

异弹模界面裂缝应力强度因子的计算

段云岭 周鸿钧

(水利系)

摘 要

本文将分区混合有限元用于计算异弹模界面裂缝应力强度因子, 扩大了分区混合有限元的应用范围。由实例说明, 数字计算结果与试验值相当符合。

关键词: 界面裂缝, 应力强度因子, 分区混合有限元, 三点弯曲, 奇异元, 等参元

一、前 言

在工程实践中经常遇到两种介质材料交界面上的裂缝问题, 例如水利工程中水坝与岩基交界面上的裂缝。通常是将这种裂缝近似地视为均质材料中的裂缝来考虑, 不能反映材料特性的差异对裂缝的影响。实际上由于两种材料弹性模量不一样, 在交界面上会产生应力集中。由于在交界面缝端附近几何不连续、材料不连续, 其位移场和应力场呈现出极其复杂的状态^{[1][2]}, 因而对应力强度因子有着本质的影响。若假定两种介质材料均为各向同性的线弹性体时, 上述交界面上的裂缝可以简化为异弹模界面裂缝, 简称为界面裂缝。关于界面裂缝问题目前尚少研究, 文献[3], [4], [5]中曾给出界面裂缝缝端应力强度因子的几种求解方法, 但计算和试验工作量相当大, 且不能直接得出缝端应力强度因子。特别需要指出的是上述文中采用有限元法计算界面裂缝的应力强度因子时, 缝端应力场均是采用均质材料裂缝缝端的应力场公式, 显然是不合理的。本文试图从异弹模界面裂缝缝端应力场公式出发, 利用分区混合有限元法来求解界面裂缝应力强度因子, 并用试验结果予以验证, 不仅扩大了分区混合有限元法的应用, 对界面裂缝应力强度因子计算也取得了比较满意的结果。

以三点弯曲裂缝梁(为图1所示)为例, 跨中截面为裂缝所在面, 即为两种材料交界面。网格形式为图2所示。整个试件分成两种区域, 每种区域内含有两种介质材料, 缝端附

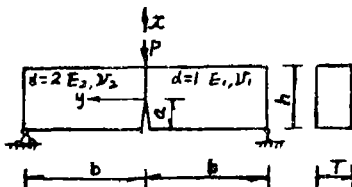


图 1



图 2

近的区域为余能区, 采用一个圆心在缝端、半径为 D 、内含裂缝的园形应力型奇异元, 应力分布采用文献[2]给出的界面裂缝缝端附近的应力场; 奇异元以外的区域为势能区, 采用八

本文1986年11月18日收到

节点位移型等参元。以余能区的应力和势能区的位移作为变分自变量, 应力强度因子 K_I 、 K_{II} 和结点位移 $\{W\}$ 作为基本未知量。基本未知量由分区混合变分原理的能量泛函驻值条件确定。

二、应力强度因子计算

采用分区混合有限元法计算时, 分区混合总能量采用二类变量的混合能量泛函 π 为^[6]:

$$\pi = \pi_p - \pi_c + H_{pc} \quad (1)$$

式中 π_p 是势能区的总势能, π_c 是余能区的总余能, H_{pc} 是两区交界线 Γ 上的附加能量项。势能区的总势能 π_p 可利用通常的有限元位移法, 由结点位移 $\{W\}$ 表示为:

$$\begin{aligned} \pi_p &= \frac{1}{2} \{W\}^T [K_p] \{W\} - \{W\} \{P\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} K_{ij} W_i W_j - \sum_{i=1}^{2n} P_i W_i \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $[K_p]$ 是势能区的刚度矩阵, $\{P\}$ 是结点荷载向量, n 是势能区的结点数。

在本问题中, 余能区的总余能等于奇异单元应变余能:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega \quad (3)$$

式中 Ω 是奇异单元的面积, $\{\epsilon\}$, $\{\sigma\}$ 是其应变应力场。

界面裂缝缝端应力场为^[2]

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma^{\alpha}_{xx} \\ \sigma^{\alpha}_{yy} \\ \sigma^{\alpha}_{xy} \end{Bmatrix} = L r^{-\frac{1}{2}} e^{\theta} \begin{Bmatrix} f^{\alpha}_{xx}(r, \theta) & g^{\alpha}_{xx}(r, \theta) \\ f^{\alpha}_{yy}(r, \theta) & g^{\alpha}_{yy}(r, \theta) \\ f^{\alpha}_{xy}(r, \theta) & g^{\alpha}_{xy}(r, \theta) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式中 上角 $\alpha=1, 2$, 代表两种不同介质。

