

异弹模界面裂缝缝端应力场计算

周鸿钧 段云岭

(水利系)

提 要

本文利用复势理论,推导了异弹模界面裂缝近场应力分量的表达式,指出应力分量在缝端附近随 r 的某种关系($\in \ln r$)而按正弦、余弦规律变化,应力分量的幅值随 r 的增加而减少,即越近缝端幅值愈大。因之异弹模界面裂缝缝端附近应力呈现振动状是界面裂缝的特点之一。

在工程实践中经常遇到异弹模界面裂缝问题,如水利工程中混凝土重力坝坝体混凝土与基岩交界面上的裂缝。由于缝岸是由两种不同材料组成,因此在缝端附近形成较复杂的应力状态。1959年Williams曾指出^[8],在复合材料中不仅几何不连续点会产生应力集中现象,并且在材料不连续处即两种材料的交界面上也会产生应力集中现象。位于两种介质材料交界面上的裂缝,即使只有I型荷载作用,也同时存在 K_I 和 K_{II} 两种应力强度因子。缝端的应力不仅与 \sqrt{r} 成反比,而且当 $r \rightarrow 0$ 时呈现摆动性。随后Erdoğan^[4]、Lin和Mar^[5]、Hong和Stern^[6],也分别得出了类似的结论,并且还发现缝端附近位移场也具有摆动性、摆动最大的幅度与应力强度因子的模有关。造成这种摆动性的原因是特征方程的特征根是复数。后来Smelser^[7]简单地综述了双相材料中的裂缝问题,给出了利用缝岸上的位移信息推求缝端应力强度因子的计算公式。用普通有限元或实验应力分析的方法求得缝岸上的位移值后,即可以由上述公式算出应力强度因子。近来我们将分区混合有限元法^{[1][2]}推广到异弹模界面裂缝中应用,很容易求得缝端应力强度因子。但遗憾的是在上述的有关文献中,均未给出缝端应力场分量的表达式。为此,我们从复势理论出发,推导了异弹模界面裂缝缝端应力场分量的表达式,并得出一些有意义的结论。

计算中假定缝面两侧的不同材料分别为均质的,各向同性的线弹性脆性材料,并将异弹模界面裂缝简化为图1所示的界面裂缝。选取缝端为直角坐标系和极坐标系的原点, x 轴下方($-\pi \leq \theta \leq 0$)为第一种介质材料, x 轴上方($0 \leq \theta \leq \pi$)为第二种介质材料。对于缝端附近的小范围内忽略体力的作用,则线弹性力学中平面问题复变函数解的科洛索夫公式^[8]为:

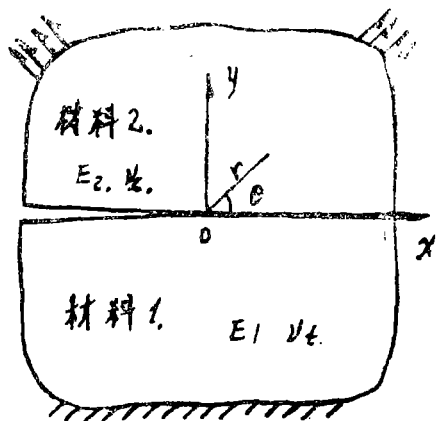


图1 界面裂缝

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^a &= \sigma_{xx}^a + i\sigma_{xy}^a = \varphi_z'(Z) + \overline{\varphi_a'(Z)} - Z\overline{\varphi_a''(Z)} - \overline{\psi_a'(Z)} \\ \sigma_{yy}^a &= \sigma_{yy}^a - i\sigma_{xy}^a = \varphi_a'(Z) + \overline{\varphi_a'(Z)} + Z\overline{\varphi_a''(Z)} + \overline{\psi_a'(Z)}\end{aligned}\quad (1)$$

$$u^a = u_x^a + iu_y^a = \frac{1}{2\mu_a} [k_a\varphi_a(Z) - \overline{Z\varphi_a'(Z)} - \overline{\psi_a(Z)}]$$

