

复杂围堰渗流问题的研究*

王 钟 泰

(水 利 系)

提 要

本文阐述用液体电模拟试验和有限元解法,解复杂的围堰渗流问题,两种方法所得结果一致。前者所需仪器设备简单,是连续介质场,便于观测;后者是近年新发展的电算技术,其最大优点是求解迅速,精度高。本文为解决同类渗流问题提供了参考和依据。

关键词: 浸润线,逸出点,电模拟法,有限单元法。

水利工程在施工期间,挡水围堰是必要的施工措施。堰体多数用当地材料(砂砾石等)填筑。如果河床复盖层很深(超过20米,且为砂砾石),堰体和堰基的渗透系数 K 都较大,当渗透流速过大,围堰将丧失其稳定性,所以必须考虑防渗措施。例如堰体采用防渗塑性心墙,堰基采用混凝土防渗墙。此种围堰与土坝相比,其横断面形式较为复杂。所以用水力学的普通公式难于确定围堰的渗流量、流速和浸润线位置。本文用电模拟法和有限单元法对复杂的围堰渗流问题进行了研究分析,取得较满意的结果,可供解决同类问题参考。

一、围堰设计概况

现以黄河上游某水电站工程设计的施工围堰为例,其横断面形式如图1所示。

围堰按全年挡水设计,导流标准 $P = 5\%$,设计流量为 $5500\text{米}^3/\text{秒}$,水位为1457.7米。

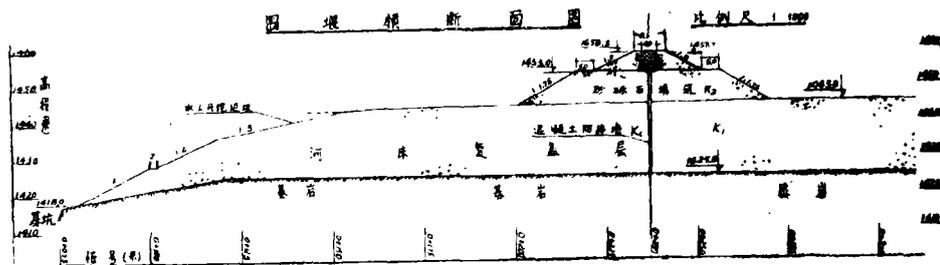


图1.围堰横断面形式

围堰顶部高程1458.5米,土料心墙顶宽4.0米,底部高程为1453.0米,下接混凝土防渗墙,墙厚1.0米,穿过河床复盖层与基岩连接。堰体采用砂砾石填筑。材料渗透系数如表1所示。

*参加本项试验、电算工作的还有冯郑宏、段云岭等

表1. 材料的渗透系数

围堰的部位	渗透系数 K			渗透系数比较 (K/Kc)
	厘米/秒	米/天	符号	
土料心墙	1×10^{-4}	0.0864	Ks	1×10^{-8}
砂砾石填料	6×10^{-3}	51.84	Ka	6×10^5
河床复盖层	3×10^{-3}	25.92	K1	3×10^5
混凝土防渗墙	1×10^{-7}	8.64×10^{-2}	Kc	1

要求在上游为最高水位，下游基坑无水的条件下，研究有、无混凝土防渗墙两种情况的浸润线、逸出点位置、等势线和渗流量，以便分析围堰基础及河床复盖层的施工开挖边坡的稳定性，估算最大渗流量，为论证设置防渗墙的必要性提供依据。

二、电模拟试验

(一)原理：用导电液模型来研究渗流问题，是广泛应用的较为经济的简便方法。电流场和渗流场可用同一形式的拉普拉斯方程来描述。其基本原理是渗流达西定律和电学欧姆定律具有相似性。

设在空间坐标系中，沿流线取渗流场和电流场中一段长为 l 和 l_e 的微小流束，根据达西定律和欧姆定律，可分别写出通过截面积 ω 和 ω_e 的渗流量 Q 和电流强度 I 为

$$Q = \omega v = -\omega k \frac{\partial \phi}{\partial l} \quad (1)$$

$$I = \omega_e i = -\omega_e \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial l_e} \quad (2)$$

