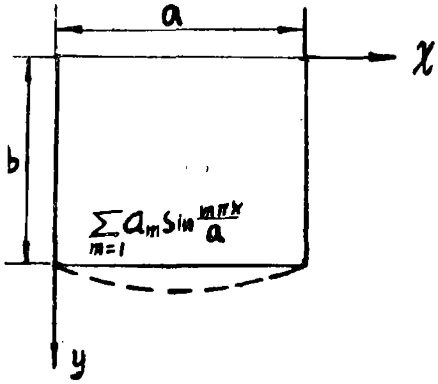

图 1

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{1-\mu}{2a}\pi\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{ma_m}{\sinh\alpha_m}\times\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)\mathrm{sim}\frac{m\pi x}{a} \tag{20}$$

$$(V_y)_{y=b}=\frac{D}{2}(1-\mu)^2\frac{\pi^3}{a^3}\overset{\infty}{\underset{m=1,3\cdots}{m}}m^3a_m$$

$$\times\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{21}$$

$$(V_x)_{x=a}=2D\frac{(1-\mu)^2\pi^2}{a^3}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{a_m}{m}$$

$$\times \sum_{i=1\cdots}^{\infty} \frac{i^3 \cos i\pi}{(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2})^2} \sin \frac{i\pi y}{b} \qquad (22)$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}} = -D(1-\mu)^2\frac{\pi^2}{a^2}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty} m^2 a_m$$

$$\times\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right) \qquad (23)$$

$$(W)_{\substack{x=\frac{a}{4}\\y=\frac{b}{2}}} = \frac{1-\mu}{2}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{a_m}{\sinh\alpha_m}\{(\frac{2}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m)\sinh\frac{\alpha_m}{2}$$

$$-\frac{\alpha_m}{2}\cosh\frac{\alpha_m}{2}\}\sin\frac{m\pi}{4} \qquad (24)$$

E、设矩形板的$y=0$，$y=b$两边为简支边，而$x=0$，$x=a$这两边为广义简支边(图2)。沿边$x=0$，$x=a$的各点挠度由正弦级数表示为

$$(W)_{\substack{x=0\\y=a}} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin\frac{i\pi y}{b}$$

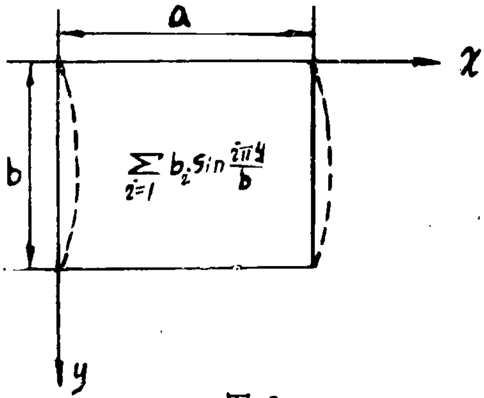

图 2

于是得到

$$W=\frac{1-\mu}{2}\sum_{i=1}^{\infty} b_i\{\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}$$

$$[(\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}-\frac{2}{1-\mu})\sinh\frac{i\pi x}{b}+\frac{i\pi x}{b}\cosh\frac{i\pi x}{b}]$$

$$+\frac{2}{1-\mu}\cosh\frac{i\pi x}{b}-\frac{i\pi x}{b}\sinh\frac{i\pi x}{b}\}\sin\frac{i\pi y}{b} \qquad (25)$$

$$(\frac{\partial w}{\partial y})_{y=0}=\frac{4}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{i}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty} m\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$\times\frac{(2-\mu)\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}}{(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2})^2} \qquad (26)$$

$$(V_y)_{y=b} = D\frac{4(1-\mu)^2\pi^2}{b^3}\sum_{i=1}^{\infty} b_i\frac{\cos i\pi}{i}$$

$$\times \sum_{m=1,3\cdots}^{\infty} \frac{m^3}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \tag{27}$$

$$(V_x)_{x=a} = \frac{D}{2}\frac{(1-\mu)^2\pi^3}{b^3} \sum_{i=1} b_i \cdot i^3 \sin \frac{i\pi y}{b}$$

$$\times \frac{\cosh\beta_i - 1}{\sinh\beta_i}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu} - \frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}\right) \tag{28}$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}} = D\frac{(1-\mu)^2\pi^2}{b^2} \sum_{i=1} i^2 b_i \cos i\pi$$

