

变压器铁心磁场的有限元分析

单亦宁 李祥远

(河南省数学研究所) (郑州变压器厂)

提 要

本文介绍了变压器铁心磁场的有限元分析原理,并且详尽地推导出计算过程。对于一类非线性方程组

$$K(a)a = f,$$

构造了一步松弛直接迭代格式

$$a^{(n)} = \omega (D^{-1}La^{(n)} + D^{-1}Ua^{(n-1)} + D^{-1}f) + (1 - \omega)a^{(n-1)},$$

在此, $K(a^{(n-1)}) = D - L - U$ 。

关键词: 磁场计算

目前,随着电力工业的发展,如何降低变压器的损耗已成为国际上都在关注的向题。根据日本1981年财政年度的计算,变压器的空载损耗约占整个电力系统损耗的2.4%,约113亿度电,这些电力相当于一座1300兆瓦电站在一年内满发的电能。1977年美国的配电变压器空载损耗为480亿度电,相当于美国的四个有400万人口城市的用电量。这些均表明降低空载损耗的重要性。因此,空载损耗已经成为评价一个变压器的结构是否合理的一项重要内容。

利用有限元方法可以方便迅速地计算出变压器铁心磁通分布和空载单位损耗分布,以帮助判断一种变压器结构新设想的合理性。因此,有限元法必将在节能变压器设计中发挥重要作用。

一、变压器铁心磁场的基本方程及边界条件

根据磁通连续性原理和安培环路定理,有

$$\oint B \cdot ds = 0, \quad (1.1)$$

$$\oint H \cdot dl = \sum I. \quad (1.2)$$

其中, B 和 H 分别是磁通密度和磁场强度, I 是包含在场域中的传导电流。

方程(1.1)和(1.2)的微分形式是

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times H = \delta, \quad (1.4)$$

在此 δ 是场域内的电流密度。由于变压器铁心内部磁场是无流场,即 $\delta = 0$,故(1.4)式为

$$\nabla \times H = 0. \quad (1.5)$$

根据向量分析,任意向量的旋度的散度恒等于零,设任意向量为A,则

$$\nabla \cdot \nabla \times A = 0. \quad (1.6)$$

由(1.3)和(1.6),显然,B可以表示成

$$B = \nabla \times A. \quad (1.7)$$

由此可见,如能找到函数A,它与B的关系有式(1.7),那么这一函数无论在有电流处或是无电流处都能存在。我们称A为矢量位函数,简称磁矢。

三相变压器铁心磁场是一个非均匀各向异性向量场。由于叠片接缝的影响,常常作为三维场进行分析。但是,如果假设沿叠片方向磁通分布基本不变,则可当成二维问题进行计算,其结果差别不大。这时磁矢A仅含Z向分量,即 $A = Az$ 。

对于各向异性磁场,磁通密度和磁场强度可用能量表示的磁导率:

$$\mu' = \begin{bmatrix} \mu'_x & 0 \\ 0 & \mu'_y \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

联系起来, μ'_x 和 μ'_y 分别为 μ' 在局部主轴方向的分量,因此

$$B' = \mu' H', \quad (1.9)$$

运算 $\mu' H'$ 形式上同矩阵与列向量相乘是一样的。

设整体坐标系为x、y,它与局部主轴方向的偏角为 θ ,则整体坐标系下的B、H和局部坐标系下的B'、H'有以下关系

$$B' = TB,$$

$$H' = TH.$$

其中, $T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 为单位张量。

$$\text{由(1.9)和 } B = \mu H \quad (1.10)$$

$$\text{得: } \mu = T^{-1} \mu' T = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

$$\text{式中 } a = \mu'_x \cos^2 \theta + \mu'_y \sin^2 \theta,$$

$$b = (\mu'_x - \mu'_y) \sin \theta \cos \theta,$$

$$c = \mu'_x \sin^2 \theta + \mu'_y \cos^2 \theta.$$

特别,当 $\theta = 0$ 时,即局部坐标与整体坐标同向时,交叉耦合因子 $b = 0$,则

$$\mu = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

显然, $\mu_x = a$, $\mu_y = c$ 。

由(1.5)、(1.7)、(1.10)和(1.11)得

$$\frac{\pi \partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.12)$$

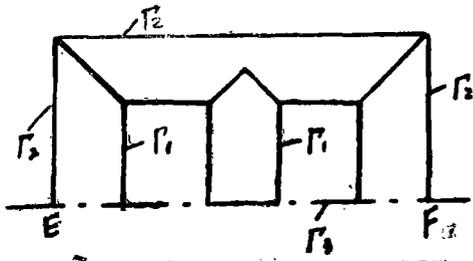
方程(1.12)便是磁矢A在变压器铁心磁场内应满足的方程。在忽略磁漏的假设下,其边界条件是