将式(4)代入式(3)经积分与变换得

$$\pi_c = \frac{1}{2} K_I^2 V_{11} + \frac{1}{2} K_{II}^2 V_{22} + K_I K_{II} V_{12} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } V_{ii} &= \sum_{\alpha=1}^2 \frac{2DL^2}{E_{\alpha}} \left\{ -\frac{1-R}{2\epsilon} \left[m_{\alpha} \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} v_{\alpha} \right) + (1+v_{\alpha}) (n_{\alpha} + 2m_{\alpha}\epsilon^2) \right] \right. \\ &\quad - (-1)^{\alpha+i-1} \frac{2(1-v_{\alpha})}{(1+4\epsilon^2)^2} (P_i + 2\epsilon q_i) m_{\alpha} (1+R) \\ &\quad + (1+v_{\alpha}) \left[\frac{m_{\alpha}\epsilon(1-R)}{2(1+\epsilon^2)} \left(2\epsilon^2 + \frac{3}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^i \frac{R\pi}{(1+4\epsilon^2)} (q_i - 2\epsilon p_i) \right] \right\} \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

$$V_{12} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{4DL^2}{E_{\alpha}} \frac{1}{1+4\epsilon^2} \left\{ (-1)^{\alpha+1} \frac{1-\nu_{\alpha}}{1+4\epsilon^2} (q_1 - 2\epsilon p_1) m_{\alpha} (1+R) \right. \\ \left. - \frac{\pi R}{2} (1+\nu_{\alpha}) (p_1 + 2\epsilon q_1) \right\}$$

$$R = \frac{\mu_1 + \mu_2 k_1}{\mu_2 + \mu_1 k_2} \quad k_2 = \begin{cases} 3-4\nu_{\alpha}, & \text{平面应变问题。} \\ \frac{3-\nu_{\alpha}}{1+\nu_{\alpha}}, & \text{平面应力问题。} \end{cases}$$

$$m_{\alpha} = R^{\alpha-1}, \quad n_{\alpha} = R^2 - \alpha,$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+R)}}, \quad \epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln R$$

$$p_1 = \sin 2t_1 - 2\epsilon \cos 2t_1, \quad q_1 = \cos 2t_1 + 2\epsilon \sin 2t_1,$$

$$t_1 = \epsilon \ln D.$$

E_{α} , μ_{α} , ν_{α} 分别为材料的弹模、剪切弹模和泊松比。

交界线 Γ 上的附加能量项 H_{pc} 可表示为:

$$H_{pc} = \int (T_{x,c} U_{x,p} + T_{y,c} U_{y,p}) ds \quad (6)$$

式中 $T_{x,c}$, $T_{y,c}$ 是余能区在交界线 Γ 上的边界力; $U_{x,p}$, $U_{y,p}$ 是势能区在交界线 Γ 上的边界位移场, 其值为:

$$U_{x,p} = \sum_{i=1}^{n_1} N_i U_{x,i},$$

$$U_{y,p} = \sum_{i=1}^{n_1} N_i U_{y,i}$$

式中 n_1 是交界线 Γ 上常规单元结点的个数; $U_{x,i}$, $U_{y,i}$ 是结点 i ($1 \leq i \leq n_1$) 的位移分量; N_i 是形状函数, 可由常规单元的形状函数 N_i 推求。

设在交界线 Γ 上共布置 m 个 8 结点等参元, 共有 $n_1 = 2m + 1$ 个结点, 如图 3。每个等参元只有 3 个结点 (1、5、2) 位于交界线上。图 4 给出了等参单元边界结点 (如 1 点), 中间结点 (如 m 点) 和公共结点 (为 $2K-1$) 的形状函数 N_i 的图形。

根据余能区的应力场和势能区的位移场可以得出:

$$H_{pc} = K_I \sum_{i=1}^{2n_1} h_{1i} w_i + K_{II} \sum_{i=1}^{2n_1} h_{2i} w_i \quad (7)$$