$$\times \frac{\cosh\beta_i - 1}{\sinh\beta_i}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu} - \frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}\right) \tag{29}$$

$$(W)_{\substack{x=\frac{a}{4}\\y=\frac{b}{2}}} = \frac{1-\mu}{2} \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left\{ \frac{\cosh\beta_i - 1}{\sinh\beta_i}\left[\left(-\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i} - \frac{2}{1-\mu}\right)\sinh\frac{\beta_i}{4}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_i}{4}\cosh\frac{\beta_i}{4}\right] + \frac{2}{1-\mu}\cosh\frac{\beta_i}{4}$$

$$\left.-\frac{\beta_i}{4}\sinh\frac{\beta_i}{4}\right\}\sin\frac{i\pi}{2} \tag{30}$$

F、一四边简支的矩形板，在$y=0$边作用分布弯矩，如图3。

$$M(x) = \sum_{m=1,3\cdots}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

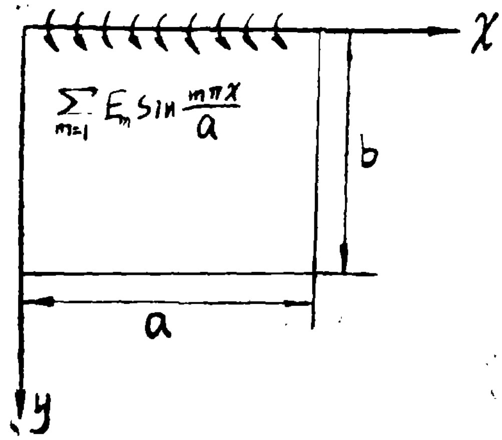

图3

此时，极的弯曲方程为

$$W=\frac{a^2}{2D\pi^2}\sum_{m=1,3\cdots}\frac{E_m}{m^2}\Big[-\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\sinh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}$$

$$+\coth\alpha_m\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\Big]\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{31}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{a}{2D\pi}\sum_{m=1,3\cdots}\frac{E_m}{m}\left(\coth\alpha_m-\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{32}$$

$$(V_y)_{y=b}=-(1+\mu)\frac{\pi}{2a}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{mE_m}{\sinh\alpha_m}$$

$$\times\left(1+\frac{1-\mu}{1+\mu}\alpha_m\coth\alpha_m\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{33}$$

$$(V_x)\Big|_{x=a}=\frac{2}{a}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\cos m\pi\sin\frac{i\pi y}{b}$$

$$\times\frac{E_m i\left[\frac{b^2}{a^2}+(2-\mu)\frac{i^2}{m^2}\right]}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2} \tag{34}$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=-(1-\mu)\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{E_m\cos m\pi}{\sinh\alpha_m}(\alpha_m\coth\alpha_m-1) \tag{35}$$

$$(W)_{\substack{x=\frac{a}{4}\\y=\frac{b}{2}}}=\frac{a^2}{2D\pi^2}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{E_m}{m^2}\sin\frac{m\pi}{4}$$

$$\times\left[-\frac{\sin\frac{\alpha_m}{2}}{\sinh^2\alpha_m}\times\alpha_m-\frac{\alpha_m}{2}\sinh\frac{\alpha_m}{2}+\coth\alpha_m\frac{\alpha_m}{2}\cosh\frac{\alpha_m}{2}\right] \tag{36}$$

G、对于以上的几个部分，角点（0，b），（a，b）是被支承的，要使它们有位移，应叠加以下刚体位移，即

$$W=ky \tag{37}$$

k为待定常数。于是

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=k=\frac{4k}{\pi}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{38}$$

$$(W)_{\substack{x=\frac{a}{4}\\y=\frac{b}{2}}}=\frac{kb}{2} \tag{39}$$

三、以叠加法解矩形板的弯曲

要满足固定边的条件（C），叠加算式（2），（8），（14），（20），（26），(32），（38），并使它们的和为零。于是得到：

$$\frac{1-\mu}{4}\pi\frac{a_m}{\sinh\alpha_m}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)$$

