关于卷积成象的注释

关智武

（物理教研室）

提　　要

本文对用卷积计算光学系统成象的两种图解法进行了注释，并指出应用图解法时需要注意的问题。

关键词： 卷积，象，点扩展函数

两个函数f（x）与g（x）的卷积用记号“f（x）＊g（x）”表示，卷积的定义为：

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(x-x')dx'$$

式中x′实际上也就是自变量x，改写为x′是为了明确哪些量参与积分运算，需要注意的是f(x)与g(x)的卷积仍是x的函数。

卷积还有许多名称，比如，褶积、组合乘积、叠加积分、流动平均等等。卷积的概念包含在物理学科的许多领域中，用卷积计算光学系统的成象通常称为卷积成象，卷积成象是付里叶光学中的一个重要问题。本文对卷积成象的两种图解法进行必要的注释，并对容易混淆的问题提出一些看法。

一、光学系统的卷积成象

在评价一个光学系统的象的质量问题时，往往将实际象与理想象相比较，理想象就代表被成象的物体。所谓“理想象”是指象的位置和大小都由高斯光学决定，象的反衬度和物体完全一样。由于光学系统的衍射作用和象差的存在，实际象的反衬度必然降低，不如理想象那样清晰，象的质量有所下降。比如，一个点光源（点物）的理想象应是一个“点”，而实际象不是一个“点”而是一个“晕斑”，描写这个晕斑的形状、强度分布的函数h(x，y)叫做点扩展函数，这个函数在成象计算中起着重要作用。

将实际象与理想象比较，找出实际象与理想象之间关系，也就找出了实际象与物的关系，这正是我们要讨论的问题。为此，现在引入一个重要概念——空间平移不变性。设想把理想象面与实际象面迭在一起对比，前者的各个点将分别对应于后者的各个晕斑。如果不同位置晕斑的强度分布相同，就说该光学系统具有空间平移不变性（简称空不变），否则，就是“空变的”。对于理想的成象系统，空不变是必须具备的性质，例如在摄影时，不能允许同一被摄物体处于不同位置而会呈现出不同的面貌。对于实际成象系统，不能具备严格的空间不变性，一般说来，傍轴区往往是空不变的，例如在图1中，傍轴区域内任意两点（x_1，y_1）和（x_2，y_2）周围晕斑分布形式相同，傍轴区之外一点（x_3，y_3）周围的晕斑形式就可能是

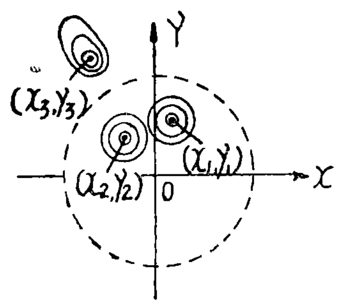

图　1

另一个样子。以下仅讨论具有空间不变性质的光学成象系统，对于空不变系统，如果坐标原点（$x=0, y=0$）处点扩展函数为$h(x, y)$，那末任意点（x'，y'）处点扩展数函只需将$h(x, y)$平移到（x'，y'）处，变为$h(x-x', y-y')$即可。

现在来寻求在非相干光照明条件下光学系统成象的计算公式——理想象（物）强度分布$I_o(x, y)$与实际象强度分布$I(x, y)$之间的关系。为了方便起见，我们只讨论一维情况，下面对照图2，逐步找出$I(x)$与$I_o(x)$之间的关系。

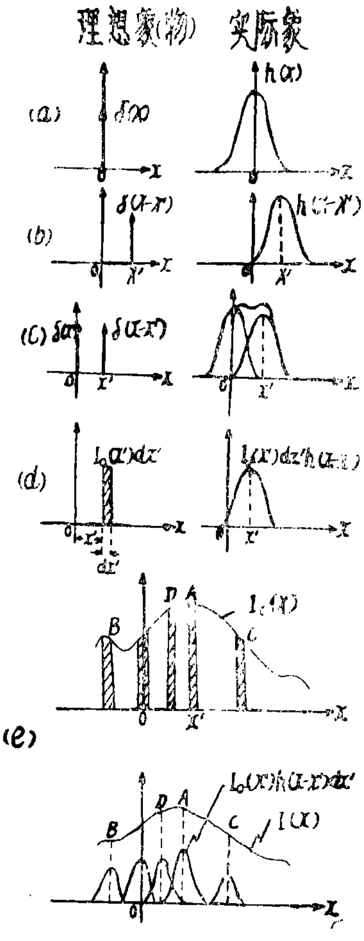

图　2

图（a）：$x=0$处的一点$\delta(x)$，实际象为一个晕斑——扩展函数$h(x)$；

图（b）：$x=x'$的一点$\delta(x-x')$实际象为$h(x-x')$；

图（c）：同时存在两个点$\delta(x)$，$\delta(x-x')$，实际象为$h(x)$与$h(x-x')$的迭加，这是因为对于非相干照明，强度可以线性迭加；