式中: $\varphi_a(Z)$ 、 $\psi_a(Z)$ 为复势函数、 $Z = r \cdot e^{i\theta}$ 。

$$k_a = \begin{cases} 3 - 4\nu_a, & \text{平面应变问题。} \\ 3 - \frac{\nu_a}{1 + \nu_a}, & \text{平面应力问题。} \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \theta \leq 0. \\ 2 & 0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

μ_a 、 ν_a 分别为材料的剪切弹性模量和泊松比。

假设缝面上无力作用及在 $\theta = 0$ 的界面上应力和位移连续, 则边界条件为:

$$\begin{aligned}\sigma_{1r} \big|_{\theta=\pi} &= 0, & \sigma_{2r} \big|_{\theta=\pi} &= 0. \\ \sigma_{1r} \big|_{\theta=0} &= \sigma_{2r} \big|_{\theta=0}, & u_1 \big|_{\theta=0} &= u_2 \big|_{\theta=0}.\end{aligned}\quad (2)$$

设复势函数 $\varphi(Z)$ 、 $\psi(Z)$ 取下列形式:

$$\begin{aligned}\varphi_a(Z) &= A_a Z^\lambda \\ \psi_a(Z) &= B_a Z^\lambda\end{aligned}\quad (3)$$

其中 A_a 、 B_a 是待定的复系数; λ 是满足边界条件的特征根。

将式(1)、(3)代入边界式(2)得:

$$\begin{aligned}A_1 e^{-i\lambda\pi} + (\overline{A_1}\lambda + \overline{B_1}) e^{i\lambda\pi} &= 0 \\ A_2 e^{i\lambda\pi} + (\overline{A_2}\lambda + \overline{B_2}) e^{-i\lambda\pi} &= 0 \\ A_1 + \overline{A_1}\lambda + \overline{B_1} - A_2 - (\overline{A_2}\lambda + \overline{B_2}) &= 0 \\ \mu_2(k_1 A_1 - \overline{A_1}\lambda - \overline{B_1}) - \mu_1(k_2 A_2 - \overline{A_2}\lambda - \overline{B_2}) &= 0\end{aligned}$$

化简上式得

$$\begin{aligned}(1 - e^{-i2\lambda\pi}) A_1 - (1 - e^{i2\lambda\pi}) A_2 &= 0 \\ \mu_2(k_1 + e^{-i2\lambda\pi}) A_1 - \mu_1(k_2 + e^{i2\lambda\pi}) A_2 &= 0\end{aligned}$$

为保证上式中 A_1 、 A_2 有非另解, 系数行列式应为:

$$\begin{vmatrix} 1 - e^{-i2\lambda\pi} & -(1 - e^{i2\lambda\pi}) \\ \mu_2(k_1 + e^{-i2\lambda\pi}) & -\mu_1(k_2 + e^{i2\lambda\pi}) \end{vmatrix} = 0$$

将行列式展开并注意到 $-(1 - e^{i2\lambda\pi}) = e^{i2\lambda\pi}(1 - e^{-i2\lambda\pi})$ 得

$$(1 - e^{-i2\lambda\pi}) [-\mu_1(k_2 + e^{i2\lambda\pi}) - \mu_2(k_1 + e^{-i2\lambda\pi}) e^{i2\lambda\pi}] = 0$$

经化简得

$$(1 - e^{-i2\lambda\pi}) [\mu k_2 + \mu_2 + (\mu_2 k_1 + \mu_1) e^{i2\lambda\pi}] = 0\quad (4)$$

式(4)即为满足边界条件的特征方程。

由式(4)可以解得特征根为:

$$\lambda = 0, 1, 2, \dots$$

$$\{\lambda n = (n + \frac{1}{2}) + i \in, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)\}$$

$$\text{式中} \quad \epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln R$$

$$R = \frac{\mu_1 + \mu_2 k_1}{\mu_2 + \mu_1 k_2} = \frac{\mu/\mu_2 + k_1}{1 + \mu_1/\mu_2 k_2} \quad (5)$$

