一维Dirac方程组边值问题的特征展开

石琴春　　侯双印

（中州大学）　　（郑州工学院）

提　要

本文研究如下一维Dirac方程组的特征值问题

$$\begin{cases} z'_1 - q(x)z_1 + [p(x)+\lambda]z_2 = 0, & z_1(o)\cos\alpha + z_2(0)\sin\alpha = 0, \\ z_2' + q(x)z_2 + [p(x)-\lambda]z_1 = 0; & z_1(\pi)\cos\beta + z_2(\pi)\sin\alpha = 0。\end{cases}$$

应用积分算子证明了下述展开定理。

定理　　设$f=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x)\end{pmatrix}$，$f_1(x)$、$f_2(x)\in L_2(0、\pi)$，$\{\varphi_n\}$为（E）的特征函数向量序列，则按$L_2$意义有

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n\rangle \varphi_n,$$

其中$\langle f, \varphi_n\rangle = \int_0^\pi (f_1\varphi_{n1} + f_2\varphi_{n2})dx$。

关键词： Dirac方程组，积分算子，特征展开，边值问题

〔1〕中研究了与下面Dirac方程组相联系的特征展开 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x)\end{pmatrix}z = \lambda z$，$z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2\end{pmatrix}$，本文研究与另一类型的Dirac方程组相联系的特征展开 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}z = \lambda z$，特征展开定理的证明方法不同于〔1〕。

考虑下面的边值问题（E）：（1）+（2）+（3），

$$(E)\begin{cases} z_1' - q(x)z_1 + [p(x)+\lambda]z_2 = 0, \\ z_2' + q(x)z_2 + [p(x)-\lambda]z_1 = 0, & (1) \\ l_1 z = z_1(0)\cos\alpha + z_2(0)\sin\alpha = 0, & (2) \\ l_2 z = z_1(\pi)\cos\beta + z_2(\pi)\sin\beta = 0, & (3) \end{cases}$$

其中$p(x)$，$q(x)\in C[0, \pi]$，记实函数向量$z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2\end{pmatrix}$为$(z_1, z_2)$，$H=\{[h_1(x), h_2(x)]' | h_1, h_2 \in L_2(0, \pi)\}$，　定义H中的内积为$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi (f_1g_1 + f_2g_2)dx$

本文1987年2月12日收到

$\forall f, g \in H$，容易验证其合理性，因而H成为一个Hilbert空间。为方便计，下面也称H中的元素为函数。

一、特征值的性质

设$\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1, \varphi_2)'$，$\psi(x, \lambda) = (\psi_1, \psi_2)'$分别为（1）满足下面初值条件的解。$\varphi_1(o, \lambda) = \sin\alpha$，$\varphi_2(o, \lambda) = -\cos\alpha$；$\psi_1(\pi, \lambda) = \sin\beta$，$\psi_2(\pi, \lambda) = -\cos\beta$。显然φ满足（1）+（2），ψ满足（1）+（3）。记$\omega(\lambda) = \det(\varphi, \psi)$，易证$\omega(\lambda)$与x无关。事实上，分别用$\psi_2$，$-\psi_1$，$\varphi_2$，$-\varphi_1$乘以$\varphi_1$，$\varphi_2$，$\psi_1$，$\psi_2$满足的方程，然后相加，可得

$$(\varphi_1\psi_2 - \psi_2\varphi_1) - (\psi_1\varphi_2 + \varphi_2\psi_1) = \frac{d\omega}{dt} = 0。$$

命题1. λ是（E）的特征值$\Longleftrightarrow \omega(\lambda) = 0$。

证明，若$\omega(\lambda) = 0$，则φ与ψ线性相关，同时满足（E），故λ为特征值，φ，ψ均为对应于λ的特征函数。反之，若λ是（E）的特征值，$k(x, \lambda) = (k_1, k_2)$是相应的特征函数，根据初值问题解的存在唯一性定理，由$l_i k = 0$，$l_i\varphi = 0$，（$i = 1、2$）知k，φ线性相关，k与ψ线性相关，因而φ与ψ线性相关，故$\omega(\lambda) = 0$。

命题2. 对应于不同特征值的特征向量正交。

证明，设λ_1，λ_2为（E）的特征值，$\lambda_1 \neq \lambda_2$，$u = (u_1, u_2)'$，$v = (v_1, v_2)'$为相应的特征函数，则

$$u_1' - qu_1 + (p + \lambda_1)u_2 = 0, \qquad v_1' - qv_1 + (p + \lambda_2)v_2 = 0,$$

$$u_2' + qu_2 + (p - \lambda_1)u_1 = 0, \qquad v_2' + qv_2 + (p - \lambda_2)v_1 = 0。$$

