反映实数系连续性(完备性)的若干等价命题

袁荣福
(数学教研室)

我们知道，数学分析是用极限理论为工具研究实变数实值函数的性质，因此首先必须清楚了解实数系所具有的性质，尤其是连续性，才能更好地研究函数的性质。

实数系的连续性，不但是数学分析的理论基论，而且也是现代分析中各种抽象空间性质的丰富源泉。

实数系的连续性，是实数系的本质属性。全部数学分析的严格理论基础正是因为实数系的完备性才得以建立。反映实数系连续性的等价命题具有各种各样的表达形式，这些不同的等价形式，大多都是数学分析中非常重要的定理，它们从不同的例面刻划了实数系的连续性。下述命题中的任何一个都表达了实数系的这种性质。

1)有界集合确界存在定理：

每个非空有上(下)界的集合E有唯一的上(下)确界。

集合E的上(下)确界$\beta(\alpha)$是这样一个数，它满足：

1^0对于集合E中任一数x，都有$x\leqslant\beta(\alpha\leqslant x)$；

2^0不论$\varepsilon>0$多么小，E中恒存在一数x，使$\beta-\varepsilon<x\leqslant\beta(\alpha\leqslant x<\alpha+\varepsilon)$

2)有限复盖定理：

若闭区间$[a,b]$被开区间族S所复盖，则必能从S中选出有限个开区间复盖闭区间$[a,b]$

3)聚点原理：

任何有界无穷集E至少有一个聚点。

所谓聚点，即以p_0为心的邻域内，恒有无穷多个点属于E。

4)任何有界数列必有收敛子数列。

5)单调有界数列必有极限。

6)闭区间套定理： 设$I_n=[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$是一闭区间列，它满足：

1^0 $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset;\cdots$

2^0区间的长度趋于0，即$\lim\limits_{n\to\infty}[b_n-a_n]=0$，则存在唯一的实数$\xi$属于一切区间$[a_n,b_n]$，

即$\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$，并且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。

7)每个有界的无限集E存在唯一的上限和下限。(记作$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=l$和$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=L$)

集E的上限L是这样的一个数，它满足：1^0不论$\varepsilon>0$多么小，E的几乎所有元素都适合不等式　$X<L+\varepsilon$；

2^0不论$\varepsilon>0$多么小，E中有无穷多个元素适合不等式$X>L-\varepsilon$。

8)柯西收敛原理：

数到$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是对任给正数ε不论多么小，总存在自然性N，使得高n，m≥N时，有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon$$

9)戴德金定理：

实数集E的任一截割都有界。所谓实数集E的一个截割，就是把E分成两个非空子集X和Y，使满足：

1^0任一实数必包含在、且只包含在两个集X与Y中之一个；

2^0集X中任一数x小于Y中任一数y。

这时称集X为截割的下部，集Y叫截割的上部，E的截割用(x，y)表示。若存在这样一个实数ξ，它或者是下部x中的最大数(这时上部Y中无最小数)或者是上部Y中的最小数(此时X中无最大数)，则称这个截割有界，而ξ就叫这个截割的界数。

上述九个定理(不仅这些)都反映了实数系的连续性(完备性)，它们是数学分析的基础理论，也是研究函数性质的重要工具；这九个定理实际上是两两相互等价的，也就是说从任何一个定理出发都能推出其他的定理。为了方便起见，我们采用下述方案，即

$$\begin{array}{ccccccccc}
1) & \Rightarrow & 2) & \Rightarrow & 3) & \Rightarrow & 4) & \Rightarrow & 5 \\
\Uparrow & & & & & & & & \Downarrow \\
9) & \Leftarrow & 8) & & \Leftarrow & 7) & & \Leftarrow & 6)
\end{array}$$

这样循环地推证一圈，就证明了它们的相互等价性。下面就来证明这些定理：

1)⇒2)

证：采用勒贝格的方法来证明。设x^*是区间[a，b]内具有这样性质的点，使得[a，x^*]能被S中有限个开区间σ复盖。这样的点x^*总是存在的：因为，例如左端a必位于S中某一开区间σ内，所以必存在$\sigma>0$，使a的邻域[a，$a+\sigma$)也含于此σ中，因此该邻域内的点都属于这样的点x^*。设[a，b]中这种点x^*的全体为A，则A是一个数集。