显然 $\bar{\lambda}_n$ 也是其特征根。

由式(1)、(3)可以看出, 在缝端附近, 应力、位移和极径 r 存在下列关系:

$$|u| = o(r^{\operatorname{Re} \lambda}), \quad |\sigma| = o(r^{\operatorname{Re} \lambda - 1}) \quad (6)$$

显然, 为了保证缝端附近应力的奇异性质, 特征根 λ 的实部必须位于 0 和 1 之间, 所以获得奇异性应力状态的特征根为:

$$\lambda = \frac{1}{2} + i \in \quad (7)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2} - i \in$$

需要说明的是, 当特征根仅取式(7)时, 忽略了产生非奇异应力的特征根, 由此得出的缝端应力场仅适用于缝端奇异应力区, 也即是近场公式。

根据式(7)可以假设能够使缝端产生奇异性应力状态的复势函数为:

$$\begin{aligned} \varphi_a(Z) &= A_a Z^\lambda + a_a Z^{\bar{\lambda}} \\ \psi_a(Z) &= B_a Z^\lambda + b_a Z^{\bar{\lambda}} \end{aligned} \quad (8)$$

式中 λ 由式(7)决定。

将式(8), (1)代入(2)式可解得满足全部边界条件的系数为:

$$\begin{aligned} A_a &= A m_a, & a_a &= 0 \\ B_a &= -A \lambda m_a, & b_a &= \bar{A} n_a \end{aligned} \quad (9)$$

式中 A 是任意的复常数。

$$m_a = R^{\alpha-1}, \quad n_a = R^{2-\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (10)$$

由式(1)、(8)、(9)可得到只含有一个复常数的缝端应力场和位移场:

$$\begin{aligned} \sigma_x^a &= \sigma_{xx}^a + i \sigma_{xy}^a \\ &= A \lambda r^{\lambda-1} [m_a e^{i(\lambda-1)\theta} - n_a e^{-i(\lambda-1)\theta}] + \\ &\quad + m_a \bar{A} \bar{\lambda} r^{\bar{\lambda}-1} [(\bar{\lambda}+1) e^{-i(\bar{\lambda}-1)\theta} - (\bar{\lambda}-1) e^{-i(\bar{\lambda}-3)\theta}] \\ \sigma_y^a &= \sigma_{yy}^a - i \sigma_{xy}^a \\ &= A \lambda r^{\lambda-1} [m_a e^{i(\lambda-1)\theta} + n_a e^{-i(\lambda-1)\theta}] + \\ &\quad + m_a \bar{A} \bar{\lambda} r^{\bar{\lambda}-1} (1-\bar{\lambda}) [e^{-i(\bar{\lambda}-1)\theta} - e^{-i(\bar{\lambda}-3)\theta}] \\ 2\mu_a u_a &= 2\mu_a (u_x^a + i u_y^a) \\ &= A r^\lambda [K_a m_a e^{i\lambda\theta} - n_a e^{-i\lambda\theta}] + \\ &\quad + m_a \bar{A} \bar{\lambda} r^{\bar{\lambda}} [1 - e^{i2\theta}] e^{-i\bar{\lambda}\theta} \end{aligned} \quad (11)$$

对于均质材料中的混合型(I+II)裂缝,有定义:

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} \big|_{\theta=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} - i \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{\bar{K}}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{\bar{K}}{\sqrt{2\pi}} r^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

式中 $K = K_I + iK_{II}$

类似地,对于界面缝裂可定义为:

$$\sigma_{yy}^a - i\sigma_{xy}^a \big|_{\theta=0} = \frac{\bar{K}}{\sqrt{2\pi}} r^{\lambda-1} \quad (13)$$

由式(11)得:

$$\sigma_{yy}^a - i\sigma_{xy}^a \big|_{\theta=0} = A\lambda r^{\lambda-1} (m_a + n_a) = A\lambda r^{\lambda-1} (1+R)$$