$$+2\frac{a}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{i}\frac{(2-\mu)\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2}-\frac{p'ab}{8\pi D}\frac{\tanh\frac{\alpha_m}{2}}{m^2\cosh\frac{\alpha_m}{2}}\sin\frac{m\pi}{4}$$

$$-\frac{p''ab}{8\pi D}\frac{\tanh\frac{\alpha_m}{2}}{m^2\cosh\frac{\alpha_m}{2}}\sin\frac{3m\pi}{4}+\frac{a^2}{4\pi D}\frac{E_m}{m^2}\left[\coth\alpha_m-\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right]$$

$$+\frac{1}{m^2}\frac{2ka}{\pi}+\frac{qa^4}{D\pi^4}\frac{1}{m^5}\left[\tanh\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\alpha_m/2}{\cosh^2\frac{\alpha_m}{2}}\right]=0$$

$$m=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots \tag{40}$$

要满足自由边（x＝a）的条件（e），叠加算式（4），（10），（22），（28），（34），并使它们的和为零。于是得到：

$$(1-\mu)^2\frac{b^3}{a^3}\cos i\pi\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{a_m}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}$$

$$+\frac{(1-\mu)^2\pi}{4}\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}\right)b_i$$

$$-\frac{1}{i^2\pi^2}\frac{b^3}{Da}\sum_{m=1,3}E_m\frac{\frac{b^2}{a^2}+(2-\mu)\frac{i^2}{m^2}}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}$$

$$+\frac{p'b^2}{2\pi^2 i^3}\left[2+(1-\mu)\beta_i\coth\beta_i-(1-\mu)\frac{\beta_i}{4}\coth\frac{\beta_i}{4}\right]\frac{\sinh\frac{\beta_i}{4}}{\sinh\beta_i}\sin\frac{i\pi}{2}$$

$$+\frac{p''b^2}{2\pi^2 i^3}\left[2+(1-\mu)\beta_i\coth\beta_i-(1-\mu)\frac{3\beta_i}{4}\coth\frac{3\beta_i}{4}\right]\frac{\sinh\frac{3\beta_i}{4}}{\sinh\beta_i}\sin\frac{i\pi}{2}$$

$$-\frac{qb^4}{D\pi^4}\frac{1}{i^5}\left[(3-\mu)\tanh\frac{\beta_i}{2}-(1-\mu)\frac{\beta_i/2}{\cosh^2\beta_i/2}\right]=0$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots \tag{41}$$

上式中的后三项，当i为偶数时应为零。对x＝0边将得同样的方程。

要满足自由边x＝b的条件（g），叠加算式（3），（9），（15），（21），（27），

（33），（39），并使它们的和为零。于是得到：

$$(1-\mu)^2 \quad \frac{\pi a_m}{2}\left[\frac{3+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right]$$

$$+(1-\mu)^2 4\cdot\frac{a^3}{b^3}\sum_{i=1}\frac{bi}{i}\frac{\cos i\pi}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2}$$

$$-(1+\mu)\frac{a^2}{2\pi D}\frac{E_m}{m^2\sinh\alpha_m}\left[1+\frac{1-\mu}{1+\mu}\alpha_m\coth\alpha_m\right]$$

$$+\frac{p' a^2}{m^3\pi^2 D}\frac{2+(1-\mu)\frac{\alpha_m}{2}\tanh\frac{\alpha_m}{2}}{2\cosh\alpha_m/2}\sin\frac{m\pi}{4}$$

$$+\frac{p''\alpha^2}{m^3\pi^2 D}\frac{2+(1-\mu)\frac{\alpha_m}{2}\tanh\frac{\alpha_m}{2}}{2\cosh\frac{\alpha_m}{2}}\cdot\sin\frac{3m\pi}{4}$$

$$-\frac{qa^4}{D\pi^4}\times\frac{2}{m^5}\left[(3-\mu)\tanh\frac{\alpha_m}{2}-(1-\mu)\frac{\frac{\alpha_m}{2}}{\cosh^2\frac{\alpha_m}{2}}\right]=0 \qquad (42)$$