因为A是有界的(每个$x^*\leqslant b$)，由定理1)，它必有上确界，设为C，显然

$$C\leqslant b,$$

从而C是[a，b]中的点，故必含于S中的某一开区间$\sigma_0=(\alpha,\beta)$中。取$\alpha<C<\beta$，由上确界的定义，A中存在着x^*_0，使得$\alpha<x^*_0<C$，因为[a，x^*_0]能被S中有限个开区间σ复盖。故[a，c]也能被有限个开区间复盖(只要在复盖[a，x^*_0]的有限个开区间中再添加一个σ_0就行了)。因此C也属于A。

最后证明$C=b$。否则，若$C<b$，则在(c，β)中又必有A中的点x^*，这与C是A的上确界矛盾。因此b也属于A，即[a，b]能被S中有限个开区间复盖。

注意：在有限复盖定理中，基本区间[a，b]是闭的以及S中的区间是开的，这两个条件缺一不可。

2）$\Longrightarrow$3）

用反证法。作闭区间〔a，b〕$\supseteq$E。

倘若集E没有一个聚点，则E的每个点都是孤立点。现在对〔a，b〕上每个点x作一充分小的邻域$U(x, e_x)$。使得它或者只包含E的有限个点，或者它完全不包含集E的任何点，所有$\Sigma=\{U\}$显然复盖区间〔a，b〕。于是，根据定理2）可在Σ中选出有限个子系$\Sigma^*=\{U_1, U_2, \cdots U_n\}$已经复盖了区间〔a，b〕。因为$EU_1$，$EU_2$，…$EU_n$都是有限集，故$E=EU_1+EU_2+\cdots EU_n$也是有限集。这与E为无穷集相矛盾。于是定理得证。

3）$\Longrightarrow$4）

证：设已知数列为$\{x_n\}$，且对任何n，$|x_n|\leqslant M$。

1^0设有无穷多项x_n具有同一数值ξ。即

$x_{n1}=x_{n2}=\cdots=x_{nk}=\cdots=\xi$，其中$n_1<n_2<\cdots n_k<\cdots$，则$\lim\limits_{k\to\infty} x_{nk}=\xi$。而$\{x_{nk}\}$就是我们要找的一个收敛子数列；

2^0设$\{x_n\}$中只有有限多项相同。则$\{x_n\}$是一有界无穷点集，由定理3），它至少有一个聚点，设为ξ。由聚点的定义，在$(\xi-1, \xi+1)$中，有无穷多个属于$\{x_n\}$的点。我们在其中取一个不等于ξ的点，记为x_{n1}。考虑区间$(\xi-\frac{1}{2}, \xi+\frac{1}{2})$，因为这个区间中也应该包含无穷多个属于E的点。所以可以在其中取一个既不等于ξ又不等于xn_1的点，记为x_{n2}。我们无限制地上继续这种步骤，一般说来，如果互不相同的、不等于ξ的、属于$\{x_n\}$的点x_{n1}，x_{n2}，…x_{nk}已经作出。则考虑区间$(\xi-\frac{1}{k+1}, \xi+\frac{1}{k+1})$中的、属于$\{x_n\}$的点，这种点还是有无穷多的。所以可以取一个不同于$\xi$，$x_{n1}$，$x_{n2}\cdots x_{nk}$的点，记为$x_{nk+1}$。这样一来，我们就作出了一个属于$\{x_n\}$的、互不相同的点组成的子数列$\{x_{nk}\}$，$|x_{nk}-\xi|<\frac{1}{k}$。因此$\lim\limits_{k\to\infty} x_{nk}=\xi$。

4）$\Longrightarrow$5）

证：不失一般性，不妨假定$\{x_n\}$是不减的，即

$$x_1\leqslant x_2\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots<k,$$

根据定理4），从$\{x_n\}$中可以选出一收敛于有限极限的子数列$\{x_{nk}\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{nk}=\xi$。