式中 v 、 k ——渗流速度和渗透系数；

ϕ ——渗流场势水头函数， $\phi = \frac{P}{\gamma} + y$

u ——电场电位； i ——电流密度；

ρ ——电阻率； γ ——液体容重。

设导电液模型比实际渗流场缩小 λ_L 倍，根据以上两式的相似关系可以导出电模拟试验的渗流量公式

$$Q = \frac{\lambda_L \rho k H I}{U} = \frac{\lambda_L \rho k H}{R} \quad (3)$$

式中 H 、 U ——上下游水位差和电模型总电压；

R 、 I ——上下游电极之间模型总电阻和总电流。

对于导电液深度为 δ 的平面电模型，由上式可算出宽度 $b = \lambda_L \delta$ 的原型总渗流量；故单宽

$$\text{渗流量为 } q = \frac{Q}{b} = \frac{\rho k H I}{\delta V} = \frac{\rho k H}{\delta R} \quad (4)$$

(二) 导电液模型设计: 按围堰有、无防渗墙两种情况考虑。

1. 模型范围: 在围堰迎水面之前选取河床复盖层长度为40米, 至围堰背水面电站基坑开挖处总长为231.5米。高度由高程1458.5米至1418.0米, 共40.5米。电模型几何比例尺选为1:100, 则模型总长2.315米, 总高0.405米, 全部安装在水平玻璃板上, 下面垫有坐标纸。

2. 模型内部和边界条件: 电模型按原型尺寸缩小100倍, 其它条件如下。

(1) 围堰迎水面的静水头 $H = \text{常数}$, 相当电位 $U = \text{常数}$; 采用铜皮作为汇流板。围堰背水面复盖层的开挖边坡与不透水基岩相交处为零电位, 其高程为1418.0米。上游水位为1457.7米, 所以总水头 $H = 39.7$ 米。总电压选用10伏特。

(2) 围堰下游逸出段上, 各点的电位与高程成正比关系, 即 $u = Ay$ (5)

其中 A 为常数, y 为位置水头。在逸出段边坡上安装电阻丝汇流排和铜皮(水平段), 并用电位器调节电阻, 使汇流排端电压符合关系式(5)。

(3) 电模型内部, 在不同导电液之间采用铜丝挂钩式隔板。便于将铜丝挂钩取下清洗或更换。

(4) 渗流浸润线为一待定边界, 由绝缘软泥(用凡士林与滑石粉混合制成)围成初步假定的浸润线边界, 在试验中按式(5)关系逐次修正。

(5) 不透水边界用绝缘塑料板围成。

3. 导电液配制: 因防渗墙的渗透系数 K_c 非常小, 而简化为不透水墙。对心墙、堰体及河床复盖层的渗透系数选用三种导电率的液体, 使满足下式

$$k_3 : k_2 : k_1 = \frac{1}{\rho_3} : \frac{1}{\rho_2} : \frac{1}{\rho_1} = 1 : 600 : 300$$

现将三种土质的渗透系数和选定的导电液电阻率列于表2。于是上式成为 $k_1 \rho_1 = k_2 \rho_2 = k_3 \rho_3 = 3.32 \Omega \text{cm}^2 / \text{s}$ 。模型中导电液深度 $\delta = 1 \text{cm}$ 。

表2 导电液的电阻率

部 位	心墙(用蒸馏水)	堰体(用硫酸铜溶液)	河床复盖层(用硫酸铜溶液)
渗透系数 K	$1 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$	$6 \times 10^{-2} \text{ cm/s}$	$3 \times 10^{-2} \text{ cm/s}$
电阻率 ρ	33200 $\Omega \cdot \text{cm}$	55.33 $\Omega \cdot \text{cm}$	110.67 $\Omega \cdot \text{cm}$

4. 仪表和装置: 电源采用交流稳压器(1KVA)和低频信号发生器(XD7A)。测量仪表有真空管毫伏表(GB-9B)、万用表(MF63)、电测针、电位器和电阻箱等。电测针手柄和连接线都应屏蔽, 避免感应电容的变化。电模型线路连接如图2所示。有防渗墙模型线路连接从略。

3. 渗流量: 在模型中测出总电流 I , 由式(4)算出单宽渗流量 q 。已知围堰长度 $L = 230$ 米, 则总渗流量 $Q = qL$, 详见表3。

三、有限单元法计算分析

下面用平面稳定渗流场的有限单元法对复杂的围堰进行计算分析。

(一) 方法: 平面稳定渗流场可归结为泛函的极值问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} I[\phi] = \int_R \int \left\{ \frac{1}{2} [k_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2] - Q\phi \right\} dx dy \\ \quad - \int_c q_c \phi ds = \min \\ \phi = \phi_B \quad (\text{在边界} B \text{上}) \end{array} \right. \quad (6)$$

