

# 用边界单元法计算重力坝的自振特性

李庆斌 周鸿钧

(水利系)

## 提 要

本文把动力方程的惯性力项化为对边界的积分来处理,实现了用边界单元法求解重力坝自振特性的过程,通过实例计算表明,该法的计算精度是令人满意的。

**关键词:** 边界元, 重力坝, 自振特性。

## 一、引 言

在多地震地区,动力设计是结构设计的重要一环,特别是对于象水工结构这样一类一旦失事将造成重大损失的结构物来说,动力设计将显得格外重要。在我国,虽然因为地震而引起大坝失事的先例较少,但其危害相当严重,因此,在结构设计中采取恰当的抗震措施是非常重要的。然而这种措施的采用往往建立在结构动力计算的基础上,因此,长期以来人们在不断寻求着动力计算的合理方法。

六十年代发展起来的边界单元法以它明显的优点愈来愈引起人们的广泛重视。在静力方面的应用日渐成熟,而在动力方面的应用尚不够完善,特别是在我国尚未见诸文献。本文旨在引进动力边界元方法,起到抛砖引玉的作用。

动力边界元法大致可分为两类,一类是“行列式搜索法”,一类是“域内积分转化法”。前者通过变换处理,所得特征方程中含有复数,计算工作量大,程序设计麻烦;后者是把惯性力项化为边界项来处理,所得特征方程属标准的代数特征值问题,给程序设计带来了方便。

本文采用“域内积分转化法”计算重力坝自振特性,在计算中采用了下述几个基本假定:

1. 坝体材料均质等向线弹性假定。即认为坝体是由均质的各向同性材料组成的,且其变形微小,振动是微幅振动。
2. 平面问题假定。该假定认为各坝段相互独立,坝轴变形微小,将其作为平面结构来考虑。
3. 刚性地基假定。本假定认为重力坝的基础不产生变形,其下端可按固支来处理。

## 二、动力边界元理论

### 1. 控制方程:

对于各项同性的均质弹性体,在简谐振动的情况下,其运动微分方程可以表示为

$$\sigma_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i = 0 \quad (2-1)$$

其中

\*本文1986年11月18日收到。

$u_i$  是位移分量, 在二维问题中为  $u_x$ 、 $u_y$ 。

$\sigma_{ij}$  为应力分量, 二维情况下为  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$ 。

$\omega$  是系统的自振圆频率,  $\rho$  是弹性体的质量密度。

边界条件  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  可以表示为

$$u_i(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1 \quad (2-2)$$

$$t_i(x) = 0, \quad x \in \Gamma_2$$

并且满足

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2-3)$$

这里,  $n_i$  是  $\Gamma$  的外法线方向,  $t_i$  是  $\Gamma$  的面力分量, 在二维问题中为  $t_x$ 、 $t_y$ 。

## 2. 积分方程的建立:

我们记著名的kelvin解答为

$$U_{ki} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} [\delta_{ki}(4\nu-3)\ln(R) + r_k r_i] \quad (2-4)$$

$$T_{ki} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \{ (1-2\nu)(n_j r_k - r_j n_k) - [\delta_{ki}(1-\nu) + 2r_k r_i] r_m n_m \} \quad (2-5)$$

若用加权残数法, 并以  $U_{ki}$  作为权函数, 则 (2-1) 式的残数方程可以写为

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} U_{ki} d\Omega + \rho \omega^2 \int_{\Omega} u_i U_{ki} d\Omega = 0 \quad (2-6)$$

对 (2-6) 式中的第一项积分, 采用于静力边界元相同的处理, 可将其化为对边界的积分:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} U_{ki} d\Omega = -C_{ki} u_i(A) + \int_{\Gamma} U_{ki}(A, B) t_i(B) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ki}(A, B) u_i(B) d\Gamma \quad (2-7)$$

将 (2-7) 式代入 (2-6) 式, 可以得到:

$$C_{ki} u_i(A) = \int_{\Gamma} U_{ki}(A, B) t_i(B) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ki}(A, B) u_i(B) d\Gamma + \rho \omega^2 \int_{\Omega} U_{ki}(A, x) u_i(x) d\Omega \quad (2-8)$$

由上式可以看出, (2-8) 式中不仅包含了边界上的未知量  $t_i(B)$ 、 $u_i(B)$ , 而且还包含了域内点的位移  $u_i(x)$ , 如果直接在域内积分, 不仅会造成运算量的增加, 而且还会增加未知数的个数, 从而使问题复杂化。为了避免这种现象, 我们将采用一种近似方法将其化为在边界上的积分。