将上式代入(13)得:

$$A = \frac{\bar{K}}{\sqrt{2\pi} (1+R) \lambda} = \frac{LK_0}{\lambda_0} e^{-i(\phi+\delta)} \quad (14)$$

$$\text{式中: } K_0 = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}, \quad \phi = \text{tg}^{-1}(K_{II}/K_I)$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \epsilon^2}, \quad \delta = \text{tg}^{-1}(2\epsilon) \quad (15)$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (1+R)}$$

由式(7)、(11)、(14)即可得到缝端附近的应力场的各分量表达式:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^a &= Lr^{-\frac{1}{2}} e^{-\epsilon\theta} [f_{xx}^a(r, \theta) K_I + g_{xx}^a(r, \theta) K_{II}] \\ \sigma_{yy}^a &= Lr^{-\frac{1}{2}} e^{-\epsilon\theta} [f_{yy}^a(r, \theta) K_I + g_{yy}^a(r, \theta) K_{II}] \\ \sigma_{xy}^a &= Lr^{-\frac{1}{2}} e^{-\epsilon\theta} [f_{xy}^a(r, \theta) K_I + g_{xy}^a(r, \theta) K_{II}] \end{aligned} \quad (16)$$

式中:

$$\begin{pmatrix} f_{xx}^a \\ f_{yy}^a \\ g_{xy}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_a \cos(t - \frac{\theta}{2}) \\ m_a \sin\theta [\sin(t - \frac{3\theta}{2}) - 2\epsilon \cos(t - \frac{3\theta}{2})] \\ n_a e^2 \epsilon^0 \cos(t + \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} g_{xx}^a \\ g_{yy}^a \\ f_{xy}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_a \sin(t - \frac{\theta}{2}) \\ m_a \sin\theta [\cos(t - \frac{3\theta}{2}) + 2\epsilon \sin(t - \frac{3\theta}{2})] \\ n_a e^2 \epsilon^0 \sin(t + \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

式中 $t = \epsilon \ln r$

由上式可见对于界面裂缝, $f_a(r, \theta)$ 、 $g_a(r, \theta)$ 不仅与两种介质材料的特性有关,

而且与 r 也有关，这正是异弹模界面裂缝的特殊之处。

如果两种介质材料相同，即

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu, \quad v_1 = v_2 = v \text{ 时}$$

$$\text{则 } k_1 = k_2, \quad R = \frac{\mu_1 + \mu_2 k_1}{\mu_2 + \mu_1 k_2} = 1$$

$$\epsilon = -\frac{1}{2\pi} \ln R = 0, \quad t = \epsilon \ln r = 0$$

$$L = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}, \quad m_a = n_a = 1$$

将上之数代入式(17)、(16)，即得：

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^a &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) K_I - \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) K_{II} \right] \\ \sigma_{yy}^a &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) K_I + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} K_{II} \right] \\ \sigma_{xy}^a &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} K_I + \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) K_{II} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

从上式显然可以看到，对均质材料缝两侧各应力分量与材料特性无关，两种材料中的应力分布是相同的。实际上式(18)即为均质材料中的裂缝缝端应力场的公式。

从以上公式分析我们可以看到：

1) 均质材料中的裂缝可视为界面裂缝的一种特殊情况，式(16)的应力公式不仅适用于界面裂缝，也适用于均质材料中的裂缝。

2) 当两种介质材料的弹性特性相同时，界面裂缝问题可以简单地按均质材料中的裂缝问题进行断裂分析。当然，对于断裂判据，还应考虑界面的接触强度问题，即是否可能沿界面扩展问题。

为了进一步认识界面裂缝的特殊性，我们进一步讨论界面裂缝缝端应力场的分布状态。

为简便计，仅考察 $\theta = 0$ 射线上（即界面上）的应力分布。将式(17)代入式(16)，注意到 $\theta = 0$ 得：

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^a &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \frac{3m_a - n_a}{1+R} (K_I \cos t + K_{II} \sin t) \\ \sigma_{yy}^a &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} (K_I \cos t + K_{II} \sin t) \\ \sigma_{xy}^a &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} (-K_I \sin t + K_{II} \cos t) \end{aligned} \quad (19)$$

