平衡电桥原理及对称性原理在计算复杂电路等效电阻中的应用

周彩萍　　王俊鹍

（电机系）

提　要

本文扼要地论述了计算线性无源复杂电阻电路等效电阻时平衡电桥原理的应用和对称电路简化计算的若干技巧。

关键词： 平衡电桥，对称原理，等效电阻。

在网络分析问题中经常遇到求线性无源复杂电阻电路的等效电阻的问题。求等效电阻有各种方法，但对某些电路应用平衡电桥原理或对称性原理去求等效电阻，可使计算大为简化。

应用平衡电桥原理时，首先要在待求等效电阻的复杂电路中找出构成桥路的电阻，再用众所周知的电桥平衡条件判别是否平衡。最后将平衡电桥的负载端的对角线支路开路或短接，然后利用电阻串、并联化简法求出电路的等效电阻。

例一、图1示六个电阻联成的四面体电路，试求任意两顶点间的等效电阻

解：求任意两顶点间的等效电阻时，除两顶点直接相联的电阻外，其余部分均为平衡电桥，将负载端的对角线支路开路后，各等效电阻为

$$R_{AB}=R_{AC}=R_{AD}=\frac{1\times 2}{1+2}=\frac{2}{3}=0.667\,\Omega$$

$$R_{BC}=R_{BD}=R_{CD}=\frac{3\times\frac{2\times 6}{2+6}}{3+\frac{2\times 6}{2+6}}=\frac{3\times\frac{3}{2}}{3+\frac{3}{2}}=1\,\Omega$$

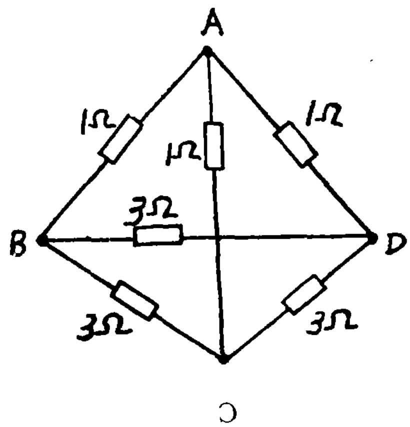

图 1

例二、求图2(a)示无限X型网络的输入端电阻

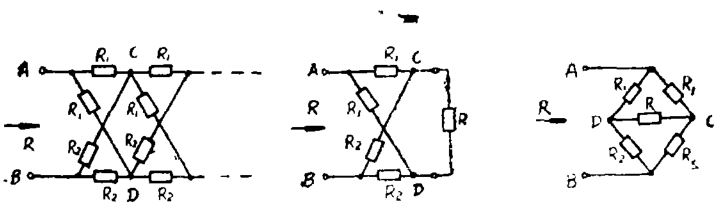

图2　a　　b　　c

解：由于该无限网络由无限多个X型环节组成，其入端电阻为R，现在输入端去掉一个环节，余下的仍为无限多个环节，其入端电阻仍为R，故可得图2（b）的等效电路，再整理电路得到图2（c）的电桥电路，根据直流电桥平衡原理，C、D为等位点，可以短接（或断

开），于是可求得无限X型网络的入端电阻

$$R=\frac{1}{2}(R_1+R_2)$$

例三、图3（a）示一个具有n个节点的完全n角形网络，每条支路电阻均为R，求任意两个节点间的入端电阻（注意为了清楚起见，图中各支路均用一线段表示）

解：为求图（3）（a）电路任意两个节点例如节点1、n间的入端电阻，可设想构造一个每条支路的电阻均为R，共n个节点的电路如图3（b）所示，注意到该电路各条支路的电阻均相等，而且求节点1、n间的入端电阻时外施电压是加在节点1、n上，所以图3（b）电路各节点2、3…K…n－1、均为等位点。若在这些等位点间互联以电阻为R的支路（此时的电路就变成了图3（a）的电路），显然不会影响电路的工作状态，于是图3（b）的电路与图3（a）的电路等效。而前者节点1、n间的入端电阻为（n－2）条电阻为2R的支路与一条电阻为R的支路并联组成，容易求得为