## 3. 域内积分的近似处理:

为了把式 (2-8) 中的域内积分化为对边界的积分, 可把域内位移表示为一些简单函数的线性组合, 并记这些简单函数为  $f^j(x)$  ( $j$  代表函数的个数), 则

$$u_i(x) = \alpha_{ij} f^j(x) \quad (2-9)$$

这里 $\alpha_{ij}$ 是待定参数,  $i=1, 2; j=1, 2, \dots, r$ 。

将式(2-9)代入式(2-8)中的域内积分, 则

$$\int_{\Omega} U_{ki}(A, x) u_j(x) d\Omega = \alpha_{ij} \int_{\Omega} f^j(x) U_{ki}(A, x) d\Omega \quad (2-10)$$

比较式(2-7)及式(2-10)的形式和意义, 不难发现, 如果我们能求得一个位移场 $\psi_{li}^j$ 及相应的应力场 $\tau_{li\ m}^j$ , 且满足

$$\tau_{li\ m}^j = \delta_{li} f^j \quad (2-11)$$

我们就可以与(2-7)式类似地将域内积分化为对边界的积分, 其结果可以写成

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} \int_{\Omega} f^j(x) U_{ki}(A, X) d\Omega = & \alpha_{ij} \{ -C_{ki} \psi_{li}^j(A) + \\ & + \int_{\Gamma} U_{ki}(A, B) P_{li}^j(B) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ki}(A, B) \psi_{li}^j(B) d\Gamma \} \end{aligned} \quad (2-12)$$

其中

$$P_{li}^j = \tau_{li\ m}^j n_m \quad (2-13)$$

把式(2-7)及式(2-12)代入式(2-6), 即可得到动力平衡方程的积分形式:

$$\begin{aligned} C_k u_i(A) - \int_{\Gamma} U_{ki}(A, B) t_i(B) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_{ki}(A, B) u_i(B) d\Gamma \\ = \rho \omega^2 \{ -C_{ki} \psi_{li}^i(A) + \int_{\Gamma} U_{ki}(A, B) P_{li}^i(B) d\Gamma - \\ - \int_{\Gamma} T_{ki}(A, B) \psi_{li}^i(B) d\Gamma \} \alpha_{li} \end{aligned} \quad (2-14)$$

#### 4. 边界元方程的建立:

与静力边界元类似, 我们引入形函数对边界节点未知量进行插值, 然后通过高斯积分, 可以得出用矩阵表示的边界元动力平衡方程:

$$[H]\{u\} - [G]\{t\} = \rho \omega^2 (-[H][\psi] + [G][P])\{\alpha\} \quad (2-15)$$

值得指出的是我们对节点上的已知值 $\psi$ 和 $P$ 也进行了与 $u$ 和 $t$ 同阶的插值, 这样使得系数矩阵 $[H]$ 、 $[G]$ 只需进行一次计算。

但是, 式(2-15)中仍然包含有未知数 $\{\alpha\}$ , 为了得以消除, 我们利用关系式

$$\{u\} = [F]\{\alpha\} \quad (2-16)$$

若 $[F]$ 中各元素相互独立, 且阶数等于边界节点数, 则 $[F]$ 是可逆的。若记其逆为 $[E] = [F]^{-1}$ , 则有

$$\{\alpha\} = [E]\{u\} \quad (2-17)$$

把(2-17)式代入(2-15)式中, 可以得到

$$[H]\{u\} - [G]\{t\} = \rho \omega^2 (-[H][\psi] + [G][P]) \cdot [E]\{u\} \quad (2-18)$$

若记

$$[M] = \rho (-[H][\psi] + [G][P]) \cdot [E] \quad (2-19)$$

则式(2-18)按两种边界写成分块形式为:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \\ = \omega^2 \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (2-20)$$