$m=1, 3, 5\cdots\cdots$

要满足支点（a／4，b／2）条件（b），叠加算式（6），（12），（18），（24），（30），（36），并使它们的和为零。于是得到：

$$\frac{1-\mu}{2}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\frac{a_m}{\sinh\alpha_m}\left\{\left(\frac{2}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)\sinh\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\alpha_m}{2}\cosh\frac{\alpha_m}{2}\right\}\sin\frac{m\pi}{4}$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\sum_{i=1,2}^{\infty}bi\left\{\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}\left[\left(\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}-\frac{2}{1-\mu}\right)\sinh\frac{\beta_i}{4}+\frac{\beta_i}{4}\cosh\frac{\beta_i}{4}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{2}{1-\mu}\cosh\frac{\beta_i}{4}-\frac{\beta_i}{4}\sinh\frac{\beta_i}{4}\right\}\sin\frac{i\pi}{2}$$

$$+\frac{a^2}{2D\pi^2}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{E_m}{m^2}\left[-\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\sinh\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\alpha_m}{2}\sinh\frac{\alpha_m}{2}\right.$$

$$\left.+\coth\alpha_m\cdot\frac{\alpha_m}{2}\cdot\cosh\frac{\alpha_m}{2}\right]+\frac{kb}{2}$$

$$-\frac{p' a^2}{2D\pi^3}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{1}{m^3}\sin^2\frac{m\pi}{4}\left[\tanh\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\alpha_m/2}{\cosh^2\alpha_m/2}\right]$$

$$-\frac{p'' a^2}{2D\pi^3}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{\sin\frac{3m\pi}{4}}{m^3}\sin\frac{m\pi}{4}\left[\tanh\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\alpha_m/2}{\cosh\alpha_m/2}\right]$$

$$+\frac{4qa^4}{D\pi^5}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{1}{m^5}\{1-\cosh\frac{\alpha_m}{2}+\frac{\alpha_m}{2}\sinh\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\cosh\alpha_m-1}{\sinh\alpha_m}$$

$$\times[\frac{\alpha_m}{2}\cosh\frac{\alpha_m}{2}-2(1-\frac{\alpha_m}{2\sinh\alpha_m})\sinh\frac{\alpha_m}{2}]\}\sin\frac{m\pi}{4}=0 \qquad (43)$$

由于对称，在 $(\frac{3a}{4},\frac{b}{2})$ 支点处，将得到同样的方程。

要满足自由角点（a，b）的条件（h），叠加算式（5），（11），（17），（23），（29），（35），并使它们的和为零。于是得到：

$$\frac{qa^4}{D\pi^4}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{4}{m^3}(\tanh\frac{\alpha_m}{2}-\frac{\alpha_m/2}{\cosh^2\alpha_m/2})$$

$$+\sum_{m=1,3}^{\infty}m^2a_m\cos m\pi[\frac{1+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}]\times(1-\mu)$$

$$+(1-\mu)\frac{a^2}{b^2}\sum_{i=1,2}^{\infty}i^2b_i\cos i\pi\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}(\frac{1+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i})$$

$$-\frac{p'ab}{2\pi^2D}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{\tanh\alpha_m/2}{\cosh\alpha_m/2}\sin\frac{m\pi}{4}$$

$$-\frac{p''ab}{2\pi^2D}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{\tanh\alpha_m/2}{\cosh\alpha_m/2}\sin\frac{3m\pi}{4}$$

$$-\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{E_m\cos m\pi}{\sinh\alpha_m}(\alpha_m\coth\alpha_m-1)=0 \qquad (44)$$

从另一角点（0，b）处的条件将得到同样的方程。这样，我们就得到（40），（41），（42）三个无穷联立方程组及（43），（44）两个单独的方程，联立求解，就可得出 a_m，b_i，E_m，p'（$p''=p'$），k。从而可求得板的挠度及内力。

四、计　算　实　例

考虑均布荷载下的正方形板，此时a＝b，由于对称，支反力 p' 与支反力 p'' 相等，取 $\mu=0.3$，a_m、b_i、E_m 各取22项，由计算机解方程组（40）～（44）得到 p'、a_m、b_i 和 E_m 的数值。

从计算结果可以看出，系数 a_m 和 b_i 收敛较快，E_m 收敛较慢。当系数都取22项时，a_{22} 仅为 a_1 的 0.165334×10^{-6}，b_{22} 仅为 b_1 的 0.186246×10^{-4}，E_{22} 仅为 E_1 的 1.95×10^{-2}。若取更多的项，各系数的后续项将更小下去。