用有限单元法求解此泛函极值问题, 首先须将渗流区域 R 离散化为有限个子域 ΔR , 即 $R = \Sigma \Delta R$ 。在每个子域(单元)上, 泛函为

$$I^e[\phi] = \int_{\Delta R} \int \left\{ \frac{1}{2} [k_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2] - Q\phi \right\} dx dy - \int_{\Delta c} q_c \phi ds \quad (7)$$

上式最末项只是在含有边界 c 的单元才有效。然后对 I^e 进行微分得

$$\frac{\partial I^e}{\partial \phi_i} = \int_{\Delta R} \int \left\{ k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - Q \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} \right\} dx dy - \int_{\Delta c} q_c \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} ds, \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

对单元内任一点的水头函数, 可用节点水头 ϕ_i ($i=1, 2, 3, \dots, m$)表示:

$$\phi = \sum_{i=1}^m N_i \phi_i \quad (9)$$

式中 N_i 为单元的形函数。

将式(9)代入式(8)得

$$\frac{\partial I^e}{\partial \phi_i} = \int_{\Delta R} \int \left\{ k_x \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} - Q N_i \right\} dx dy - \int_{\Delta c} q_c N_i ds, \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

写成矩阵形式:

$$\frac{\partial I^0}{\partial \phi_i} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial I^0}{\partial \phi_1} \\ \frac{\partial I^0}{\partial \phi_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial I^0}{\partial \phi_m} \end{Bmatrix} = [h]^0 \{\phi\}^0 + \{f\}^0 \quad (11)$$

$$\text{式中 } \left. \begin{aligned} h_{ij} &= \int_{\Delta R} \left\{ k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} dx dy \\ f_i &= \iint_{\Delta R} Q N_i dx dy - \int_{\Delta c} q_c N_i ds \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将各单元的 $\frac{\partial I^0}{\partial \phi}$ 进行集合, 并利用泛函求极值的条件, 得方程组

$$\frac{\partial I}{\partial \phi} = [H]\{\phi\} + \{F\} = 0 \quad (13)$$

式中 $[H]$ 为总体流渗矩阵, $\{F\}$ 为形成总体矩阵时所得到的列向量, 其表达式为

$$H_{ij} = \sum_R h_{ij} \quad F_i = \sum_R f_i$$

解此方程组可得到各节点的 ϕ ,

而单元内任一点 (x, y) 的渗流速度为

$$\{v\}_A = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = [s]^0_A \{\phi\}^0$$

式中 $[s]^0_A = [s_1 s_2 \dots s_m]^0_A$

$$\{s_i\}^0_A = - \begin{Bmatrix} k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

通过任一截面的渗流量为

$$q_n = \sum_s (-l_r v_x - l_x v_y)$$

这里的集合是对该截面上的所有单元进行的。

由上可知, 只要知道各单元的形函数 $[N]$, 即可求得形函数的偏导数、 $[h]^0$ 、 $[s]^0$, 然后可以求出各节点的 ϕ , 以及各单元中渗流流速 $\{v\}$ 。从而可求得任一截面的渗流量。

(二) 程序设计: 根据上述方法编制了计算程序, 为简便计, 采用简单三角形单元。 $[H]$ 是对称的, 带状, 稀疏的矩阵, 采用一维变带宽压缩存储, 方程组的解法采用变带宽的改进

平方根法。

边界条件可分为两类,一类是已知边界上的各点的 ϕ ,另一类是已知通过某个边界的渗流量。对于前者,可输入已知节点的 ϕ 值。程序采用类似于结构分析中已知位移的处理方法对[H]及[F]阵进行修正。后者则按 $\{f_i\}$ 的计算方法由已知流量 q_c 计算出边界单元的 $\{f_i\}$ 。

浸润线是一种特殊的边界,程序先按流量边界考虑,待求解出各节点的 ϕ 值后,自动令浸润线上各节点的y坐标等于其 ϕ 值,然后重新求解。程序可先读入重复计算的遍数,自动计算。