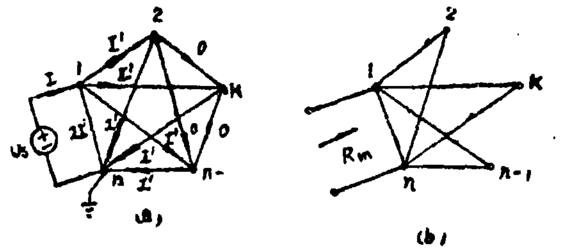

图　3

$$R_{1n}=\frac{R\times\dfrac{2R}{n-2}}{R+\dfrac{2R}{n-2}}=\frac{2R}{n}$$

上述结果可用求线性无源复杂电阻网络的入端电阻的一般方法求得，即在节点1、n间施加单激励V_s时，确定流入端口1n的电流I，两者之比即得入端电阻。

若采用节点电位法求解。设选取节点n为参考节点，$\phi_n=0$，其余节点的节点电位分别为ϕ_1、$\phi_2\cdots\phi_k\cdots\phi_{n-1}$，则可列出节点电位方程为

$$\frac{n-1}{R}\phi_1-\frac{1}{R}\phi_2-\cdots-\frac{1}{R}\phi_k-\cdots-\frac{1}{R}\phi_{n-1}=I \quad (1)$$

$$-\frac{1}{R}\phi_1+\frac{n-1}{R}\phi_2-\cdots-\frac{1}{R}\phi_k-\cdots-\frac{1}{R}\phi_{n-1}=0 \quad (2)$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$-\frac{1}{R}\phi_1-\frac{1}{R}\phi_2-\cdots+\frac{n-1}{R}\phi_k-\cdots-\frac{1}{R}\phi_{n-1}=0 \quad (K)$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$-\frac{1}{R}\phi_1-\frac{1}{R}\phi_2-\cdots-\frac{1}{R}\phi_k-\cdots+\frac{n-1}{R}\phi_{n-1}=0 \quad (n-1)$$

且　　$\phi_1=V_s$

将上述n－1个方程相加，得

$$\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{n-1}\phi_k=I \qquad (n)$$

又由方程（1）得

$$\frac{n}{R}\phi_1-\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{n-1}\phi_k=I$$

并代入方程（n）应有

$$\frac{n\phi_1}{R}=\frac{nV_s}{R}=2I$$

最后求得入端电阻为

$$R_{1n}=\frac{V_s}{I}=\frac{2R}{n}$$

若采用支路电流法求解。如图3（a）所示，在假定各支路电流未知数时，考虑电路的对称性，应令

$$I_{12}=\cdots=I_{1k}=\cdots=I_{1,n-1}=I'$$
$$I_{2n}=\cdots=I_{kn}=\cdots=I_{n-1\,n}=I'$$

对于回路12n1按KVL有

$$RI_{12}+RI_{2n}-RI_{1n}=0$$

即

$$I_{1n}=I_{12}+I_{2n}=2I'$$

其余所有支路电流均为零例如对于回路1Kn－11按KVL有

$$RI_{1k}+RI_{kn-1}-RI_{1n-1}=0$$

即

$$I_{kn-1}=I_{1n-1}-I_{1k}=I'-I'=0$$

对节点1按KCL有

$$I=I_{12}+\cdots+I_{1k}+\cdots+I_{1n-1}+I_{1n}=(n-2)I'+2I'=nI'$$

对电压源V_s与支路1n组成的回路按KVL有

$$RI_{1n}=2RI'=V_s$$

最后求得入端电阻

$$R_{1n}=\frac{V_s}{I}=\frac{V_s}{nI'}=\frac{2R}{n}$$

与上面所得的结果一致。

从以上分析可知一个具有n个节点的完全n角形对称网络，若1、n 两端为电源端，电路中计有n－2个负载端，各负载端的电位$\phi_2\cdots\phi_k\cdots\phi_{n-1}$均相等，联接这些等位点的各支路（可

