

# 自由表面流的数学模型

刘清朝

( 水利水电科学研究院 )

## 提 要

本文从纳维埃斯托克斯方程式出发,推出了准三维计算溢流坝面反弧段压力分布的精确方法,该方法和有限元法相比,具有计算简单,速度快且精度高的优点。

**关键词:** 溢流坝, 仍由表面, 水压力, 数学模型,

## 一、前 言

高水头溢流坝反弧段上的水力参数是工程设计中的必要数据,一般通过水工模型试验获得,但往往要花费较多的人力、物力和时间,这就限制了采用多种反弧曲线方案的比较的进度。因而研究满足精度的快速计算方法是必要的。

在以往的研究过程中,常用有限单元法来解溢流坝面反弧段的水力参数。因为自由表面是事先未知的,其位置本身是求解问题的一部分,如何处理自由水面边界是有限单元法计算该问题的困难问题之一。近几十年来,许多研究工作者为解决此问题而作的研究,主要可归结为两大类:

(一)先假定自由表面的位置,把问题当作已知固定边界的情况来计算,直到自由水面边界上各点满足条件为止<sup>[1][2][3][4]</sup>。

(二)依照可变域的变分原理,把自由水面位置坐标和各点函数数值都作为未知量,形成方程组时同时求解<sup>[5][6]</sup>。

但是,利用有限元法计算溢流坝面反弧段水力参数,无论是哪一类,都是按势流的拉普拉斯方程为基础,不计入阻力,把压强的求解和其它水利参数的求解分开,并且以有限的单元去逼近固体边界,把原有的光滑边界在计算过程中变为折线,这样对高速水流来讲,固体边界的凸凹对压力的计算的影响比较严重。所以,必有一些误差。因此,由有限元法计算的压力分布和实际情况有一定的出入,未能更好地反映实际压力的变化情况。

再者,利用有限元法,准备输入数据较多,计算中要解方程组,程序繁杂,计算时间长,这是它的不利之处。

本文为克服有限元法以上的缺点,给出了溢流坝面反弧段压力分布的半解析半数值解法。这种方法是沿曲线边界划分网格,不对边界产生任何歪曲。它是从纳维埃斯托克斯方程式出

本文1987年11月17日收到。

发, 推导出特定的空间水流的连续方程式和压力分布方程式, 把压力的求解和其余水力参数的求解相联合, 共同求解。它适用于计算无冲击波的曲面上的水流, 计算精度较高。

## 二、基 本 方 法

### (一) 压力方程式的推导

由不可压缩流体的N—S方程式的矢量形式:

$$\text{grad}(w + \frac{p}{\rho}) - \vec{T} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1)$$

式中:  $w$ ——质量力的势。

$p$ ,  $\vec{v}$ ——流场中某点的压强和流速矢量。

$\rho$ ——水的密度。

$\vec{T}$ ——粘滞力。

$t$ ——时间。

对于恒定流,  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  可表示为:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{u^2}{2} \right) \vec{\tau} + \frac{u^2}{r} \vec{n} \quad (2)$$

式中:  $l$ ——流线的弧长。

$r$ ——流线的曲率半径。

$u$ ——流速。

$\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ ——流线上某点的切向和法向单位矢量。

可以认为  $\vec{T}$  和  $\vec{v}$  共线, 将式(2)代入(1), 则:

$$-\text{grad}(w + \frac{p}{\rho}) = \left[ \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{u^2}{2} + T \right) \vec{\tau} + \frac{u^2}{r} \vec{n} \right] \quad (3)$$

将式(3)表示成空间正交坐标系  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  的投影形式, 得到:

$$-\frac{1}{L_i} \frac{\partial}{\partial \eta_i} (w + \frac{p}{\rho}) = \left[ \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{u^2}{2} + T \right) \cos(\vec{\tau}, \vec{e}_{\eta_i}) + \frac{u^2}{r} \cos(\vec{n}, \vec{e}_{\eta_i}) \right] \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

式中:  $\vec{e}_{\eta_i}$ ——曲线坐标轴  $\eta_i$  上的单位矢量。

$$L_i \text{——拉梅系数, } L_i = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \eta_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta_i} \right)^2}$$