将边界条件 (2-2) 代入式 (2-20) 中, 消去  $\{t_1\}$  后, 得

$$[\hat{H}]\{u_2\} = \omega^2 [\hat{M}]\{u_2\} \quad (2-21)$$

式中

$$[\hat{H}] = [H_{22}] - [G_{21}][G_{11}]^{-1}[H_{12}] \quad (2-22)$$

$$[\hat{M}] = [M_{22}] - [G_{21}][G_{11}]^{-1}[M_{12}] \quad (2-23)$$

式 (2-21) 即为所求的自振问题的特征方程。根据矩阵特征值理论, 可以求出该物体的自振频率及相应的主振型。

### 5. 域内位移近似公式:

如前所述, 为了近似处理域内的位移, 需要假设一系列的近似函数来代替位移。为了便于计算和进行处理, 同时满足式 (2-11), 我们假设下列两个函数:

$$(1) f^i(x) = C \quad (2-24)$$

这里  $C$  是一个适当选择的常数。求得其对应的满足 (2-11) 式的函数  $\psi$  和  $p$  为

$$\psi_{li}^i = \frac{1-2\nu}{G(5-4\nu)} C x_i x_i \quad (2-25)$$

$$p_{li}^i = \frac{4\nu}{5-4\nu} C x_i n_i + \frac{1-2\nu}{5-4\nu} C (x_i n_i + 2x_i n_i + x_m n_m \delta_{li}) \quad (2-26)$$

式中  $x_i$  是点  $A_i$  到  $x$  间的坐标分量,  $n_i$  是边界的外法线方向。

$$(2) f^i(x) = R(A_i, x) \quad (2-27)$$

式中  $R(A_i, x)$  是  $A_i$  到  $x$  间的距离。求得

$$\psi_{li}^i = \frac{9-10\nu}{90G(1-\nu)} R^3 \delta_{li} - \frac{1}{30G(1-\nu)} R x_i x_i \quad (2-28)$$

$$p_{li}^i = \frac{36\nu-10\nu^2-15}{15(1-2\nu)(1-\nu)} R x_i n_i + \frac{4-5\nu}{15(1-\nu)} R (x_m n_m \delta_{li} + \\ + x_i n_i) - \frac{1}{15(1-\nu)} \cdot \frac{x_i x_i x_m n_m}{R} \quad (2-29)$$

当然, 我们还可以选取别的函数来代替域内位移, 这里不再列举。

## 三、实例计算

为了考查方法的可靠性及计算精度, 我们在 IBM PC/AT 机上用 Fortran 语言编制了计算程序, 该机内存为 512KB, 时钟频率为 6MHZ。在内存小速度慢的条件下, 我们采

用了程序复盖及分段执行的办法, 最终使程序得以实现。针对本法中大型非对称满阵的特征值问题, 采用了幂法与穷举法相结合的方法进行求解, 化去了大约80%的计算机时。

关于该程序的计算精度, 我们曾对文[1]中的方形平面一边固支结构进行了标定。结果列于表1中, 与有限元法相比, 前三阶频率在5%以内, 两者基本一致。

表1 方板频率计算表

振 型 号	1	2	3
有限元法	11.22	26.97	29.78
边界元法	10.82	25.88	28.31
误 差	3.6%	4.0%	4.9%

本文利用此程序计算了几座表2所示尺寸的重力坝, 假定上游面直立, 计算结果列于表3。例中所用材料参数  $\rho = 2.4 \text{ T/m}^3$ ,  $E = 3 \times 10^6 \text{ T/m}^2$ ,  $\nu = 0.20$ 。计算中采用46个节点, 其中固支边占13个节点, 上游边占13个节点, 求解矩阵 $[H]$ 、 $[G]$ 时, 为了便于角点处理, 程序中采用线性单元。

对于高阶振动频率, 由于没有引入域内点的位移参量作为未知数, 使坝的总刚度降低, 其误差较大, 特别对高坝愈加明显, 这里没有列出计算结果。

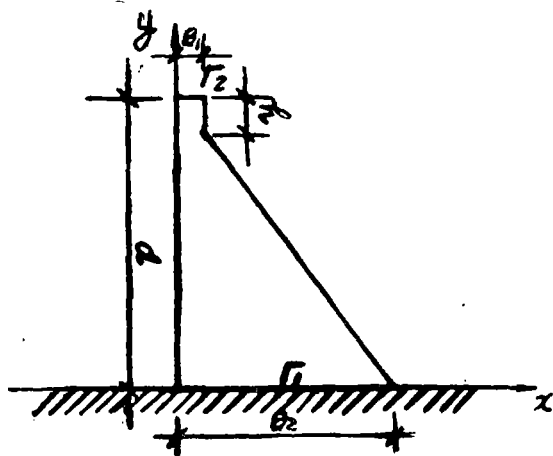


图1. 重力坝尺寸图

表2. 重力坝的特征尺寸表

尺寸 坝号	d	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	h
A 坝	30.0	2.0	37.5	1.6
B 坝	76.0	16.0	61.0	6.0
C 坝	284.0	22.0	220.0	18.0



