塔设备动力特性的有限元分析

刘敏珊　　董其伍

（数力系）　　（化工系）

提　要

对于石油、化工厂中的塔器，输电线塔、电视塔、烟囱这类悬臂杆型高耸结构进行动力分析是十分必要的。本文应用有限单元法，对塔器进行了动特性分析，与理论解进行了比较，有效地提高了塔器动特性的计算精度。这为塔器的强度和稳定性分析，使用寿命予估，优化设计提供了参考数据。

关键词：塔器，　动态特性，　有限元。

一、引　言

当前，人们对结构的动态特性日益重视，分析结构对于动态载荷的响应变得越来越重要，受风和地震载荷作用下的高层建筑和高耸结构（如塔器、电视塔、高压输电线塔等）的设计都对结构动态分析提出新的要求。因此，结构的动力分析在工程中占有十分重要的地位，确是不可缺少的一环。它不仅能为新结构的设计，而且为结构的动力可靠性分析（随机动力可靠性分析和模糊动力可靠性分析）提供科学数据。还可以判定原结构的设计是否合理，以证保优化设计的可靠性和完善性。

二、结构系统的运动方程式

在结构的动力分析中，求解结构的固有频率和振动模态是其主要的内容。我们利用虚位移原理以有限元法推导弹性体结构的运动方程式。首先将结构理想化，离散化，即将结构分割成有限个单元的组合体。

假定单元内任意点位移$\{s\}$，得到虚位移$\{\delta s\}$，且结构内部产生和$\{\delta s\}$相协调的虚应变$\{\delta\varepsilon\}$，对于一个已知的瞬态应力分布$\{\sigma\}$，可计算结构在给定瞬时的虚应变能为：

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dv \tag{1}$$

外力的虚功

$$\delta w + \delta w_1 = -\int_V \rho\{\delta s\}^T\{\ddot{s}\}dv - \int_V \gamma\{\delta s\}^T\{\dot{s}\}dv + \delta w \tag{2}$$

根据虚位移原理：

$$\delta \upsilon = \delta w + \delta w_1$$

δw_1——惯性力，阻尼力所做虚功，δw——外力虚功

本文1987年6月15日收到。

$$\int_v\{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dv=\int_v\{ds\}^TFdv+\{\delta q\}^T\rho-\int_v\rho\{\delta s\}^T\{\ddot{s}\}dv$$
$$-\int_v\gamma\{ds\}^T\{\dot{s}\}dv \tag{3}$$

因为　$\{s\}=[N]\{q\}$　　$\{\varepsilon\}=[A]\{q\}$

$\{\delta s\}=[N]\{\delta q\}$　　$\{\delta\varepsilon\}=[A]\{q\}$

$\{q\}$——整个系统的节点位移列阵

代入可得：

$$\int_v\{\delta q\}^T[A]^T[D][A]\{q\}dv=\int_v\{\delta q\}^T[N]^TFdv+\{\delta q\}^T\rho$$
$$-\int_v\rho\{\delta q\}^T[N]^T\{\ddot{s}\}dv-\int_v\gamma\{\delta q\}^T[N]^T\{\dot{s}\}dv \tag{4}$$

$[D]$——弹性矩阵

等式两边消去$\{\delta q\}^T$

$[\dot{s}]=[N]\{\dot{q}\}$　　$\{\ddot{s}\}=[N]\{\ddot{q}\}$

$$\therefore\quad\int_v[A]^T[D][A]\{q\}dv+\int_v[N]^T\gamma[N]\{\dot{q}\}dv$$
$$+\int_v[N]\rho[N]\{\ddot{q}\}dv=p+\int_v[N]^TFdv \tag{5}$$