下面计算板的各点的挠度。把计算得到的 a_m、b_i、E_m 和k的值代入到挠度公式（1），（7），（13），（19），（25），（31），和（37），便得到总的挠度方程。代入各点坐标，即可求得下表列出的一些点的挠度值（单位 qa^4/D）。

从表中可以看出，最大挠度发生在自由边y＝b的中点处，其值为 $0.015135qa^4/D$。与文

献〔5〕相比减少了88.2%，可见板内支承增加了板的刚度。

表 1　正方形板的各点挠度(单位qa^4/D)

y \ x	0	0.125a	0.25a	0.375a	0.500a
0.0000a	0	0	0	0	0
0.125a	-0.16151×10^{-3}	-0.18856×10^{-3}	-0.19736×10^{-3}	-0.18441×10^{-3}	0.173046×10^{-3}
0.250a	-0.509328×10^{-3}	-0.556866×10^{-3}	-0.597995×10^{-3}	-0.545085×10^{-3}	-0.497558×10^{-3}
0.375a	-0.517902×10^{-3}	-0.630026×10^{-3}	-0.769301×10^{-3}	-0.605891×10^{-3}	-0.472519×10^{-3}
0.500a	0.497270×10^{-3}	0.323128×10^{-3}	0	0.361773×10^{-3}	0.575488×10^{-3}
0.625a	0.292924×10^{-2}	0.285550×10^{-2}	0.273478×10^{-2}	0.290742×10^{-2}	0.304381×10^{-2}
0.750a	0.650793×10^{-2}	0.652661×10^{-2}	0.651733×10^{-2}	0.658804×10^{-2}	0.664206×10^{-2}
0.875a	0.106701×10^{-1}	0.107148×10^{-1}	0.1074267×10^{-1}	0.107822×10^{-1}	0.108048×10^{-1}
1.000a	0.149994×10^{-1}	0.1505072×10^{-1}	0.150898×10^{-1}	0.151214×10^{-1}	0.151353×10^{-1}

其次，计算沿固定边$y=0$各点的弯矩值，把计算得到的E_m值代入到：

$$M(x)=\sum_{m=1,3}^{\infty}E_m\sin\frac{m\pi x}{a}$$

并依次把x的值代入上式，即可求得下表列出的固定边$y=0$各点的弯矩值。与文献〔5〕相比较，可以看出弯矩值减少了很多，并且弯矩的符号改变，由此足以说明板内支承不但增加了板的刚度，而且提高了板的强度。

表 2　正方形板固定边各点弯矩(单位qa^2)

M(x) \ X	0.5a	0.375a	0.25a	0.125a	0.0625a	0.03125a	0
本文	0.024679	0.027115	0.03005	0.028492	0.027821	0.025081	0
文献〔5〕	−0.53560	−0.53550	−0.53353	−0.51270	−0.47314	−0.39115	0

为了验证计算结果，我们利用板的整体平衡条件得到：

$$\left\{\frac{qab^2}{2}-\left[(p'+p'')\times\frac{b}{2}-\int_0^a M(x)\Big|_{y=0}dx\right]\right\}\Big/\frac{qab^2}{2}=4\%$$

由此可见，计算结果是能满足工程要求的。

（下转第8页）

参考文献

[1] 秦元勋、王联，王慕秋"运动稳定性理论与应用"科学出版社，1981年。
[2] 见[1]第32页：（二）定理4·1的几何解释。
[3] 见[1]第15页定理3·1。
[4] 许淞庆著"常微分方程稳定性理论"第45页。
[5] 见[4]第33页定理1*
[6] 见[1]104页。
[7] 见[1]90页定理4·5（此时$V \in c_0$）与77页。

（上接28页）

参考文献

[1] 张福范，一边固定两角点支承的矩形板，上海力学，1981年11月，第二期
[2] 林鹏程，均布荷载下一边固定其对中点被支承另两边自由的矩形板，上海力学，1983年，第一期
[3] 黄晓梅等，一边固定对边由多个点支承的矩形板，上海力学，1984年，第一期
[4] 王本瑞　李桂生，均布荷载下一边固定对边自由另两边有点支承的矩形板
[5] 张福范，均布荷载下悬臂矩形板的弯曲，应用数学和力学，第一卷第三期，1980年