分别以v_2，$-u_2$，$-v_1$，u_1依次乘以各式，并相加得，

$$(u_1v_2)' - (v_1u_2)' = (\lambda_2 - \lambda_1)(u_1v_1 + u_2v_2)。$$

由0至π积分，由于u，v满足（2），（3），左端积分为零。又$\lambda_1 \neq \lambda_2$，故$\langle u, v\rangle = 0$。

命题3 （E）的特征值必为实数。

证明，若λ为（E）的特征值，u为λ相应的特征函数，易知λ的共轭复数$\overline{\lambda}$也为（E）的特征值，$\overline{u}$为$\overline{\lambda}$相应的特征函数。重复上面命题证明的程序，得$(\lambda - \overline{\lambda})\int_0^\pi [\,|u_1|^2 + |u_2|^2\,] \cdot dx = 0$。由于$u \neq 0$，故$\lambda = \overline{\lambda}$，即λ为实数。

由此，下面的讨论都对λ为实数进行。

二、等价的积分方程

考虑（E）对应的非齐次问题，记$f = (f_1, f_2)'$，

$$(F)\begin{cases} z_1' - qz_1 + (p+\lambda)z_2 = -f_2, & l_1 z = 0, \\ z_2' + qz_2 + (p-\lambda)z_1 = +f_1, & l_2 z = 0, \end{cases}$$

记 $G(x, y, \lambda) = \begin{cases} (\psi_1(x), \psi_2(x))'(\varphi_1(y), \varphi_2(y))/\omega(\lambda), & y \leqslant x; \\ (\varphi_1(x), \varphi_2(x))'(\psi_1(y), \psi_2(y))/\omega(\lambda), & y > x. \end{cases}$

命题4. 设λ不是（E）的特征值，$f=(f_1, f_2)' \in H$,则（F）的解存在，唯一，可由G为核的积分表示如下，$z = \int_0^\pi G(x, y, \lambda) f(y) dy$。　　（4）

证明，按G，f的定义式，将（4）直接代入（F）中各式，即可验证由（4）确定的z为（F）的解。设u，υ同为（F）的解，则$u-\upsilon$为（E）的解，因λ不是（E）的特征值，故$u-\upsilon\equiv 0$，因而（F）的解唯一。

不妨设$\lambda=0$不是（E）的特征值，否则，任取一非特征值的数η，对以$\lambda+\eta$为参数的新问题（E），不再以零为特征值。对于F，当$\lambda=0$时，$z=\int_0^\pi G(x, y, 0) f(y) dy$.以下记$G(x, y) = G(x, y, 0)$。将（E）写成

$$\begin{cases} z_1' - qz_1 + pz_2 = -\lambda z_2, & l_1 z = 0, \\ z_2' + qz_2 + pz_1 = \lambda z_1, & l_2 z = 0, \end{cases}$$

视$(-\lambda z_2, \lambda z_1)$为$(-f_2, f_1)$，则（E）成为

$$z(x) = \lambda \int_0^\pi G(x, y) z(y) dy。\qquad (5)$$

于是不难得到下面命题。

命题5. （E）与（5）等价。

三、特征展开定理

记$H_0=\{f=(f_1, f_2) | f_1, f_2 \in L_2[0, \pi], l_1 f = l_2 f = 0\}$。定义$H_0$上的算子L为：

$$Lf = \int_0^\pi G(x, y) f(y) dy。\qquad (6)$$

命题6. L为自共轭算子。

证明，$\forall f, g \in H_0$，注意到$l_1 f = l_2 f = l_1 g = l_2 g$，直接计算即可验证$\langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle$。

命题7. L为全连续算子。

证明，按定义证明H_0中的有界集H_1在L下的象集有界且为致密集。只要应用Cauchy不等式，和φ_1，φ_2，ψ_1，ψ_2在$[0, \pi]$上的连续性，容易验证$\exists M>0$，使对$\forall f \in H$，有$\langle Lf, Lf\rangle < M$，即$\{Lf | f \in H_1\}$为有界集。记$F(x) = Lf$，$f \in H_1$，$\Delta F_1 = F_1(x+\Delta x) - F_1(x)$等等。

$$|\Delta F_1|^2 = \left| \int_0^x \Delta\psi_1 \cdot [\varphi_1(y) f_1(y) + \varphi_2(y) f_2(y)] dy + \int_x^\pi \Delta\varphi_1 [\psi_1(y) \times f_1(y) + \psi_2(y) f_2(y) dy] \right|^2 \leqslant M \| f \|^2 |\Delta\psi_1 + \Delta\varphi_1| \leqslant MK |\Delta\psi_1 + \Delta\varphi_1|.$$