式(4)对  $i=1, 2, 3$  分别乘上  $L_i d\eta_i$ , 然后相加得到  $p$  的全微分方程式:

$$-dp = \rho \sum_{i=1}^3 \left\{ L_i \frac{\partial w}{\partial \eta_i} + \left[ \frac{\partial}{\partial l} \left( -\frac{u^2}{2} \right) + T \right] \cos(\vec{\tau}, \vec{e}_{\eta_i}) + \frac{u^2}{r} \cos(\vec{n}, \vec{e}_{\eta_i}) \right\} L_i d\eta_i \quad (5)$$

建立正交坐标系: 取 $\eta_3$ 坐标轴与 $z$ 轴重合, 则 $L_3 \eta_3 = z$ ,  $L_3 d\eta_3 = dz$ , 如图1所示, 正交坐标系 $OSY_1Z$ ,  $S$ 是流线 $l$ 在 $xoy$ 平面上的投影,  $y_1$ 是和 $S$ 与 $Z$ 相正交的曲线坐标轴, 则 $L_1 d\eta_1 = ds$ ,  $L_2 d\eta_2 = dy_1$ , 又设质量力以重力为主, 则 $w = gz$ , 那么由以上坐标系可导出如下几何关系式:

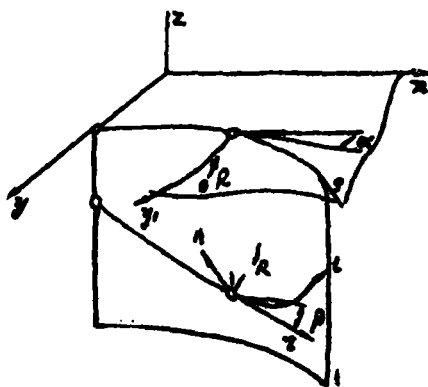


图1 OSY<sub>1</sub>Z正交坐标系示意图

式中:  $\rho_*$ ——流线 $l$ 在平面上投影的曲率半径。

$R$ ——柱面上流线 $l$ 同一点曲率半径。

$\alpha$ ——平面投影的切线与 $x$ 轴的夹角。

$\beta$ ——流线的切线与 $xoy$ 平面的夹角。

沿铅垂水深方向对压强分布方程式(5)进行积分, 可得:

$$p = p^* - \rho \int_{\eta^*}^{\eta} \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{L_i} \frac{\partial w}{\partial \eta_i} + \left[ \frac{\partial}{\partial l} \left( -\frac{u^2}{2} \right) + T \right] \cos(\vec{\tau}, \vec{e}_{\eta_i}) + \frac{u^2}{r} \cos(\vec{n}, \vec{e}_{\eta_i}) \right\} L_i d\eta_i \quad (7)$$

式中:  $p^*$ 为积分起始点的值。

取自由表面为积分起点, 式(7)沿水深方向积分, 考虑到建立的OSY<sub>1</sub>Z坐标系和式(6), 有:  $ds = 0$ ,  $dy_1 = 0$ , 那么:

$$p = p_0 + \rho gh - \rho g \int_{z_0}^z \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u^2}{2g} \right) \sin\beta \cos\beta + \frac{u^2}{rg} \cos\beta + \frac{T}{g} \sin\beta \right] dz \quad (8)$$

式中:  $p_0$ ——自由表面大气压强。

$z_0'$ ——垂线上自由水面高程。

$h = z_0' - z$ , 某点在自由水面以下的水深。

用 $\rho g L_0$  ( $L_0$ 是选定的无量纲化长度) 通除上式中各量, 将其化为无因次方程式, 并进行变换, 用 $h$ 代替 $z$ , 有:

$$p = p_0 + h + \int_0^h \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u^2}{2g} \right) \cos \beta \sin \beta + \frac{u^2}{g} \frac{\cos \beta}{r} + \frac{T \sin \beta}{g} \right] dh \quad (9)$$

又由流线的Bernoulli方程式:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{u^2}{2} \right) + T = \frac{\partial w}{\partial l} \quad \text{沿流线} l \text{积分:}$$

$$\frac{u^2}{g} = \frac{u_0^2}{g} - 2(z - z_0 + hT) \quad (10)$$

式中:  $hT = \frac{1}{g} \int_{l_0}^l T dl$  为阻力水头损失。

而对等宽溢流坝面而言, 流线在平面图上是平行的, 如果我建立如图2的 $oxyz$ 坐标系, 那么, 现在 $x$ 轴和 $s$ 轴重合,  $y_1$ 轴 $y$ 轴重合, 那么原坐标系 $osy_1z$ 就变成了现在的 $oxyz$ 了。由此, 有如下的关系式:

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{1}{r} &= \frac{1}{\cos^3 \beta} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}} \end{aligned} \right. \quad (11)$$

那么, 由式(11), (9)式可写为如下:

$$p = p_0 + h + \int_0^h \left\{ 0.5 \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1} + \frac{H \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{T \frac{\partial z}{\partial x}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} dh \quad (12)$$

式(12)就是最终计算用的水深向压强分布方程式。

## (二) 空间水流的连续方程式

反弧段内水流沿自由表面流线可划分为许多流片。如图3所示, 取计算的起始断面为1—1, 断面形状为矩形。如图4(a)所示, 流片宽度为 $\delta b_0$ , 通过的流量为 $\Delta Q_0$ 。

$$\Delta Q_0 = \delta b_0 \int_0^{h_0} u_0 \cos \beta_0 \cos \alpha_0 dh_0 \quad (13)$$

$\alpha_0, \beta_0$ 分别是流速矢量 $\vec{v}_0$ 与 $xoz$ 和 $xoy$ 平面的夹角。

流片流动一段距离后, 流片的断面变为图4(b)所示的形状。通过的流量为 $\Delta Q_1$ :

$$\Delta Q_1 = \int_0^{h_1} u_1 \cos \beta_1 \cos \alpha_1 \delta b_1 dh \quad (14)$$

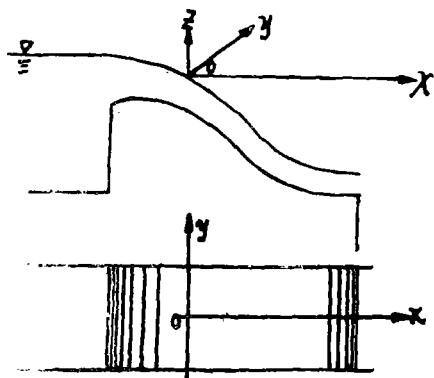


图2  $oxyz$ 坐标系

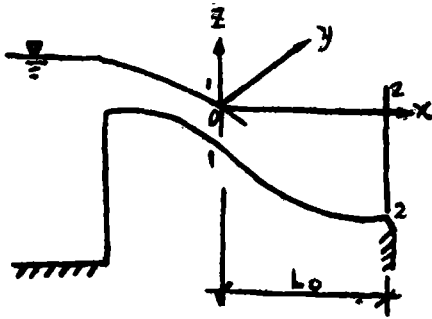


图3 计算起始和终了断面图

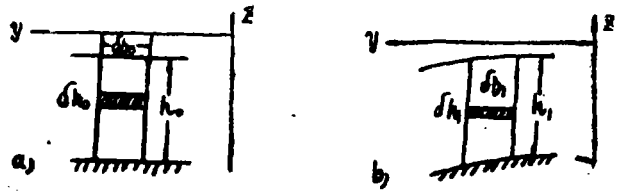


图4 流片侧表面图

1,  $\beta_1$  是该断面流速矢量  $\vec{v}$  和  $xoz$  与  $xoy$  平面的夹角。

以上是设  $\delta b_1$  沿水深不变, 这实际上是假设流片的侧面为一垂直面, 这对等宽溢流坝而言是正确的。

将流片自上而下均匀地划分为若干流层, 每一层水深为  $\delta h_0$ , 则每层可建立连续方程式如下:

$$u_0 \cos \beta_0 \cos \alpha_0 \delta b_0 \delta h_0 = u_1 \cos \beta_1 \cos \alpha_1 \delta b_1 \delta h_1 \quad (15)$$

$$\text{即: } \delta h_1 = \frac{u_0 \cos \beta_0 \cos \alpha_0 \delta b_0}{u_1 \cos \beta_1 \cos \alpha_1 \delta b_1} \delta h_0 \quad (16)$$

对于等宽反弧段,  $\begin{cases} \delta b_0 = \delta b_1 \\ \cos \alpha_0 = \cos \alpha = 1 \end{cases}$ , 则上式可改写为:

$$\delta h_1 = \frac{u_0 \cdot \cos \beta_0}{u_1 \cdot \cos \beta_1} \cdot \delta h_0 \quad (17)$$

用有关几何关系式代入上式, 并用  $L_0$  对它无量纲化, 有:

$$\delta h = \delta h_0 \sqrt{H_0} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} / \left( \sqrt{1 + i_0^2} \cdot \sqrt{H_0 - 2(z - z_0 + hT)} \right) \quad (18)$$