式中 h_{1i} 是与结点位置有关的积分常数。

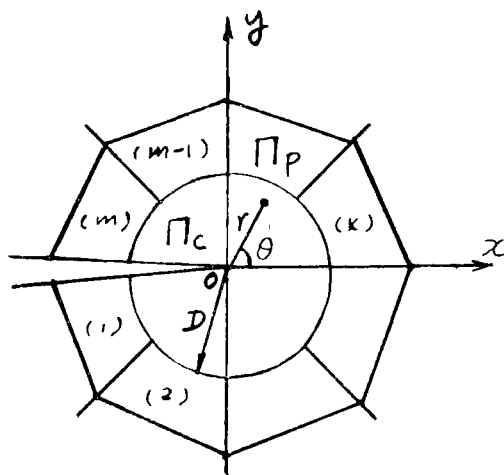


图3 缝端网格形式

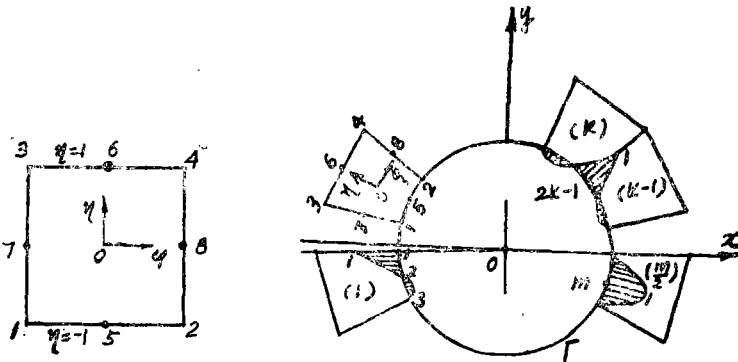


图4 形状函数Ni

将(2)、(5)、(6)代入式(1), 可得到分区混合总能量 Π :

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} K_{ij} W_i W_j - \sum_{i=1}^{2n} p_i w_i - \frac{1}{2} K_I^2 V_{11} - \frac{1}{2} K_{II}^2 V_{22} \\ & - K_I K_{II} V_{12} + K_I \sum_{i=1}^{2n_1} h_{1i} W_i + K_{II} \sum_{i=1}^{2n_1} h_{2i} W_i \end{aligned} \quad (8)$$

基本未知量的真实解应使能量泛函为驻值, 即

$$\delta \Pi = \delta (\Pi_p - \Pi_c + H_{pe}) = 0 \quad (9)$$

将式(8)代入式(9), 经化简整理后可得:

$$\begin{aligned} K_I &= \sum_{i=1}^{2n_1} \frac{V_{22} h_{1i} - V_{12} h_{2i}}{V_{11} V_{22} - V_{12}^2} \cdot W_i, \\ K_{II} &= \sum_{i=1}^{2n_1} \frac{V_{11} h_{2i} - V_{12} h_{1i}}{V_{11} V_{22} - V_{12}^2} \cdot W_i. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{2n} K_{ij}^* W_j = P_i, \quad (i=1, 2, \dots, 2n) \quad (11)$$

式中:

$$\begin{aligned} K_{ij}^* &= K_{ij} + \frac{h_{1j}(V_{22} h_{1i} - V_{12} h_{2i}) + h_{2j}(V_{11} h_{2i} - V_{12} h_{1i})}{V_{11} V_{22} - V_{12}^2} \\ &\quad (i=1, 2, \dots, 2n; j=1, 2, \dots, 2n) \\ &\quad K_{ij} \text{ (其余各项)} \end{aligned}$$

式(11)即为混合有限元法的基本方程组, 只要将通常的有限元的刚度矩阵的前 $2n_1 \times 2n_1$ 阶子阵引入断裂参数进行修改即可得到反映断裂特性的刚度矩阵, 由此基本方程可以解出节点位移 $\{W\}$, 然后即可由式(10)求出异弹模界面裂缝的应力强度因子。

三、三点弯曲界面裂缝梁计算

采用测定平面应变断裂韧性试验中的常用试件如图1所示。取 $b=2$, $h=1$, $T=1$, $p=1$

$a=0.5$, $v_1=v_2=0.2$, $E_2=1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $E_1/E_2=1, 1.2, 1.5, 2, 3, \dots, 10$ 。按平面应变问题考虑。

因试件材料不对称, 不能只取试件的一半计算, 须按整体计算。

计算结果示于图5, 可以从图看出:

1° 界面裂缝的缝端应力强度因子仅与两种介质材料的弹性模量的相对值有关, 与各自的绝对大小无关。

2° 由于两种介质材料的弹性模量不同, 使得交界面上产生了剪切作用, 从而对于纯 I 型荷载产生了 II 型应力强度因子。在交界面上, 弹模大的一方对 a_1 的一方相当于附加了约束, 阻止了该方向的变形继续增大。