逸出点位置确定:先假定一个逸出点,该点下面的各边界点按水头边界处理,而逸出点按浸润线上的点处理,但是要保证变化后仍在边界上。

简单三角形单元为等流速单元,即单元内各点的渗流速度相同,所以渗流量计算也较简单,可选取任一垂直过流断面进行计算。



图5 不透水地基均质坝渗流

程序考核:对图5所示的均质土坝进行计算。划分145个单元,93个节点,迭代10遍,在IBM-PC/AT机上CPU时间为38.00秒。计算结果列于表4。

表4 程序考核

计算方法	浸润线位置									渗流量q 渗透系数k
	x	10	20	30	40	50	60	70	80.4	
达赫勒分段法		22.1	20.8	19.5	17.8	16.5	14.9	12.9	10.6	2.65
基本抛物线法	y	22.49	21.23	19.88	18.43	16.86	15.13	13.18	10.77	2.77
有限元法		23.18	21.78	20.39	18.93	17.36	15.63	13.68		2.84

结果表明,有限元计算与巴甫洛夫斯基—达赫勒分段法和基本抛物线法是相当接近的。

(三)围堰渗流电算分析:对围堰有、无防渗墙两种情况进行电算分析,网格剖分、绘图及浸润线绘制均由自动剖分网格程序DW01(自编)处理。

1、有防渗墙:为便于与电模拟试验结果对比,仍假定防渗墙为不透水边界。并考虑到围堰是稳定渗流,可将计算域进一步简化,如图6所示。

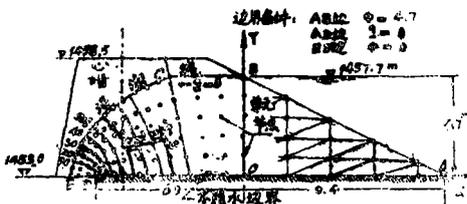


图6 有防渗墙堰体渗流电算结果

考虑到ED边下面为不饱和水层,故假定其 $\phi = 0$ 。计算域共剖分155个单元、99个节点。浸润线及等势线绘于图6,渗流量列于表3。

比较图6和图3可知,其中70%~90%三条等势线,下部稍有差异,这是因为在电算中假定底部边界为不透水层,等势线应与此边界正交。而在试验中并无此假定。顺便指出,在电算中不但可以取消此假定,还能计入混凝土防渗墙的渗透性。

2.无防渗墙:将全部渗流场(计算域)共剖分170个单元、120个节点。电算结果绘于图4,渗流量列入表3。可以看出,电算与试验结果基本一致,特别是浸润线十分接近。

四、结 语

(一)对于复杂围堰渗流问题的求解,既可用液体电模拟法进行试验,也可运用有限元法进行电算,都能获得满意的成果。本文引用的电模拟资料是1983年对某工程的模型试验成果,与最近运用有限元法电算结果一致。

(二)由这两种方法均可以得到渗流浸润线和逸出点,渗流场内各点的水头、流速和流向;并可绘出等势线和流网,可以为工程设计提供必要的数据。

关于围堰的稳定,堰基是否出现管涌以及设置防渗墙的必要性等问题。应结合土料性质、颗粒组成,水文资料,施工条件等综合考虑。

(三)用有限单元法求解复杂的渗流问题,由于电算技术的发展而显示出独特的优点。可自动划分网格,显示浸润线、等势线和自动绘图等。液体电模拟试验是连续介质场,有便于观测,使用仪器设备简单等优点。前者属于数学模型,后者属于物理模型。就宏观而论,数学和物理模型的发展应是相辅相成的。

参 考 文 献

- (1) 水利水电科学研究院 南京水利科学研究院 《水工模型试验》 第二版 水利电力出版社1985年
- (2) 华东水利学院 《土工原理与计算》 上册 水利出版社 1980年
- (3) 朱伯芳著 《有限单元法原理与应用》 水利出版社

A STUDY TO THE PROBLEM OF THE FLOW OF SEEPAGE FOR COMPLICATED COFFERDAM

Wang Chung-tai

(Department of Hydraulic Engineering)

Abstract

This paper clarifies the hydraulic electric analogy experiment and the finite element method for solving the problem. The former needs simple instruments and has continuous medium field and the merit to make easy observation. The latter is newly developed electronic computing technique. Its best-merit is to give a rapid solution with high precision. This paper gives a reference and basis for the solution of the similar problem of seepage.

Key Words: phreatic line, point of egress, electric analog method, finite element method.