视为电桥的对角线支路）的电流均为零，这些支路共有$C_{n-2}^{2}=\frac{(n-2)!}{2!(n-4!)}$条，从而该电路可组成$C^2_{n-2}$组平衡电桥电路。这个结论虽然是从完全n角形对称网络的特殊情况下导出的，但具有一般性。可以证明任意一个具有n个节点的完全n角形不对称网络的各负载端电位相等的充要条件是C^2_{n-2}组电桥完全平衡。满足这一条件的多角形网络计算等效电阻是十分简便的。

有时可以利用网络结构上的对称性来判断等位点并化简网络。

例四、图4（a）示一个由十二个电阻值均为R的电阻元件组成的立方体网络，求入端电阻R_{AG}

解：将原电路等效改画成平面电路如图4（b）所示，这样较便于分析。

为计算R_{AG}，根据电路结构的对称情况，当电流由A端流入并由G端流出电路时，B、E、D各点等电位，F、C、H各点也等电位，将这两组等位点分别用短接线短接起来，如图4（b）中虚线所示，不难看出电阻AB、AE、AD为并联，电阻FG、CG、HG亦为并联，电阻BF、EF、EH、DH、DC、BC也为并联，于是可求得入端电阻为

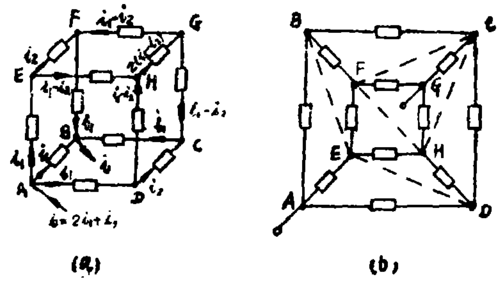

图 4

$$R_{AG}=\frac{1}{3}R+\frac{1}{6}R+\frac{1}{3}R=\frac{5}{6}R$$

附带指出，若欲计算R_{AC}或R_{AB}时，根据电路结构上的对称性可判断B、D、F、H各点为等位点或C与F、D与E分别为等位点，将这些等位点分别用短接线短接起来后，容易求得$R_{AC}=\frac{3}{4}R$或$R_{AB}=\frac{7}{12}R$。

自然本例也可用电流分布系数法求解。以求R_{AB}为例说明之。设选一组未知支路电流i_1、i_2、i_3，反复利用各节点电流方程并考虑电路的对称性，作出各支路电流的分布如图4（a）所示。对独立回路ABCDA列出回路电压方程应有

$$Ri_3=2Ri_1+Ri_2$$

即

$$i_3=2i_1+i_2 \qquad (1)$$

对独立回路EFGHE列出回路电压方程应有

$$Ri_2=4R(i_1-i_2)$$

即

$$i_2=4(i_1-i_2) \qquad (2)$$

由方程（1）、（2）得

$$i_2=\frac{4}{5}i_1,\qquad i_3=\frac{14}{5}i_1$$

A、B端口电压为

$$Ri_3=V$$

最后所求入端电阻为

$$R_{AB}=\frac{V}{i}=\frac{V}{2i_1+i_3}=\frac{7V}{2\times\frac{5}{14}i_3+i_3}=\frac{7V}{12i_3}=\frac{7}{12}R$$

求无源复杂电阻网络的入端电阻时，还常用到平衡对称网络和传递对称网络的一些特点来化简网络。对于平衡对称网络而言它具有如下的特点，即网络中与平衡对称面相交的交点均为等位点，且平衡对称网络中与中分面对称的点也均是等位点。对于传递对称网络而言它满足中分定理。

例五、求图5所示网络的入端电阻R_{AI}、R_{AB}

解：（1）求R_{AI}

对端口AI而言，若通过该网络的中心线BDH作一垂直该网络的横向截面（称为平衡对称面），使端口的两个端子A、I分居截面两侧，且可将该网络分成具有对称镜象关系的上、下两半网络，则称该网络为平衡对称网络。显然该网络平衡对称面上的B、D、H三点为等位点。又若通过该网络的中心线ADI作一垂直该网络的纵向截面（称为中分面），可将该网络分成具有对称镜象关系的左、右两半网络，则称该网络为传递对称网络显然对称中分面ADI的点C与F、G与E及B与H均为等位点，将这些组等位点用短接线短接起来如图5中虚线所示，即可求得入端电阻为