式中:  $i_0$ ——表示起始断面的底坡 ( $i_0 = \tan \beta_0$ )。

(18) 式就是空间弯曲水流连续方程式。

### (三) 初始自由表面的假设

由以上推求的方程式, 对假设的初始自由表面的准确程度要求不严格, 但是如果假设的初始自由表面和实际的自由表面比较接近, 那么在迭代计算的过程中, 达到要求的精度的迭代次数将减少, 而粗略的引入方式, 如初始自由表面上各点的高程按  $Z_0 = 0$  引入, 那么, 收敛性仍良好, 只是计算的时间较长而已。因此, 本文的计算过程中是按如下较准确的方式引入初始自由表面的。

$$z_s = z_b + h_0 \quad (19)$$

式中:  $z_s$ ——自由表面高程。

$z_b$ ——底部高程。

$h_0$ ——初始断面的水深。

#### (四) 水头损失的引入

本文的引入水头损失,是按谢才和满宁公式引入的:

$$dh_T = \frac{u^2}{c_2 R} dl = \frac{u^2 n^2}{R_1^{4/3}} dl \quad (20)$$

式中:  $n$ ——为固体边界的糙率。

$R_1$ ——水力半径。

$dl$ ——流线的弧长。

本文计算 $R_1$ 时,是按如下方式计入的:

在边墙且在底部的单元水体:

$$R_1 = \frac{\delta b \cdot \delta h}{\delta b + \delta h} \quad (21)$$

在边墙而不在底部的单元水体:

$$R_1 = \delta b \quad (22)$$

在底部而不在边墙处的单元水体:

$$R_1 = \delta h \quad (23)$$

在水体内部的单元水体

$$R_1 = +\infty \quad \text{即 } dh_T = 0 \quad (24)$$

#### (五) 计算步骤

由已知的初始断面水流参数,固体边界,利用式(10), (12), (18)进行迭代计算。首先,按(19)式假设一初始自由表面,由此可以由以上方程式计算出固体边界的高程,把计算出的底部高程和实际的底部高程相比较,从而对初始自由表面进行修正,直到二者的差达到给定的精度为止。具体计算步骤如下:

(1) 如图5所示,将水流用垂直向下的平面分为若干流片和若干段,其长度分别为 $dy$ 和 $dx$ 。

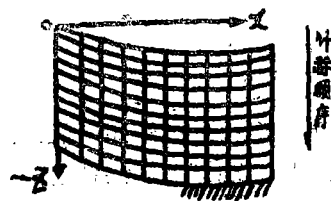


图5 计算网格与顺序图

(2) 按(19)式假定初始自由表面的位置。

(3) 计算过程中,积分被数值积分代替,微分导数用等距七点无差差分代替,由式(10), (12), (18)式联合计算,求解底部高程。

(4) 由差值 $\Delta Z - Z_b$ 已知 $-Z_b$ 计算作为初设自由表面的修正量,重新计算,直到 $|\Delta Z| < \epsilon_1$ ,  $|\Delta p| < \epsilon_2$ 为止。

### 三、计算实例及其结果分析

为了验证本文的计算方法,采用了二个算例,以资和实测资料及有限元法的计算结果对比。第一个算例如图6所示,取自于文献[7]中。水头 $H_0$ 为3.37米,单宽流量为0.52平方米/秒,

反弧段起始断面的坡度为1.0, 反弧半径为2.0米。计算结果示于同一张图6上。算例2是取自文献[8]中的算例, 如图7所示。水头 $H_0$ 为91.5米, 单宽流量为91.1平方米/秒。两段反弧的半径均为50米, 算的结果示于同一张图上。计算中取固体边界的糙率系数 $n$ 为0.017。