图2. 重力坝振型图

表 3. 重力坝在空库情况下的振动圆频率

振 型 坝 号 法		1	2	3
A 坝	FEM	133.1	297.2	532.4
	BEM	140.4	289.3	559.0
B 坝	FEM	37.2	80	149.6
	BEM	35.1	78.0	140.3
C 坝	FEM	10.8	22.8	38.5
	BEM	9.2	24.2	36.0

#### 四、结 语

由于动力边界元法的计算机时较多, 我们仅计算了不多几个结果。通过计算初步得出以下结论:

1. 用边界单元法求解动力问题可以和静力问题的程序设计类似, 而且可以和静力计算同时进行, 这样可以避免计算矩阵 $[H]$ 、 $[G]$ 的重复性工作。

2. 用边界单元法求解动力问题的质量矩阵仅是一些函数的简单推演, 避免了有限元法形成质量矩阵的烦琐计算。

3. 本法所形成的特征方程属标准的代数特征值问题, 给程序设计带来了方便。

4. 一般而言, 边界元法计算的自振频率较有限元法为小, 可能是刚度相对降低的结果。

然而, 本法做为一种工程实际的应用方法, 其机时似乎稍多。因此, 必须对该法的计算技巧进行研究, 以提高方法的应用效率。

作者还对坝与水耦振问题进行了研究, 限于篇幅, 详见另文。

#### 参 考 文 献

- (1) D.Nardini and C.A.B.Brebbia, A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary elements, Boundary Element Method in Engineering, Proc.of Fourth Intern.seminar, 1982.
- (2) 王良琛: 混凝土坝地震动力分析, 地震出版社, 1981, PP.312—316.
- (3) 黄玉盈: 无限长带形域流场的格林函数及其在耦振中的应用, 华中工学院学报, 1985, 1 (1), PP.83—90.
- (4) 居荣初、曾心传: 弹性结构与液体的耦联振动理论, 地震出版社, 1983.

(下转35页)

$$\cdot [k - (1 - d/h)^2] + \frac{\Delta}{x} [k - (1 - d_p/h)] \} \quad (17)$$

在基本公式(3)(15)或(16)、(17)中用 $-N_{cra}$ 代 $N_{cra}$ 得到偏心受拉矩形截面的一般抗裂公式。

对轴拉构件,将 $k=1$ ,  $N_p=0$ ,  $A_{ps}=0$ ,  $\sigma_s'=\sigma_s=E_s\cdot\varepsilon_t''$ 代入式(3),并以 $-N_{cra}$ 代 $N_{cra}$ ,则得轴拉构件的抗裂计算公式为:

$$N_{cra}=bh\bar{f}_t + (A_s' + A_s) E_s \cdot \varepsilon_t'' \quad (18)$$

#### 四、结 论

以受拉边缘极限应变为控制参数在平截面假定的基础上推导的混凝土、钢筋混凝土和预应力混凝土构件在受弯条件下的塑性系数计算公式以及偏压、偏拉和轴心受拉条件下的抗裂计算公式,有效地考虑了混凝土和钢筋的作用,意义明确;对由上升段和下降段组成的受拉混凝土应力应变关系,以应变作为开裂标志较应力更为合理。尽管公式比较繁琐,但结合小型电子计算机在已知受拉极限应变的情况下其实用性不受影响。

#### 参 考 文 献

- [1] 高丹盈:“钢筋混凝土短梁正截面抗裂度及其特性的试验研究”,郑州工学院硕士毕业论文
- [2] 赵国藩:“水工钢筋混凝土结构抗裂性(裂缝出现及裂缝扩展)的计算方法”,水利学报,1960.6
- [3] P.Aagren and Harrison: “Strength of concrete Beams and piper at First Crack—A Strain Limit Design Method”, ACI Journal, 1986.

(上接28页)

## Boundary Element Method for Free Vibration Analysis of Gravity Dam

Li Qing bin, Zhou Hong jun

(Department of Hydraulic Engineering)

#### Abstract

In this paper, we use boundary element method, making the domain integral of inertial force to be the integral at the boundary of the field, and have calculated the natural frequencies of gravity dam with an empty reservoir. The computational results are compared with the finite element solutions. The comparison indicates that the method presented in this paper is valid.

**Key words:** Boundary element, gravity dam, behaviour of free vibration.