其中M为常数，K为H_1的界。对F_2有类似估计。由f的任意性知H_1是等度连续的。由Arzela定理$\{Lf \mid f \in H_1\}$是致密集。

命题8。L有可列个特征值。

证明，由全连续算子性质[2]，L至少有一个特征值。若L仅有有限个特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$，相应的规范特征函数为$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$，则

$$G(x, y) = -\sum_{n=1}^{k} \lambda_n^{-1} (\varphi_{n1}(x), \varphi_{n2}(x))' (\varphi_{n1}(y), \varphi_{n2}(y)) \tag{7}$$

事实上，令$W(x, y) = G(x, y) + \sum_{n=1}^{k} \lambda_n^{-1} (\varphi_{n1}(x), \varphi_{n2}(x))' (\varphi_{n1}(y), \varphi_{n2}(y))$，则$\int_0^\pi W(x,y)\varphi_i(y)dy = \int_0^\pi G(x,y)\varphi_i(y)dy + \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \varphi_i(x) \times \langle \varphi_n, \varphi_i \rangle = \lambda_i^{-1}[\varphi_i(x) - \varphi_i(x)] = 0$，若$W \neq 0$，则类似于命题6至7的证明可知（6）中的G换成W后的新算子至少有一个特征值λ_0，记相应的特征函数为φ_0，于是对$\forall \varphi_n$，$n = 1, 2, \cdots, k$，有

$$\langle \varphi_n, \varphi_0 \rangle = \int_0^\pi (\varphi_{n1}, \varphi_{n2})' \left[\int_0^\pi W(x,y)\varphi_0(y)dy \right] dx = 0$$

即φ_0与每个φ_n正交。由此可直接验证λ_0也是（5）的特征值，故φ_0必由$\{\varphi_n\}$线性表出，这与φ_0与每个φ_n正交矛盾。

由于L仅有有限个特征值时G可由（7）确定，于是G对x在$x=y$处偏导数连续。但由G的定义式，对于左上角的元素而言在$x=y$处左，右导数之差为：$[\varphi_1'(y)\psi_1(y) - \psi_1'(y)\varphi_1(y)]/\omega(\lambda) = 1$。这个矛盾说明L有无穷多个特征值。由全连续算子的性质[2]，L的特征值为可列个。

定理。设$f \in H$，$\{\varphi_n\}$为（E）的特征函数集合，则按L_2的意义有 $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$，

（8）

证明，由全连续算子的性质[2]，对$f \in H_0$，（8）成立。由于H_0在H中的稠密性可知定理成立。

参考文献

[1] B. M. levitan and I.S Sargsjan, "Introduction to spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operator"

[3] 斯米尔诺夫.《高等数学教程》，四卷一分册， 人民教育出版社。

（下转14页）

$a(t)u_x + b(x,t)u = -[F(x,t,u) + c(x,t)p(t)]$, $(x,t) \in \Omega = (0,H)x(0,T)$,It is shown that, when the parameter $p(x,t)$ is known, from the additional data, to seek the pair of functions $\{u(x,t), a(t)\}$ is solvable and when more overspecified data is supplemented, to seek the class of functions $\{u(x,t), a(t), p(t)\}$ is solvablee too.

Key words: parabolic equation, counterquestion

（上接18页）

EIGEN EXPENTION ON BOUNDARY PROBLEM OF ONE-DIMENSIONAL DIRAC SYSTEMS

Shi qinchun (Zhongzhou Univ)

Hou Shuangyin (Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract

Following eigenvalue problem of One-dimensional Dirac Systems is Studied

$$(E)\quad \begin{cases} z_1' - q(x)z_1 + [p(x)+\lambda]z_2 = 0, & z_1(o)\cos\alpha + z_2(o)\sin\alpha = 0, \\ z_2' + q(x)z_2 + [p(x)-\lambda]z_1 = 0; & z_1(\pi)\cos\beta + z_2(\pi)\sin\beta = 0. \end{cases}$$

The expantion theorem is proved by the method of integral oprator.

Theorem Let $f = (f_1(x), f_2(x))^T, f_1, f_2 \in L_2(0, \pi)$, $\{\varphi_n\}$ is Sequence of eigen vector-functions of (E), then by means of L_2 there is $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$

where $\langle f, \varphi_n \rangle = \int_0^\pi (f_1\varphi_{n1} + f_2\varphi_{n2})\,dx$.

Keywords: Dirac systems, integral oprator, eigenexpantion expansion, boundary value problem