其中：

$[c]=\int_v[N]^T\gamma[N]dv$——单元的阻尼矩阵

$[M]=\int_v[N]^T\rho[N]dv$——单元质量矩阵

$[K]=\int_v[A]^T[D][A]dv$——单元刚变矩阵

p——集中力的列阵

$\int_v[N]^T\gamma[N]dv$——体积力引起的等效集中力

则（5）式写为

$$[K]\{q\}+[C]\{\dot{q}\}+[M]\{\ddot{q}\}=P+\int_v[N]^TFdv \tag{6}$$

在动力问题中，形函数$[N]$要考虑w的影响，即N（x，y，z，w）

计算经验表明，结构的阻尼对结构的频率和振型影响不大，所以求频率和振型时可以不考虑阻尼的影响，对于无阻尼的自由振动：

$[C]=0$　　$P=0$（不考虑体积力的作用时）

运动方程（6）变为：

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=0 \tag{7}$$

由于自由振动是简谐的，则位移可以写成

$$\{q\}=\{\delta\}e^{i\omega t} \tag{8}$$

$\{\delta\}$——是位移$\{q\}$的振幅列阵

$$\{\ddot{q}\}=-\omega^2\{\delta\}e^{i\omega t}$$

所以得

$$(-\omega^2[M]+[K])\{\delta\}=0 \tag{9}$$

令　$\lambda=\omega^2$

则得到结构系统的运动方程式

$$[K-\lambda M]\{\delta\}=0 \tag{10}$$

利用系统的特征方程

$$|K-\lambda M|=0 \tag{11}$$

可以得到结构系统的固有频率和振动模态。

三、动特性分析

本文以变截面乙苯一苯乙烯蒸馏塔为研究对象，由于$\frac{h}{D}\gg15$，故可将塔器简化为悬臂杆系结构。利用有限单元法将塔器离散化为31个二维梁单元。

塔器的简化力学模型如图1

（一）在弯曲情况下：

1、形状函数的计算

令梁单元中单元节点广义位移向量为：

$[\delta]^e=[v, \theta_i, v_j, \theta_j]^T$

若广义位移为δ_1，δ_2，δ_3，δ_4

$$\text{则}[\delta]^e=\begin{pmatrix}1 & x_i & x_i^2 & x_i^3\\ 0 & 1 & 2x_i & 3x_i^2\\ 1 & x_j & x_j^2 & x_j^3\\ 0 & 1 & 2x_j & 3x_j^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=[B][\alpha] \tag{12}$$

$$V(x)=[N][\delta]^e \tag{13}$$

$$[N]=[N_1, N_2, N_3, N_4] \tag{14}$$

$V(x)$——横向位移

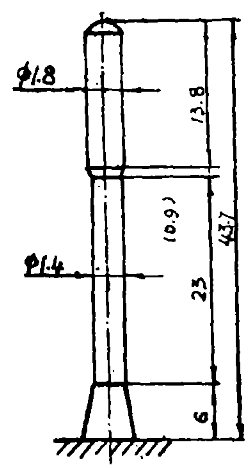

图1　塔器的力学模型

$[N]$——形函数

可得出形状函数为：

$$\begin{cases}N_1(x)=1-3\dfrac{x^2}{l^2}+2\dfrac{x^3}{l^3}\\ N_2(x)=x-2\dfrac{x^2}{l}+\dfrac{x^3}{l^2}\end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} N_3(x) = \dfrac{3x^2}{l^2} - 2\dfrac{x^3}{l^3} \\ N_4(x) = -\dfrac{x^2}{l} + \dfrac{x^3}{l^2} \end{cases}$$

在动力问题中，位移是时间的函数，其横向位移为：

$$V(x, t) = \sum_{i=1}^{4} N_i(x)\delta_i(t) \tag{16}$$

2、单元质量矩阵的计算

梁单元的质量矩阵为：

$$[m]^e = \int_0^l m[N]^T[N]dx \tag{17}$$

$$= m\int_0^l \begin{bmatrix} N_1 & N_1N_2 & N_1N_3 & N_1N_4 \\ N_2N_1 & N_2^2 & N_2N_3 & N_2N_4 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & N_3^2 & N_3N_4 \\ N_4N_1 & N_4N_2 & N_4N_3 & N_4^2 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{ml}{420}\begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

3、单元的刚度矩阵

$$[K]^e = \begin{bmatrix} \dfrac{12EJ}{l^3} & & \text{对} & \\ \dfrac{6EJ}{l^2} & \dfrac{4EJ}{l} & & \\ \dfrac{-12EJ}{l^3} & \dfrac{-6EJ}{l^2} & \dfrac{12EJ}{l^3} & \text{称} \\ \dfrac{6EJ}{l^2} & \dfrac{2EJ}{l} & \dfrac{-6EJ}{l^2} & \dfrac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \tag{16}$$

（二）在轴向拉压的情况下：

位移 $\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

取 $u(x) = u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x)$ (20)