3° 缝端应力强度因子随着两种介质材料的弹模比的增大而增大。在 $1 \leq E_1/E_2 \leq 2$ 区间, $K_{IS} \sim E_1/E_2$ 曲线较陡, 说明 K_I 受 E_1/E_2 的影响较大; $E_1/E_2 > 2$ 以后, 曲线逐渐变缓, 说明 E_1/E_2 对 K_I 的影响逐渐减弱; $E_1/E_2 > 5$ 以后, 曲线接近水平, 说明弹模比达到一定的程度后, E_1/E_2 的继续增加对 K_I 几乎不产生影响。 $K_{IIS} \sim E_1/E_2$ 曲线随模比增大而减缓的现象不太明显, 可见 E_1/E_2 对 K_{II} 的影响一直都较大。

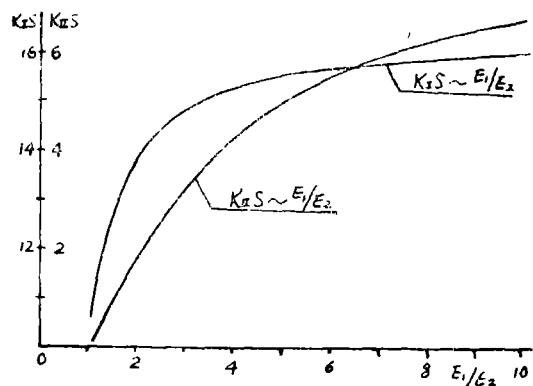


图5 应力强度因子随 E_1/E_2 变化曲线

如果将界面裂缝缝端应力强度因子相对于均质材料裂缝 (即 $E_1/E_2 = 1$) 时的应力强度因子的增大部分定义为附加应力强度因子, 则附加应力强度因子随两介质材料的弹模比而变化。图5的曲线经过适当的座标平移后即为附加应力强度因子的变化曲线。

将图5所示曲线按下式进行回归计算:

$$y = A + Bx \quad (12)$$

式中 A 、 B 为回归系数。由式 (12) 得

$$\ln y = \ln A + x \ln B \quad (13)$$

$$\text{即 } y = c + xD \quad (14)$$

上式即为回归方程。

对于图5所示的 $E_1/E_2 \sim K_{IS}$ ($i = I, II$) 曲线

$$\text{令 } y = E_1/E_2 - y_0, \quad x = K_{IS} - x_0$$

将之代入式 (13) 则得:

$$\begin{aligned} \ln (E_1/E_2 - y_0) &= \ln A + (K_{IS} - x_0) \ln B \\ K_{IS} &= x_0 + [\ln (E_1/E_2 - y_0) - \ln A] / \ln B \end{aligned} \quad (15)$$

经回归计算表明, x_0 对回归曲线的相关系数无影响, 只影响到系数 A 及 B , 如令 x_0 为均质材料三点弯曲梁的缝端应力强度因子, 则 $(K_{IS} - x_0)$ 即为附加应力强度因子; y_0 对相关系数的影响较大。采用逐步缩小循环范围的方法来寻找相关系数最大的 y_0 值, 回归结果

列于表1, 回归曲线如图6所示。

表1 回归结果

K _I S	x ₀	y ₀	A	B	R
K _I S	10.5678	0.9188	0.092571	2.213	0.99217
K _{II} S	0	0	1.0683	1.3773	0.99848

注: R为回归曲线的相关系数。

将表1的系数代入(15)经计算得到附加应力强度因子的计算公式为:

$$K_{I\text{S附}} = K_{I\text{S}} - x_0 = 1.25889 \ln(E_1/E_2 - 0.9188) + 2.995886$$

$$K_{II\text{S附}} = K_{II\text{S}} - x_0 = 3.123779 \ln(E_1/E_2) - 0.263837 \quad (16)$$

式(16)反映了不同材料的特性对界面裂缝的影响。

由上述可见界面裂缝端应力强度因子可用附加强度因子来表示:

$$K_{I\text{S}} = K_{I\text{S}'} + K_{I\text{S附}}$$

$$K_{II\text{S}} = K_{II\text{S}'} + K_{II\text{S附}} \quad (17)$$

式中K_IS'和K_{II}S'是按均质材料的裂缝计算方法得出的应力强度因子; K_IS_附和K_{II}S_附是按式(16)估算的应力强度因子。

应当说明的是式(16)是由三点弯曲界面裂缝试件的计算结果回归出来的, 用它来估计三点弯曲界面裂缝的应力强度因子是正确的, 但能否适用于其它型式的界面裂缝的强度因子是正确的, 但能否适用于其它型式的界面裂缝还有待进一步研究。

文献[7]用激光散斑照相光学实验方法对三点弯曲界面裂缝试件进行了试验研究, 将来文的计算结果化成与文献[7]的结果相同形式, 绘于图7, 由图7可以看出, 计算结果与试验结果具有很好的一致性, 其最大误差为-6.7%, 最小误差为.046%。