图(d)：$x=x'$处一个“面元”$I_o(x')dx'$可作为“点”来处理，实际象为$I_o(x')dx'h(x-x')$；

图（e）：理想象（物）分布$I_o(x)$，可将其分为许多宽为dx'的“点”，在x'处的“点”[$I_o(x')dx'$]，由于扩展函数$h(x-x')$的作用，实际象将是以x'为中心的“晕斑”$I_o(x')dx'h(x-x')$，理想象上各个“点”分别对应着实际象的各个“晕斑”。显然，实际象分布$I(x)$是所有这些晕斑迭加的结果，写为积分形式，则有：

$$I(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} I_o(x')h(x-x')dx'$$

这正是$I_o(x)$与$h(x)$的卷积，即：

$$I(x)=I_o(x)*h(x)$$

该式表明，实际象分布$I(x)$等于理想象（物）分布$I_o(x)$与扩展函数$h(x)$的卷积。

仔细分析图2（e），可以得到卷积成象的一种图解法：欲求$I_o(x)*h(x)$，先画出$I_o(x)$、$h(x)$函数曲线，保持$I_o(x)$曲线不动，将h函数曲线平移，移到某一点，就将h曲线乘以该点的$I_o dx$，（有的文献[2]认为，乘以该点的I_o，这样虽然数学上欠严谨，但作图时却是方便可行的），得到一个将h函数曲线高度放大或缩小的曲线图形，最后将所有这些曲线图形迭加起来，即为$I(x)=I_o(x)*h(x)$的图形，图3(a)、(b)、(c)代表三种不同的扩展函

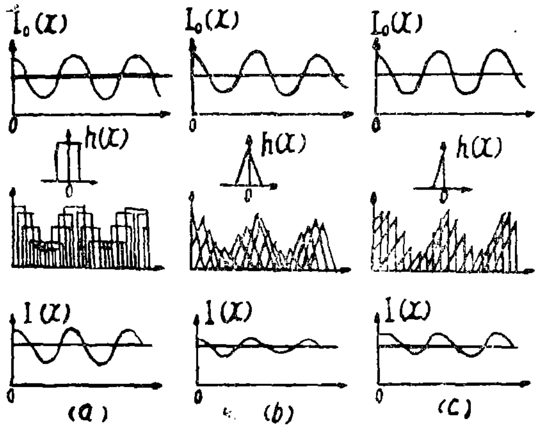

图　3

数的情形。这种图解法所对应的物理意义是：实际象的强度分布$I(x)$是由无数多个形状相似而峰值高度和位置随$I_0(x)$变化的晕斑迭加的结果。

二、卷积成象的另一种图解法

考察卷积

$$I(x)=I_0(x)*h(x)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}I_0(x')h(x-x')dx'$$

当x依次取不同的值x_1, x_2, x_3……，如果能用图解法求出$I(x)$相应的值$I(x_1)$，$I(x_2)$，$I(x_3)$……，就可逐点描出$I(x)$的图形，完成卷积运算。为此，分析$I(x)$的一个值$I(x_1)$：

$$I(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}I_0(x')h(x_1-x')dx'$$

这是一个以x'为变量的积分，被积函数是$I_0(x')$与$h(x_1-x')$两个函数的乘积，其中$I_0(x')$是理想象分布函数，至于$h(x_1-x')$可由扩展函数$h(x')$翻转、平移得到：$h(x')$以纵坐标为轴左右翻转变为$h(-x')$；再向右移x_1变为$h[-(x'-x_1)]$，即$h(x_1-x')$。因此，可按下述步骤由图解法求出$I(x_1)$（参照图4，为绘图方便，h函数最大高度为1）