首先证明对任何自然数n，必有$x_n\leqslant\xi$。因为若有某一个$x_L>\xi$，则一切x_{nk}其号码$n_k>L$者必有$x_{nk}>x_L>\xi$。这时若给$\varepsilon_0<x_L-\xi$，则对充分大的k，只要$n_k>L$便有$x_{nk}>\xi$，从而

$$|x_{nk}-\xi|=x_{nk}-\xi\geqslant x_L-\xi>\varepsilon_0$$

而和$x_{nk}\to\xi$相矛盾。故$\{x_n\}$中一切项都不得大于ξ。

由于 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{nk}=\xi$，

故$\forall\varepsilon>0$，$\exists k$，使得$0\leqslant\xi-x_{nk}<\varepsilon$。因而，只要$n>n_k$，便有$x_n>x_k$，从而

$$0\leqslant\xi-x_n\leqslant\xi-x_{nk}<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$。

5）＝＞6）

证：设给定闭区间套$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$，于是显然有

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}<b_1$$

因此数列$\{a_n\}$不减且有上界。根据定理5），知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$存在。

现在假定k是任一自然数，若$n>k$，则由于$[a_n,b_n]\in[a_k,b_k]$，便有

$$a_k\leqslant a_n\leqslant b_k$$

令　$n\to\infty$，而k保持固定，由于$a_n\to\xi$

故　$a_k\leqslant\xi\leqslant b_k$

这就是说$\xi\in[a_k,b_k]$。但由于k是任意的，故ξ属于一切闭区间$[a_n,b_n]$。

至于数ξ的唯一性，那是非常明显的。事实上，假定另有一个数$\xi'>\xi$也属于一切闭区间，即

$$a_n\leqslant\xi<\xi'\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$$

则对任何n必有$b_n-a_n\geqslant\xi'-\xi>0$，此与$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$相矛盾。于是定理得证。

6）＝＞7）

证：一个闭区间如果它的左半边包含有E的无限多个点，而在它的右半边只可能有E的有限多个点时，我们说这个区间是正则的。不难看出，正则区间的两半中必有一半是正则的。事实上，如果右半区间含有E的无穷多个点，那么这一半就是正则的；如果右半区间只含有E的有限多个点，那么左半区间就是正则的。

因为集E有界，故可作一充分大的闭区间使它完全包含集合E的点，我们把它记作Δ_1，显然Δ_1是正则的。把Δ_1分成两半，设Δ_2是它的两半中正则的那一半，同样，设Δ_3又是Δ_2的两半中正则的那一半。一般地说，Δ_{n+1}是Δ_n的两半中正则的那一半$(n=1,2,\cdots)$。于是Δ_1，Δ_2，$\cdots\Delta_n$，$\cdots$组成一个闭区间套。所以根据定理6），存在着唯一的公共点L属于一切闭区间。我们要证明L就是集E的上限。

事实上，$\forall\varepsilon>0$，由于每个Δ_n都包含L，且$\Delta_n\to0(n\to\infty$时)。故只要n充分大时，一切Δ_n就完全落在$L-\varepsilon$与$L+\varepsilon$之间。根据Δ_n的正则性，一方面每个Δ_n含有集E的无限多个点，可知E中有无限多个元素满足$x>L-\varepsilon$；另一方面，在每个正则区间Δ_n的右边，只可能有集E的有限多个点，故E中大于$L+\varepsilon$者，为数只能是有限个。也就是说E中几乎所有元素满足$X<L+\varepsilon$。由此可知L确实为集E的上限。

同一个集合不可能有两个不同的上限。倘若不然，设集E有两个不同的上限L和L'，假定$L'>L$。则给定$\varepsilon=\frac{L'+L}{2}-L=\frac{L'-L}{2}$。根据上限L的第一个性质，E中几乎所有元素$X<L+\varepsilon$，也就是说最多只可能有有限多个元素$X\geqslant L+\varepsilon=L+\frac{L'-L}{2}=\frac{L'+L}{2}$，但是，另一方面，根据上限$L'$的第二个性质，却必须有无限多个E的元素X，使得

$$X>L'-\varepsilon=L'-\frac{L'-L}{2}=\frac{L+L'}{2}$$

因而应生矛盾。

类似地，可以证明集E有唯一的下限。

7)$\Longrightarrow$8)

证：首先根据数列$\{x_n\}$上限$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, x_n=L$的性质1°和2°可以推出L是$\{x_n\}$的部分极限。为此，需证明能选出收敛于L的子数列$\{x_{n_k}\}$。