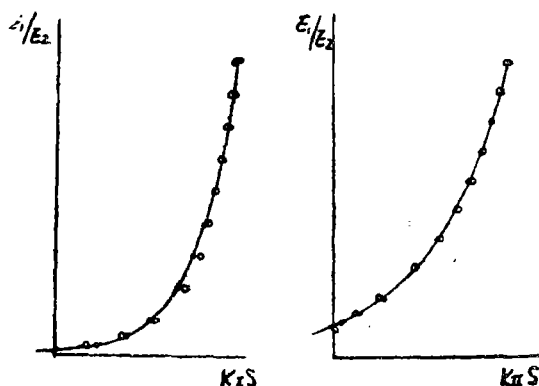


图6 回归曲线 O计算点 •回归点

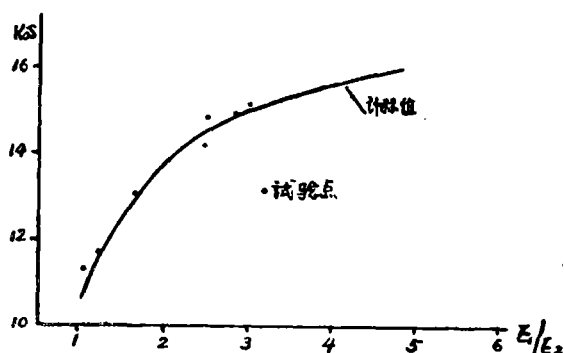


图7 实验结果与计算结果比较

四、结 语

本文将分区混合有限元法推广应用于计算异弹模界面裂缝应力强度因子, 不仅扩大了分

区混合有限元法的应用范围,而且初步解决了界面裂缝的复杂计算问题,得出了一些有益的结论:

1、界面裂缝的缝端应力强度因子仅与两种介质材料的弹性模量之比有关,与各自的绝对大小无关。

2.由于两种介质材料物理特性的差异,使得材料不连续处也产生应力集中现象,因而对于纯 I 型荷载的裂缝问题也产生了 II 型应力强度因子,即在界面处产生了剪切效应。这个剪切效应随材料特性的差异增大而增大,一般的均质材料中的裂缝计算方法不能反映出这个效应。如何简便而正确地反应这个效应是一个值得研究的问题,本文试图用附加应力强度因子的概念来解决。

3、当两种介质材料的弹模比在1~2之间变化时,界面裂缝的缝端应力强度因子变化很大。即在此范围内两介质材料弹模比的微小变化将引起缝端应力因子的较大变化。界面上的剪切应力将随着弹模比的增大而增大,有可能引起沿界面方向的滑移。

界面裂缝是一个复杂的问题,目前对其研究还很少,本文的工作只是一个初步尝试。

参 考 文 献

- (1)M. L. Williams: The Stress Around a Fault or Crack in Dissimilar Media, Bulletin of the Seismological Society of America, 49(1959), 199-204.
- (2)周鸿钧,段云岭,异弹模界面裂缝缝端应力场的计算。郑州工学院学报,1986年第1期。
- (3)K. Y. Lin and J. W. Mar, Finite element Analysis of Stress Intensity Factors for Cracks at a Bimaterial Interface, Int. J. of Fract., 12(1976), 521-531.
- (4)C. C. Hong and M. Storn, The Computation of Stress Intensity Factors in Dissimilar Materials, J. of Elasticity, 8(1978), 31-34.
- (5)R. E. Smelser, Evaluation of Stress Intensity Factors for Bimaterial Bodies Using Numerical Crack Flank Displacement Data, Int. J. of Fract., 15(1979), 15-144.
- (6)Long Yu Qiu, et al, Sub-region Mixed Finite Element Method for the Calculation of Stress Intensity Factor, Proceedings of the International Conference on Finite Element Methods, Shinghai, China(1982), 134-14.
- (7)周鸿钧,段云岭,用散斑照相法确定异弹模界面裂缝的应力强度因子,实验力学,1986年第4期。

CALCULATION OF STRESS INTENSITY FACTORS FOR CRACK AT A BIMATERIAL INTERFACE

Duan yunling, Zhou hangjun

(Dept. of Hydraulic Eng.)

ABSTRACT:

In this paper, Sub-region mixed finite element method is applied to solving the Stress intensity factors for crack at a Bimaterial interface. The applying range of this method is extended. The example demonstrates that the calculated results are in good agreement with the experimental results.

Keywords: interface crack, stress intensity factors, sub-region mixed finite element method, three-point bending beam, singular element, isoparametric element.