$$R_{AI}=2\times\left(\frac{1}{2}R+\frac{1}{4}R\right)=1.5R$$

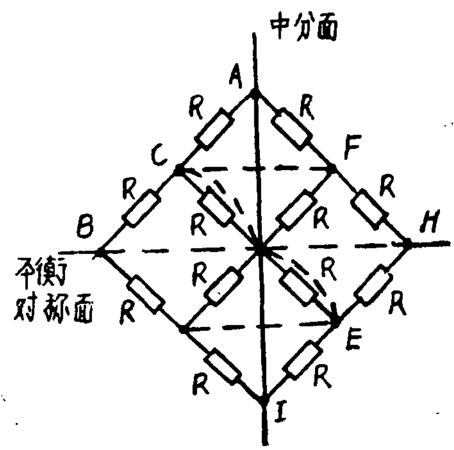

图　5

（2）求R_{AB}

对端口AB而言，CDE为平衡对称面，该面上的C、D、E为等位点，将它们用短接线短接起来如图5中的虚线所示，则不难用串、并联化简求得

$$R_{AB}=1.25R$$

例六、求图6（a）所示网络的入端电阻R_{AB}平衡对称面

解：（1）对端口AB而言，该网络既是传递对称网络，又是平衡对称网络。与中分面AEFB对称的点C与G及D与H为等位点，将这两组等位点用短接线短接起来，如图6（a）虚线所示，于是可求得入端电阻为

$$R_{AB}=0.5+0.5\,||\,(0.5+1+0.5)+0.5=1.4\Omega$$

（2）若将CD、EF、GH支路的1Ω电阻看成两个0.5Ω电阻串联如图6（b）所示，

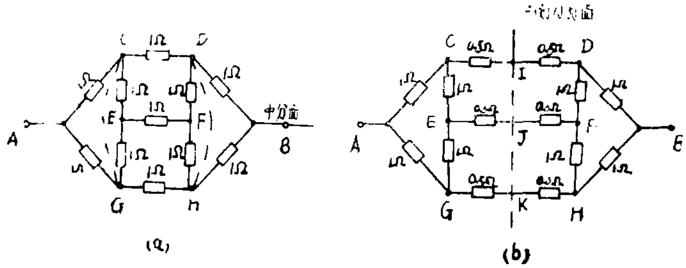

图　6

根据平衡对称网络与平衡对称面交点I、J、K为等位点的性质，将这组等位点用短 接线短接起来，再根据Y—Δ变换及电阻串并联化简不难求得与（1）相同的结果，但显然较繁。

（3）若将图6（a）网络中间1Ω电阻的EF支路看成两个2Ω支路的并联，如图7所示。由于该网络为传递对称网络，它满足中分定理，从而对接联线EE_1及FF_1可以断开，于是不难求出入端电阻为

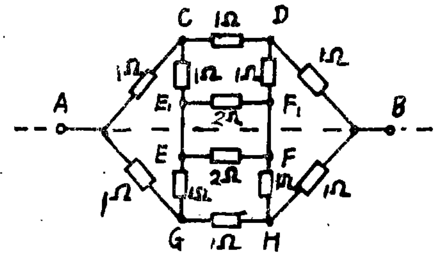

图　7

$$R_{AB}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1\times4}{1+4}+1\right]=1.4\Omega$$

与上面求出的结果相同。

例七、求图8（a）所示电路的入端电阻R_{AB}

解：为求入端电阻R_{AB}，仍采用加电压求电流的办法，即在端口处加一电源V_s，求入端电流I。若在最右边2Ω支路中插入两个大小相等，方向相反的电压源$V_s/2$．对电路的工作状态没有影响。于是根据选加原理可得图8（b）的等效电路，再应用中分定理可得图8（C）的等效电路，求入端电流I就容易了。

入端电流I应为

$$I=I'+I''=\frac{V_s/2}{2+3\parallel3}+\frac{V_s/2}{2+3\parallel3}=\frac{2V_s}{7}$$