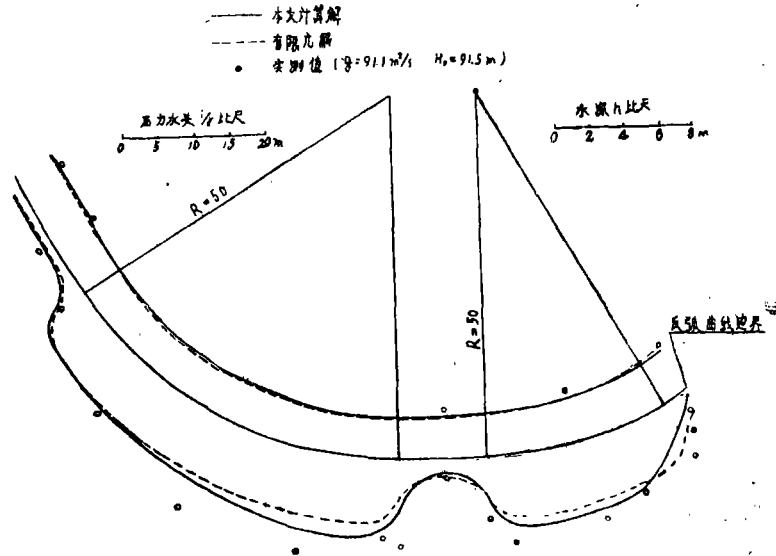


图6 算例1

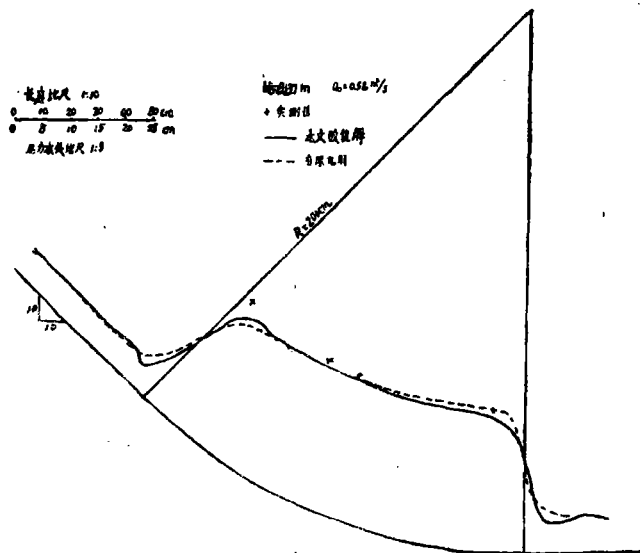


图7 算例2

由图6及图7可见, 采用本文的计算方法所算的结果更接近于实测资料。另外, 计算的水面线基本相符, 二种方法计算的结果差别不大。因此, 由以上可见, 说明了本文的方法的可行性和可用性。

以上的计算是在IBM—4381机用FORTRAN77编制的程序,进而调试计算的。而对等宽溢流坝而言可按二维处理。因此,计算中只须计算一个流片。本文计算中取 $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-5}$ , 计算一个算例约需六秒钟左右。由此可见,用该方法计算同一问题所需的时间比有限元法大为缩短。因此,便于工程上的应用。

#### 四、结 论

- 1、本文给出的计算溢流坝反弧段水力参数的一种新方法,它的应用简便,计算精度高。
- 2、本文计入阻力的方式有待进一步改进。

本文曾得陈椿庭高级工程师,陈肇和教授,李桂芬高级工程师的指导,谨致谢意。

#### 参 考 文 献

- [1] MARCO.CASTRO—DELGADO  
Analysis of Free—Surface flows past overflow gates using Finite element method,  
Computers and fluids, Vol 14, No 2, 1986.
- [2] 丁道杨, 具有未知流量的二孔口水流的数学模型, 水利水运科学研究, 1981, 2.
- [3] Chan S.T.K, LaRock B.E  
Free—Surface ideal fluid flows by finite elements ASCE, HY.6 1973
- [4] T.J.Chung FE Analysis in fluid dynamics, 1978.
- [5] 水电部水利调度研究所, 乌江渡水电站右泄洪洞溢流面压力分布的有限元法计算, 1976, 1.
- [6] EROL Varoglu and W.D LIAN FINN  
Variable domain FE Analysis of free Surface gravity flow. Computers and fluids Vol.6 1978.
- [7] 水利电力部第十一工程局勘测设计研究院, 溢流坝反弧段水力特性的有限单元法分析, 1985.5.
- [8] 水利电力部 交通部 南京水利科学研究院 有限单元法在溢流坝反弧段水力计算中的应用. 1976.11.

## THE MATHEMATICAL MODELS OF FREE SURFACE S FLOW

Lin Qingchao

( Water Resources and Hydropower Academy of Science )

#### Abstract.

In this paper, The Three—dimensional precision method from equation of Navestokes the overfall dam surface on top of pressure distribution from ogee segmental arc has been computed. The new method can give acceptable results to the finith element method is easy to use. Example problems indicate that results are quite accurate.

**Key wards:** Overfall dam, Free surfaces, Water pressure,  
Mathematical models