$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 取静态形函数

$$\begin{cases}\varphi_1(x)=1-\dfrac{x}{l}\\[2mm]\varphi_2(x)=\dfrac{x}{l}\end{cases}$$

$$\therefore\quad u(x)=\left[1-\frac{x}{l}\quad \frac{x}{l}\right]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}\tag{21}$$

$$N(x)=\left[1-\frac{x}{l}\quad \frac{x}{l}\right]$$

$$[K]^{f}=\int_0^l EA[N^1][N^1]^T dx\tag{22}$$

$$[m]^{f}=\int_0^l m[N][N]^T dx\tag{23}$$

积分

$$[K]^f=\frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix}Al^2/J & -Al^2/J\\ -Al^2/J & Al^2/J\end{bmatrix}\tag{24}$$

$$[m]^f=\frac{ml}{420}\begin{bmatrix}140 & 70\\ 70 & 140\end{bmatrix}\tag{25}$$

4、由于横向位移与轴向位移的独立性（非耦合）， 故可用迭加原理来求单元刚度阵与质量阵。

设$\{u\}=\{u_i\ \ v_i\ \ \theta_i\ \ u_j\ \ v_j\ \ \theta_j\}^T$

刚变阵为：

$$[K]=\frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix}Al^2/J & 0 & 0 & -Al^2/J & 0 & 0\\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l\\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2\\ -Al^2/J & 0 & 0 & Al^2/J & 0 & 0\\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l\\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2\end{bmatrix}\tag{26}$$

$$[m]=\frac{ml}{420}\begin{bmatrix}140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0\\ 0 & 156 & -22l & 0 & 54 & 13l\\ 0 & -22l & 4l^2 & 0 & -13l & -3l^2\\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0\\ 0 & 54 & -13l & 0 & 156 & 22l\\ 0 & 13l & -3l^2 & 0 & 22l & 4l^2\end{bmatrix}\tag{26}$$

其中　A＝横截面积　　　　J＝横截面惯性矩

　　　l＝单元长度　　　　m＝单元质量

由单元刚度阵和质量阵组集全结构总刚阵〔K〕和总质量阵〔M〕。

我们采用FORTRAN语言，编制了有限元计算程序，得到了塔器的前八阶固有频率和振型模态，见图2和表1。

表1　塔器前八阶固有频率

	一阶	二阶	三阶	四阶	五阶	六阶	七阶	八阶
频　率	0.3305	2.2410	6.555	12.910	17.55	20.76	30.67	43.33

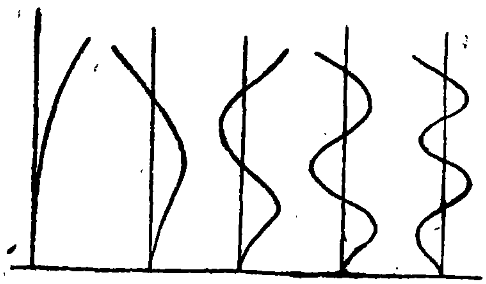

图2　塔器前五阶弯曲振型图

四、塔器的位移响应

风是建筑物的侧向载荷之一，对于高耸结构侧向载荷引起的响应在总载荷中占有相当大的比重，甚至起着决定性的作用。当塔器受风荷作用时，除了由于顺风向脉动风产生振动外，在横风向由于升力作用，也会引起横向风振，同时外扭矩还将引起扭转振动。对于顺风向脉动风和横风向脉动风，应用随机振动理论讨论顺风向随机风振响应和横风向随机风振响应。对于横风向周期性的风力或引起扭转振动的外扭矩通常作为确定性荷载对结构进行动力计算。当雷诺数Re处于$3\times10^2<Re<3\times10^5$属于亚临界（Subcritical）范围，在这个旋涡以一个相当明确的频率周期性地脱落，横风向振动将是有规则地接近周期性振动。当雷诺数$Re<3.5\times10^6$即跨临界（transcritical）范围振动也呈现周期性的，故在亚临界，跨临界范围可采用周期性载荷研究塔器的位移响应。

对于线性振动，进行实际计算时，无须用结构的全部振型迭加，可采用振型的截断处理，因在风荷作用下，既使高柔结构一般也是以基本振型进行振动，第一振型贡献最大，其次是2、3……振型的贡献，更高阶振型几乎无影响，因此实际应用振型叠加法时，通常仅取结构前若干阶振型迭加即可，对于塔器的响应计算我们仅取了前五阶振型叠加。