1、以x'为横坐标，画出$I_0(x')$，(x')（图a，b）；

2、将$h(x')$翻转得到$h(-x')$（图c）；

3、将$h(-x')$平移到x_1得出$h(x_1-x')$（图d）；

4、求得并绘出两函数乘积$I_0(x')h(x_1-x')$的曲线（图e中虚线所示），这条曲线下的面积（画斜线部分）即是$I(x_1)$的值：

$$I(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}I_0(x')h(x_1-x')dx'$$

依照此法，逐一求出$I(x_1)$、$I(x_2)$、$I(x_3)$……，用描点法绘出$I(x)$图形，完成卷积运算。

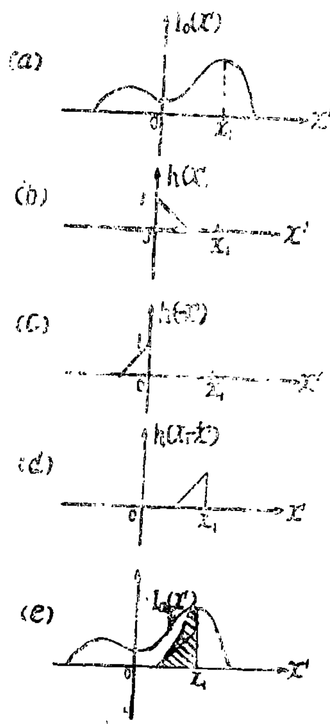

图　4

三、两种图解法的比较

以上我们讨论了卷积的两种图解法，它们

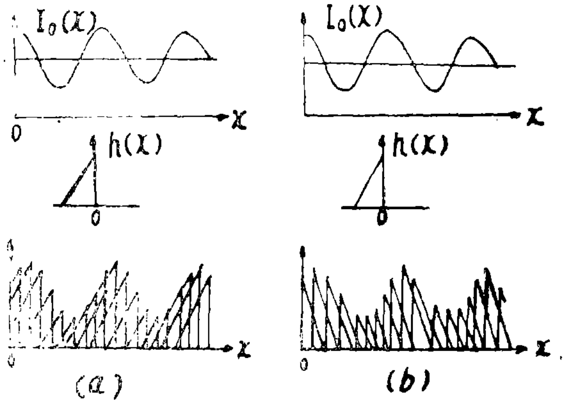

图　5

反映了对同一问题的两种考虑方法，二者必定是等效的[3]，需要注意的倒是二者在作图步骤上的差别。

第一种方法可以简述为h函数平移、相乘、迭加；第二种方法简述为h函数翻转、平移、相乘、求面积并描点。二者显著的差别是前者h函数不翻转，后者翻转，还应特别注意二者相乘的方法是不同的：前者，h函数乘同一值，后者，h函数乘另一函数[$I_0(x')$]，而两种相乘结果的意义极不相同。这种“相乘”的差别乍看起来并不是一目了然的，稍不留意就会出现混乱。比如，有时会看到如图5（a）(b)所示的对同一问题的两种图解法[2][4]，其中图（a）认为应将h函数平移、相乘、迭加；图（b）认为应将h函数翻转、平移、相乘、迭加，这样就会出现两种相互矛盾的结果。稍加分析就会发现，按图（b）迭加是不妥当的：其一，如果依照卷积的第二种图解法，h函数翻转、平移、相乘，这里的“相乘”应是两个函数相乘，一般来说，相乘时h函数各点的“放大倍数”是不同的，不可能与原来形状相似；其二，相乘后图形的面积表示卷积在某点的值，而不能将图形迭加作为卷积结果。

顺便指出，用图解法时，我们假定I_0不动将h平移，其实由于卷积符合交换律，

$$I_0 * h = h * I_0$$

所以，保持h不动，将I_0平移，其结果是相同的。

参　考　文　献

〔1〕 麦伟麟：《光学传递函数及其数理基础》　国防工业出版社．1979年
〔2〕 赵凯华　钟锡华：《光学》下册　北京大学出版社　1984年
〔3〕 E．赫克特　A．赞斯：《光学》下册　人民教育出版社　1980年
〔4〕 钟锡华：《付里叶变换光学基本原理讲座》　《物理》月刊　1983年　3月　P179

THE ANNOTATION ABOUT THE METHODS OF USING CONVOLUTION TO CALULATE IMAGING

Guan Zhiwu
Physics Teaching Group

Abstract

This article annotes two kinds of graphic methods which use convolution to calculate the image formation of optical system and points out the problems to which we must pay attention in using these graphic methods

Key words: Convolution, Image, Point spread function