a) 在叠片的内、外边界 Γ_1 和 Γ_2 (如图1)上有

$$A = d, \quad (1.13)$$

d为定值，

b) 在叠片的中性线EF (即 Γ_3)上，满足第二类，齐次边界条件，即



$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0. \quad (1.14)$$

方程(1.12)和边界条件(1.13)、(1.14)构成了求解变压器铁心磁场的磁矢A的定解问题。

图1

二、有限元分析

所谓有限元法，简言之，就是寻求未知函数 \bar{A} ，使它在所考虑的计算域上满足方程(1.12)及其边界条件(1.13)、(1.14)，函数 \bar{A} 是一种近似解，通常表为

$$\bar{A} = \sum N_i a_i. \quad (2.1)$$

其中， N_i 是通过自变量 x, y 给定的形状函数，而参数 a_i 全部或一部分是待求的未知量。

因为方程(1.12)在计算域 Ω 上处处成立，故有

$$\iint_{\Omega} V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0. \quad (2.2)$$

易证，方程(2.2)对一切 V 都满足就等价于方程(1.12)及其边界条件(1.13)、(1.14)得到满足。利用格林公式，通过选择适当的 V ，使其在 Γ_1 和 Γ_2 上有 $V=0$ ，问题便化为求解方程

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial V}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0 \quad (2.3)$$

在此，边界 Γ_3 上的条件 $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ 自然得到满足。

为求(2.3)的近似解，首先需将计算域 Ω 剖分为若干个三角形单元，使在每个这样的单元中只有一种磁导率。

设 $\bar{A}(x, y)$ 在每个三角形单元中线性变化，在顶点为 $K(x_k, y_k)$ 、 $L(x_l, y_l)$ 、 $M(x_m, y_m)$ 的三角形单元 R_e 上(如图2)有

$$\begin{aligned} \bar{A}(x, y) &= \frac{1}{2\Delta_e} \sum_{i=k,l,m} (\eta_i x + \xi_i y - \omega_i) a_i \\ &= \frac{1}{2\Delta_e} \sum N_i a_{i0} \end{aligned}$$

其中， $\xi_k = x_m - x_l, \xi_l = x_k - x_m, \xi_m = x_l - x_k,$
 $\eta_k = y_l - y_m, \eta_l = y_m - y_k, \eta_m = y_k - y_l,$

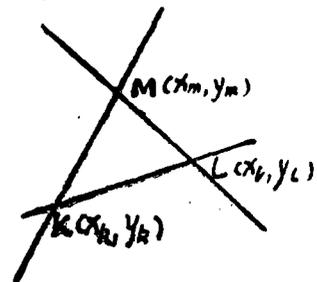


图2

$$\omega_k = x_l y_m - x_m y_l, \quad \omega_l = x_m y_k - x_k y_m, \quad \omega_m = x_k y_l - x_l y_k,$$

$$\Delta_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix}, \quad k, l, m \text{ 逆时针方向, } \Delta_e \text{ 为正, 顺时针方向, } \Delta_e \text{ 为负.}$$

显然, 在此线性变换下, 该单元中各点磁密相等, 因此 μ_x, μ_y 在各单元中也相同。

根据伽辽金法, 取 $V = N_i$ 。将 \bar{A} 代入 (2.4), 得到一组代数方程

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_y} \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= \frac{1}{e} \int_{R_0} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_y} \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= \frac{1}{e} \frac{1}{4\Delta_e} \int_{R_0} \left[\frac{\partial N_j}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_x} \sum_{i=k,l,m} \frac{\partial N_j}{\partial x} a_i \right) + \frac{\partial N_j}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_y} \sum_{i=k,l,m} \frac{\partial N_j}{\partial y} a_i \right) \right] dx dy \\ &= \sum_{i=k,l,m} K_{ij} a_j = 0, \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } K_{ij} &= \frac{1}{e} \frac{1}{4\Delta_e} \int_{R_0} \left(\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1}{\mu_y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{e} \frac{1}{4\Delta_e} \left(\frac{1}{\mu_x} \eta_i \eta_j + \frac{1}{\mu_y} \xi_i \xi_j \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