通过计算机的实现我们得到了塔器在横向风作用下的位移响应和位移响应历程。如图3、图4所示。

五、结果分析与讨论

（1）通过计算机的实现我们仅选取了前八阶固有频率和振型，包括纵向，弯曲和扭转三种振型。

（2）对于高耸结构一般只考虑前三阶振型的影响，只有在讨论地震响应时才考虑高阶振型的影响。因此，我们只讨论低阶固有频率与振型，第一阶振型起着决定性的作用。在实际应用振型叠加法时，通常仅取结构前若干阶振型迭加即可，对于塔器的响应计算仅取了前五阶振型的叠加。

（3）本文又将结构离散化为空间三维梁单元，同样得到了前八阶固有频率和相应地呈

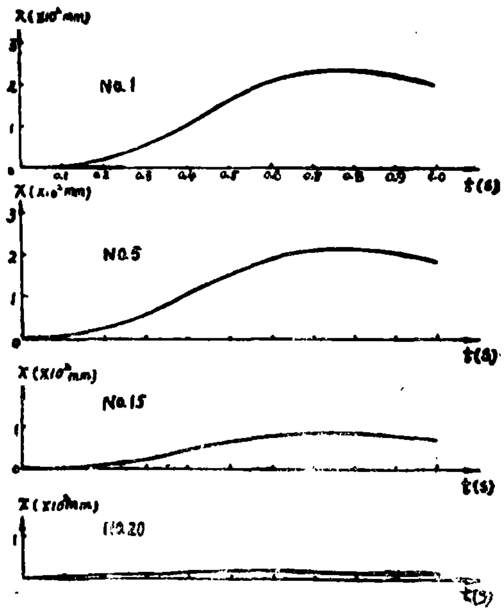

图3　部分节点位移响应历程

现出横向、纵向、扭转、竖向等五种振型。结果与振型图略。

(4)由风引起的卡门旋涡周期恰与塔器的第一振型周期合拍而引起共振的风速为第一临界风速，使塔器发生诱导共振，$V_{风}=\dfrac{5D}{Tc}$。由于两种方法计算所得自振周期的不同，相应地第一临界风速是有差异的。我们认为有限元解是比较合理的。说明本文的方法和相应地计算程序具有满意的精确度。

(5) 本文仅讨论了横向风所引起的塔设备的横向风振响应，我们今后将陆续应用随机振动理论研究塔设备的顺风向脉动风和横风向脉动风的风振响应。

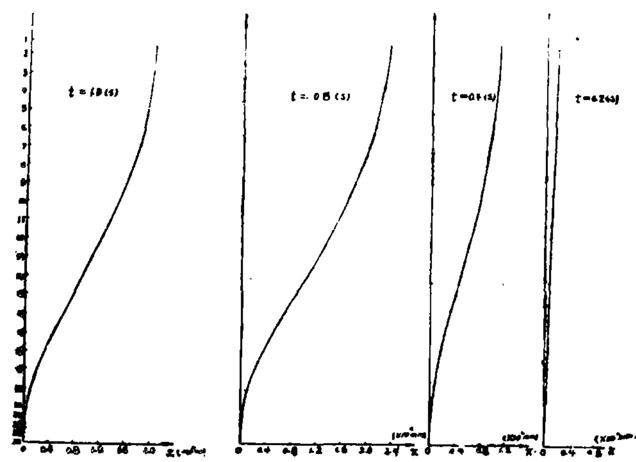

图4　塔的位移响应

参　考　文　献

〔1〕 Leonard Meirovith, Computational Methods in structural Dynamics, Sijthoff & Noovdhoff 1984.

〔2〕 R.Roy.Jr Craig. Structural Dynamics—An Introduction to Computer Methods, John Wiley & Sons.1981

〔3〕 O.C.Zienkicuicz, The Finite Element Method, Mc—GRAW—HILL, 1977.

〔4〕 K.J.Bathe, R.W.Clough, Finite.Element Analysis of Dynmaic Response, 固体力学中的有限元素法译文集，科学出版社.1977.

〔5〕 R.W.Clough, J.Jonzion　王光远等译，结构动力学，科学出版社。

ANALYSIS OF DYNAMIC CHARACTERISTIC FOR TOWER

Liu Min Shan
(Dept.of Mathematics and Mechanics)
Dong Qi Wu
(Dept.of Chemical Engineering)

Abstract

It is important to calculate structure frequency and mode in the dynamic analysis of structures especially in the stand tall and erect structure of cantilever bar as such tower chimney tower of transmission elecfric wire and television tower.

In this article, analysis of dynamic characteristic is carried out by finite element method and calcultating precision of dynamic characteristic for tower is improved efficiently.

Keywords: Tower, Dynamic Characteristic, finite element.