注意 $K_I = K_0 \cos \phi$ ， $K_{II} = K_0 \sin \phi$ ，则式(19)可以简化为：

$$\sigma_{xx}^a = \frac{K_0}{\sqrt{2\pi r}} \frac{3m_a - n_a}{1+R} \cos(t - \phi)$$

$$\sigma_{yy}^a = \frac{K_0}{\sqrt{2\pi r}} \cos(t - \phi) \quad (20)$$

$$\sigma_{xy}^a = -\frac{K_0}{\sqrt{2\pi r}} \sin(t - \phi)$$

其中 ϕ 、 t 见式(15)及(17)

对于某一确定的界面裂缝, R 、 ϕ 、 K_0 均为定值。由式(20)可以看出, 在界面上:

1) 应力分量在缝端附近随 r 的某种关系($\propto Lnr$)而按正余弦规律分布。

2) 应力分量的幅值随 r 的增加而减少, 即越近缝端、幅值越大。

显然, 当两种介质材料相同时, $t = 0$, 式(20)即简化为:

$$\sigma_{xx}^a = \frac{K_0}{\sqrt{2\pi r}} \cos\phi$$

$$\sigma_{yy}^a = \frac{K_0}{\sqrt{2\pi r}} \cos\phi \quad (21)$$

$$\sigma_{xy}^a = \frac{-K_0}{\sqrt{2\pi r}} \sin\phi$$

此即均质材料中的裂缝尖端附近应力场沿 $\theta = 0$ 射线上的分布, 可见它们的各应力分量只随 r 而变化, 不再随 r 的某种函数按正、余弦变化。由此可见在缝端附近应力分量呈现振动状态也是界面裂缝的特点之一。

在推导界面裂缝缝端附近应力场时, 我们只取了产生奇异应力的特征根(7)式, 略去了产生非奇异应力的特征根, 所得的应力公式只适用于缝端附近某个范围, 但要估计这个

范围是比较困难的。今为简便计, 我们用均质材料中典型的 I 型裂缝估计这个范围, 作为对界面裂缝近场范围的参考。

设图2所示的双向拉伸 I 型裂纹, 满足全部边界条件的 Z 函数为

$$Z = \frac{6z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

利用上式和 Westergaarden 应力函数

可求得 $\theta = 0, \pi$ 方向上的精确解为

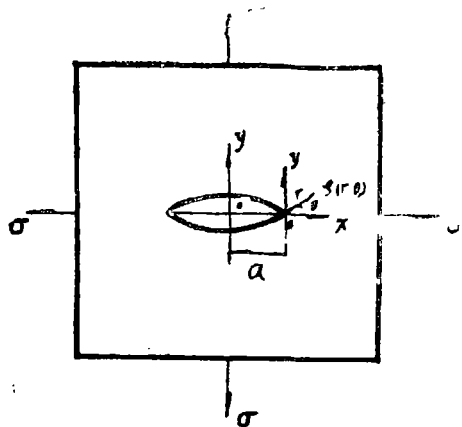


图2 I型裂缝

$$\begin{aligned}\sigma_r^*|_{\theta=0} &= \frac{6a(1+r/a)}{\sqrt{2ar(1+r/2a)}} \\ u_r^*|_{\theta=\pi} &= \frac{k+1}{4\mu} 6\sqrt{2ar(1-r/2a)}\end{aligned}\quad (22)$$