\sum_e 表示对所有的节点 i 为顶点的三角形单元求和。如果节点 i 在边界 Γ_1 和 Γ_2 上, 则相应的第 i 个方程消失。如节点 j 在 Γ_1 和 Γ_2 上, 则 a_j 为定值, 这时, 可将 $K_{ij} a_j$ 移至方程右边, 构成方程的常数项。该方程组的矩阵形式为

$$Ka = f, \quad (2.7)$$

其中, $a^T = \{a_1 a_2 a_3 \dots\}$ 。

三、解非线性方程组

方程 (2.7) 为非线性方程组, 即方程系数阵 K 与 a 有关。设 $a^{(0)}$ 是 a 的初值, $K^{(0)} = K(a^{(0)})$, 则求解 (2.7) 之直接法的迭代格式是

$$a^{(n)} = [K^{(n-1)}]^{-1} f, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

即 $K^{(n-1)} a^{(n)} = f$,
式中 $K^{(n-1)} = K(a^{(n-1)})$ 。

利用 (3.1) 求第 n 迭代步的 $a^{(n)}$ 时, $K^{(n-1)}$ 是由 $a^{(n-1)}$ 决定的常数阵。这时, 方程组 (3.1) 可视为线性方程组。

设 $K^{(n-1)} = D^{(n-1)} - L^{(n-1)} - U^{(n-1)}$,
 $D^{(n-1)}$ 是由 $K^{(n-1)}$ 的对角元素构成的对角阵, $L^{(n-1)}$ 、 $U^{(n-1)}$ 分别是由 $K^{(n-1)}$ 的下三角和上

三角部分构成的严格下、上三角阵反号, 为书写简单, 用D、L、U分别表示 $D^{(n-1)}$ 、 $L^{(n-1)}$ 、 $U^{(n-1)}$ 。则方程(3.1)的逐步松弛迭代格式的矩阵形式是

$$a^{(n)}_{(k+1)} = \omega (D^{-1}La^{(n)}_{(k+1)} + D^{-1}Ua^{(n)}_{(k)} + D^{-1}f) + (1 - \omega)a^{(n)}_{(k)},$$

$$\text{或者} \quad a^{(n)}_{(k+1)} = L_{\omega}a^{(n)}_{(k)} + (D - \omega L)^{-1}\omega f. \quad (3.2)$$

其中, $L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1}[\omega U + (1 - \omega)D]$, 取 $a_{(0)}^{(n)} = a^{(n-1)}$, k 为定值。

我们将(3.2)称为解非线性方程组(2.7)的 $k+1$ 步松弛直接迭代格式。特别, 当 $k=0$ 时, 令 $a^{(n)} = a^{(n)}_{(1)}$, 称(3.2)为一步松弛直接迭代格式, 这时, (3.2)可写成

$$a^{(n)} = \omega (D^{-1}La^{(n)} + D^{-1}Ua^{(n-1)} + D^{-1}f) + (1 - \omega)a^{(n-1)}, \quad (3.3)$$

式中D、L、U由第 $n-1$ 迭代步所得之解 $a^{(n-1)}$ 决定, 式(3.3)形式上同求解线性方程组的逐步松弛迭代格式是一样的。实例表明, 这种迭代格式对解此类非线性方程组是有效的, 其详情将另文介绍。

四、磁化曲线的数学表示

由式(2.6)知, 方程(2.7)的系数阵K含有磁导率 μ_x 和 μ_y , 而 μ_x 和 μ_y 需经磁密 B_x 和 B_y 求得, 为此, 心须建立磁化曲线。建立B-H磁化曲线的方法不一, 本文采用三次样条插值法。

给出一组B、H的实例值 (b_0, h_0) , (b_1, h_1) , \dots , (b_k, h_k) 。构造插值函数 $F(b)$, 使其在每个子区间 $[b_0, b_1]$, $[b_1, b_2]$, \dots 上都是三次多项式, 而在整个区间 $[b_0, b_k]$ 上直至二阶导数连续, 且满足

$$F(b_0) = h_0, \quad F(b_1) = h_1, \quad \dots, \quad F(b_k) = h_k.$$

为此, 取 $F''(b_i) = M_i$, $(i=0, 1, 2, \dots, k)$, 由于 $F''(x)$ 在子区间上分段线性, 因此

$$F''(b) = \frac{b_{i+1} - b}{c_i}M_i + \frac{b - b_i}{c_i}M_{i+1}, \quad c_i = b_{i+1} - b_i, \quad b_i \leq b \leq b_{i+1}, \quad (i=0, 1,$$

$\dots, k-1)$

在每个子区间 $[b_i, b_{i+1}]$ 上对此积分两次, 即得

$$F(b) = \frac{(b_{i+1} - b)^3}{6c_i}M_i + \frac{(b - b_i)^3}{2c_i}M_{i+1} + (b_{i+1} - b) \left(\frac{h_i}{c_i} - \frac{c_i M_i}{6} \right) + (b - b_i) \left(\frac{h_{i+1}}{c_i} - \frac{c_i M_{i+1}}{6} \right). \quad (A)$$