作一严格递减趋于0的正数数列$\{\varepsilon_k\}$，设$n_1=1$，假定序号

$$n_1=1<n_2<n_3<\cdots<n_{k-1},$$

已经选出，现在说明怎样选取n_k。依性质1°在$\varepsilon=\varepsilon_k$时，必能求出对应的序号$N=N_k$，使得对于一切$n>N_k$时有$x_n<L+\varepsilon_k$，再由性质2°，仍假定$\varepsilon=\varepsilon_k$，并取序号$n_{k-1}$及$N_k$中较大者作为$N'$，对于这样的$\varepsilon$及$N'$，由性质2°所得到的$n'$就取作$n_k$，那么，一方面

$$X_{n_k}>L-\varepsilon_k,$$

而另一方面，同$n_k>N_k$，同时必有

$$x_{n_k}<L+\varepsilon_k$$

此外，还需注意到：$n_k>n_{k-1}$，这是因为$n_k>N'>n_{k-1}$。

对于用这种方法构成数到$\{x_{n_k}\}$的元素，必有

$$|X_{n_k}-L|<\varepsilon_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$$

实际上这就是说：$X_{n_k}\underset{k}{\rightarrow}L$。因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists$自然数k当$k>K$时，有$\varepsilon_k<\varepsilon$成立$(k>K)$

根据定理7)，让我们先证一个引理：即数列$\{x_n\}$收敛于L的充分必要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=L。$$

事实上，若$X_n\to L$，则容易证明一切部分极限都与它重合，而上限和下限都是部分极限。故必要性得证。

反之，若$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=L=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$，则依上、下限的性质1°，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，恒有

$$L-\varepsilon<X_n<L+\varepsilon,$$

即　　$$|X_n-L|<\varepsilon$$

这就是说$X_n\underset{n}{\rightarrow}L$

现在回到定理8)的证明。必要性显然，只来证明充分性。由于$\{x_n\}$是一个柯西数列，故对$\forall\varepsilon>0$，EN，当m，$n>N$时，恒有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon,\ 即$$

$$X_m-\varepsilon<X_n<X_m+\varepsilon$$

由此立刻可知$\{X_n\}$有界。根据定理7)其上限和下限都存在，且相差不大于2ε。由于$\varepsilon>0$的任意性，因此二者必重合，从而推出数列$\{X_n\}$收敛。

8)$\Longrightarrow$9)

证：设X、Y均非空集，且对，任意$a\in x$，$b\in Y$，都有$a<b$。我们来证明截割(X，Y)具有唯一的界数ξ，它或是下部x的最大数，或是上部Y的最小数。令a、b分别为X、Y中的两个数，则在区间〔a、b〕上既有X中的数又有Y中的数，且a是Y的下界，b是X的上界。将区间〔a，b〕二等分，若$\frac{a+b}{2}\in X$，则记$\frac{a+b}{2}=a_1$，$b=b_1$；否则，记$a=a_1$，$\frac{a+b}{2}=b_1$。这样一来，区间〔a_1b_1〕上既有X中的数又有Y中的数，且a_1是Y的下界，b_1是X的上界。再将〔a_1，b_1〕二等分，若$\frac{a_1+b_1}{2}\in X$，则记$\frac{a_1+b_1}{2}=a_2$，$b_1=b_2$；否则，记$a_1=a_2$，$\frac{a_1+a_2}{2}=b_2$。于是〔a_2，b_2〕同时含有X和Y中的数，且a_2是y的下界，b_2是X的上界。无限制地继续这种步骤，得到两个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，对一切自然数n满足：

1°a_n都是Y的下界，b_n都是X的上界；

2°$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$；

3°$|a_n-a_{n+1}|\leqslant\frac{b-a}{2^{n+1}}$　$|b_n-b_{n+1}|\leqslant\frac{b-a}{2^{n+1}}$。