为了得到近场解, 设

$$r \ll a, \quad \varphi/a = r \cdot e^{i\theta}/a \rightarrow 0$$

经变换和简化可以求得 $\theta=0$ 方向上近场解答:

$$\sigma_r|_{\theta=0} = \frac{6a}{\sqrt{2ar}} \quad (23)$$

$$u_r|_{\theta=\pi} = \frac{k+1}{4\mu} 6\sqrt{2ar}$$

根据式(22)和(23)即可以进行误差分析:

$$\begin{aligned}\delta_{\sigma r} &= \left| \frac{\sigma_r^* - \sigma_r}{\sigma_r} \right| = \left| \frac{1+r/a}{1+r/2a} - 1 \right| \\ \delta_{u r} &= \left| \frac{u_r^* - u_r}{u_r} \right| = \sqrt{1-r/2a} - 1\end{aligned}\quad (24)$$

可见相对误差随 r/a 而变化, 表1和图3给出了这种变化规律(即近场解与精确解的相对误差值随 r/a 的变化规律)

表1 近场解误差分析

r/a	0.02	0.04	0.045	0.05	0.06	0.08	0.10	0.118	0.12
$\delta y_a(\%)$	1.49	2.98	3.34	3.71	4.44	5.9	7.35	8.64	8.78
$\delta u r(\%)$	0.5	1.0	1.14	1.26	1.51	2.02	2.53	2.99	3.05

由表1和图3可以看出:

1) 对于同一个 r/a , 近场解应力场产生的误差大约是位移场的三倍; 对于同一个误差等级来说位移场对应的 r/a 约是应力场的三倍, 这就是说, 对于同一个近似程度, 位移场的适用范围大约是应力场的适用范围的三倍。

2) 取近场解与精确解的相对误差为3%时, 则应力场和位移场的适用范围分别为:

$r/a \leq 0.04, 0.12$; 如取5%的误差时, 分别为: $r/a \leq 0.068, 0.195$ 。

顺便说明, 应力、应变型奇异元尺寸应保持在应力场的适用范围之内, 位移型奇异元尺寸应保持在位移场的适用范围之内。通常的位移型奇异元的最佳尺寸均大于应力、应变型的奇异元尺寸, 也因此可以得到解释。

应指出, 以上结果是按双向均匀拉伸中心裂缝得出的, 对于界面裂缝只能作为参考值。

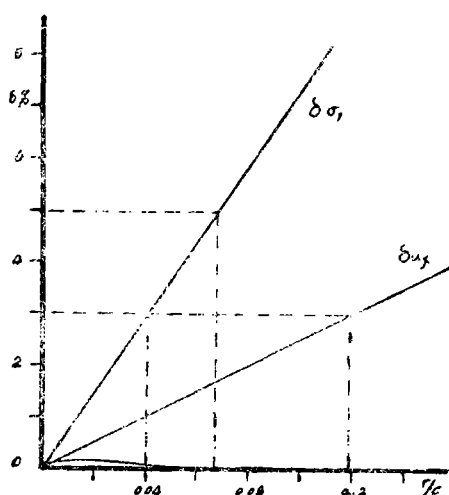


图3 误差曲线

参 考 文 献

- [1] 钱伟长等,在奇异项上叠加有限元法计算应力强度因子。清华大学学报2(1980)。
- [2] 龙驭球等,分区混合有限元法计算应力强度因子。力学学报4(1982)。
- [3] M·L·Williams, The Stress around a Fault or Crack in Dissimilar Media, Bulletin of the Seimological Society of America 49(1959)。
- [4] F. Erdogan, Stress Distribution in a Non-ho-moganous Elastic Plate With Cracks, Journal of Applied Mech., vol. 30。
- [5] K·Y·Lin and J·W·Mar,Finite Element Analysis of Stress Intensity Factory for Cracks at a Bimaterial Interface Int. J. of Fracture, 12 (1976)。
- [6] C. C. Hong and M·Stern. The computation of Stress Intensity Factors in Dissimilar Materials,J. of Elasticity. 8(1978)。
- [7] R·E·Smelser, Evaluation of Stress Intensity Factors for Bimateria Bodies using Humerial Crack Flank Displacements data. Int. Journall of Fracture 15 (1979)。
- [8] 徐芝纶、弹性力学(上册),人民教育出版社、1979。p111—114。
- [9] 李灏等,断裂力学,山东科学出版社、1980年。