为保持 $F(b)$ 在子区间连接点 b_i 处的连续性, 需要

$$F'(b_{i+0}) = F'(b_{i-0}), \quad (i=1, 2, \dots, k-1)$$

从而导出了关于 M_i 的 $k-1$ 个方程

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i. \quad (i=1, 2, \dots, k-1) \quad (B)$$

其中,

$$\mu_i = \frac{c_{i-1}}{c_{i-1} + c_i}, \quad \lambda_i = 1 - \mu_i, \quad d_i = 6 \left(\frac{b_{i+1} - b_i}{c_i} - \frac{b_i - b_{i-1}}{c_{i-1}} \right) / (c_{i-1} + c_i).$$

考虑到边界条件 $F'(b_0) = h'_0$, $F'(b_k) = h'_k$, 又可得两个方程

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = 6 \left(\frac{h_1 - h_0}{c_0} - h'_0 \right) / c_0 \\ M_{k-1} + 2M_k = 6 \left(h'_k - \frac{h_k - h_{k-1}}{c_{k-1}} \right) / c_{k-1} \end{cases} \quad (C)$$

由(B)(C)联立求得 $k+1$ 个 M_i ($i=0, 1, 2, \dots, k$), 将其代入(A)即得插值函数 $F(b)$ 。

五、实 例

本文以接缝方式为全斜式三相变压器铁心为例, 铁心材料用Z10硅钢片, 材料密度为 7.65kg/m^2 , 厚度为 0.35mm , 平均磁密取 1.6 特斯拉。

将计算域接三角形单元剖分, 共计280个节点, 468个三角形单元(如图3)。A在边界 Γ_1 和 Γ_2 的节点上取定值, 它由心柱上的平均磁密求得。

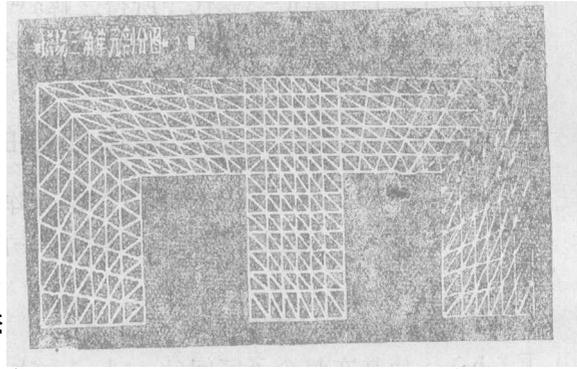


图3

首先, 利用(3.1)求出A的瞬时分布, 然后代入

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}$$

由此即可求得计算域内部的磁密分布。

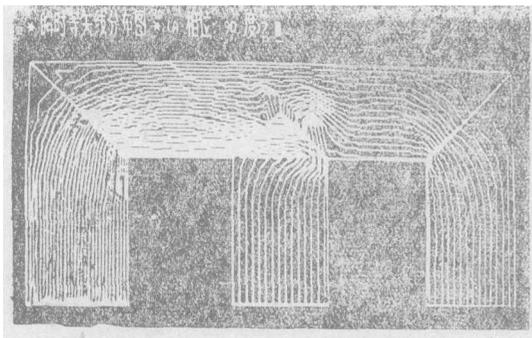


图4

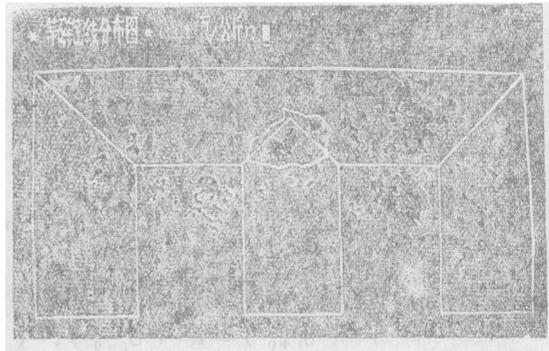


图5

我们通过等A线分布图(如图4), 看出铁心内磁通分布状态: 边柱中性线EF附近的磁通分布较均匀; 靠边柱与上轭接缝越近, 磁通分布越不均匀, 一般表现是靠窗口和外边缘的磁通密度降低; 在边柱与上轭的接缝区, 由于磁通在此转向, 磁通有向窗口集中的趋势; 在中心柱与上轭的接缝区, 形成明显的回旋磁通, 增加了磁通与硅钢片轧向垂直的机会, 因此在这里引起了较大的局部单位铁损(如图5)。