因此，不难证明数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是柯西数列。事实上，由条件3°得

$$|a_n-a_{n+p}|\leqslant|a_n-a_{n+1}|+|a_{n+1}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p-1}-a_{n+p}|$$

$$\leqslant(b-a)\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p+1}}\right)$$

$$<\frac{b-a}{2^n}\to0\quad(n\to\infty)$$

即$\{a_n\}$是柯西数列，同理可证$\{b_n\}$也是柯西数列。由定理8)知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都收敛，再由2°可知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$收敛于同一个数ξ。最使由1°可知ξ是X的上界，Y的下界。即若$\xi\in X$，ξ是X的最大数，而此时Y中无最小数，若不然，设ξ′是Y中的最小数，由截割定义应有$\xi<\xi'$。从而根据实数的稠密性，必存在一数α，满足$\xi<\alpha<\xi'$。由于$\alpha>\xi$，而ξ是X中的最大数，可见$\alpha\overline{\in}X$；由于$\alpha<\xi'$，同样可知$\alpha\overline{\in}Y$，而这是不可能的，因为这与截割的定义相违背。同样可以证明，若$\xi\in Y$，ξ是Y的最小数，而此时X中无最大数。并且ξ还是截割(X，Y)的唯一的界数。事实上，当$a<\xi$时，由于存在$a_n\in X$，使$a_n>a$，故$a\in X$。同由，当$b>\xi$时，$b\in Y$。证毕。

由此说明，实数的截割不能产生新数，即实数截割的界数仍是实数，也就是说，在实数范围内不再有空隙。实数系的这个性质，称为它的完备性，也称为它的连续性。

9)$\Longrightarrow$1)

证：我们只证明有上界的集合必有上确界，下确界的证明类似。设集合E有上界，令大于E中一切数的实数属于Y，其余的实数属于X，易知(X，Y)构成一实数截割，由定理9)知

(下转136页)

四、结 论

从三种不同厚度承台模型试验结果看出：

（一）桩基承台主要发生弯曲破坏和剪切破坏，其承台底部对角线中央拉应力最大，其应力数值见表（1）。

（二）在施加荷载区域，由于应力集中的影响，经试验数据分析看出，与承台底部成45^0方向的截面上剪应力最大，为了防止开裂，此处应布置足够的斜拉钢筋。

（三）由对承台厚度H＝300mm，计算跨度 L＝1100mm 内部应力计算结果〔见表（2）〕，可以看出，承台跨度与厚度之比小于四时，若采用一般梁的计算方法，将会引起较大误差。初步计算最大应力处，光弹试验的结果同按一般梁近似计算的结果比较，相差约13%左右。

以上结论仅是初步的实验结果，欢迎批评指正。

参 考 文 献

〔1〕 天津大学主编 光弹性原理及及测技术

〔2〕 弗罗赫特 光测弹性力学

〔3〕 ALBERCHT KUSKE PHOTOELASTIC STRESS ANALYSIS

（上接128页）

截割（X，Y）确定实数β。现证明β满足上确界定义的两个条件，亦即

1^0若$x\in E$，则$x\leqslant\beta$，事实上，按截割（X，Y）的定义，E中一切数均属于X。

2^0对任意的$\varepsilon>0$，有$x_0\in E$，适合$x_0>\beta-\varepsilon$，事实上，若不存在这种点x_0，亦即E中一切点x都满足$x\leqslant\beta-\varepsilon$，那么，由于$\beta-\frac{\varepsilon}{2}$大于$\beta-\varepsilon$，从而大于一切的x，按截割（X，Y）的定义，$\beta-\frac{\varepsilon}{2}\in Y$，但因$\beta-\frac{\varepsilon}{2}<\beta$，故$\beta-\frac{\varepsilon}{2}\in X$，矛盾。

最后我们应当注意到，若仅限在有理数集上来讨论，上述九个定理都不成立，也就是说有理数集不是完备集。这正是把极限理论建立在完备的实数集是基础上的重要原因之一。

反映实数系连续性的等价命题多达二十几个。上述九个定理来自各个不同的书中，但是还没有见到有哪一本书将这九个定理的等价性作一全面的论证。

参 考 文 献

〔1〕 Г.М.Фихтенгольц 《微积分学教程》

〔2〕 А.Я.Хинчин 《数学分析简明教程》

〔3〕 江泽坚等合编 《数学分析》

〔4〕 陈传璋等编 《数学分析》1962年第二版

〔5〕 Н.А.Фролов 《实变函数论》