故入端电阻

$$R_{AB}=\frac{V_s}{I}=3.5\Omega$$

上面我们应用中分定理求得了入端电阻，当然本例应用Y—Δ变换来求解是很简便的。

例八、图9（a）示电路中各电阻均为1Ω，求入端电阻R_{AB}

解：对于对称电路，如果能找到一组对称面将电路分成几个结构完全一样的子电路，就可只取其中一个子电路来进行计算，再加上平衡对称网络与传递对称网络的一些特点就可使计算大为简化。

对图9（a）的电路，不难看出通过互相垂直的轴线AB与CD就可将该电路分成4 个完全一样的子电路，由于我们把原电路看成为 4 个完全相同的子电路两两串联再并联或者两

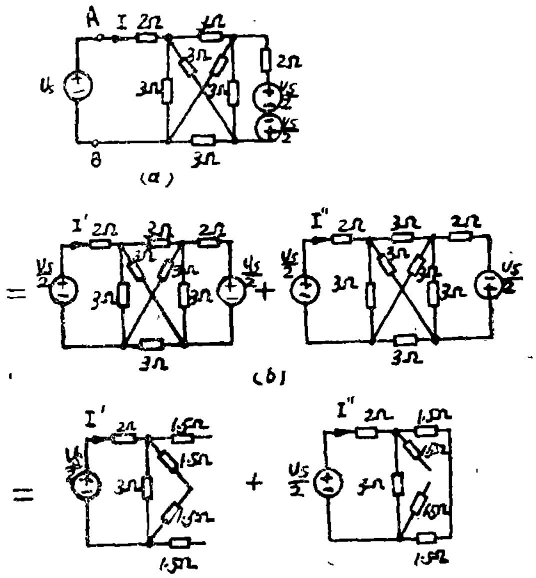

图　8

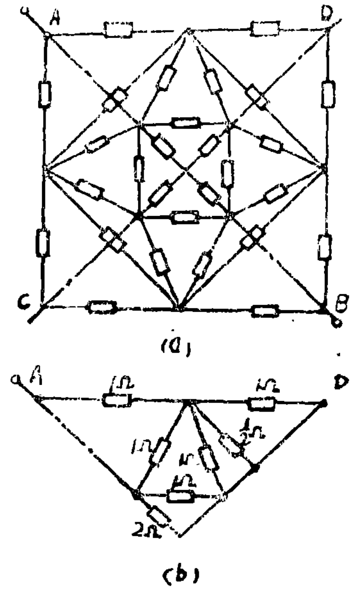

图　9

两并联再串联，所以只需计算一个子电路的电阻就能代表整个电路的电阻。原电路1/4子电路如图9(b)所示。容易求得

$$R_{AB}=R_{AD}=1+\frac{5}{3}\parallel\frac{1}{4}=\frac{28}{23}=1\frac{5}{23}\Omega$$

参　考　文　献

〔1〕　俞大光编　电工基础（修订本）　上册　人民教育出版社　1964年

〔2〕　江泽佳主编　电路原理（上册）　人民教育出版社　1980年

〔3〕　管致中等编　电路、信号与系统　上册一、二分册　人民教育出版社　1979年

〔4〕　陶炯光等编　电工原理问题分析　上册　武汉电工理论学会　1983年

〔5〕　F·A·本森著　刘杰民等译　电路习题与题解　陕西科学技术出版社　1980年

APPHCATION OF BALLANCED BRIDGE AND PRINCIPLE OF SYMMETRY TO THE CALCULATION OF EQUIVALENT RESISTANCE IN COMPLEX CIRCUIT

Zhou Caiping wang junkun

(Electrical Engi eering Department)

Abstracs

This paper gives a brief exposition of the application of ballanced bridge principle and simplified calculating methods of the symmetrical circuit in calculating the equivalent resistance in linear passive complex resistance circuit.

Key words: balanced bridge, principle of symmetry, equivalent resistanc.

(上接70页)

THE INTELLECTUALIZATION OF THE POWER CABLE' S FAULT DISTANCE METER

Qin Qiancheng

(Electrical engineering department)

Abstract

In this paper, the auther developed a criterion which can be used to judge whether the measured value of the fault distance is correct. The task of intelleclualized distance meter is discussed and the main technical elements in realizing intellectualitation of the distance meter are also introduced.

Keywords: power cable , fault distance meter, intullectualization, single—chipmicrocomputer