郑　州　工　学　院　学　报

第9卷 第4期　JOURNAL OF ZHENGZHOU INSTITUTE　VOl.9, NO.4

1988年12月　OF TECHNOLOGY　December 1988

基于应变余能的$\dot{J}$积分

韩连元　丁遂栋

（数力系）

提　要：本文提出基于应变余能的$\dot{J}$积分，证明了$\dot{J}$积分回路定义的守恒性，论述了$\dot{J}$积分作为弹塑性断裂判据的有效性，同时还提出$\dot{J}$积分形变功率定义的表达式。

关键词：裂纹，断裂判据，$\dot{J}$积分

J积分是弹塑性断裂力学中一个十分重要的参量，它反映了裂纹尖端的某种力学特性或应力应变场强度。但是在讨论时，一般假定在裂纹表面无载荷作用。本文提出一种与J积分并行的新的积分表达式，这里命名为$\dot{J}$积分，它既具有J积分的全部优点，又较J积分有更广的适用范围。

1　$\dot{J}$积分的回路定义及其守恒性

对于二维问题，$\dot{J}$积分定义为如下的回路线积分。（见图1）

$$\dot{J}=\int_{\Gamma}\left(wdy-u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}\right)ds \qquad (1-1)$$

其中　Γ——围绕裂纹尖端的一条任意反时针回路，起端始于裂纹下表面，末端终于裂纹上表面。

W——回路Γ上任一点（x，y）处的应变余能密度。$W=\int \varepsilon_{ij}d\sigma_{ij}$

T_i——回路Γ上任一点（x，y）处的应力分量。

u_i——回路Γ上任一点（x，y）处的位移分量。

ds——回路Γ上的弧元。

下面证明$\dot{J}$积分的守恒性。

设分别有两个积分回路Γ和Γ'（见图1），

$\dot{J}$积分的守恒性就意味着应有下列恒等式

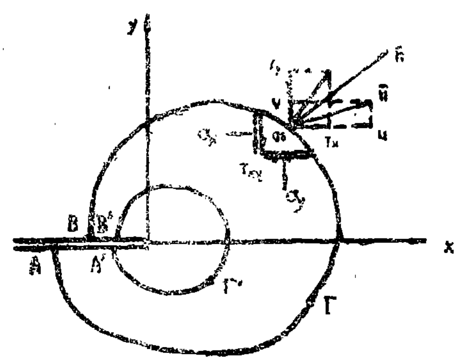

图1

$$\int_{\Gamma}\left(w\,dy-u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds\right)=\int_{\Gamma'}\left(w\,dy-u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds\right) \qquad (1-2)$$

为证明（1—2）成立，首先证明对任一闭合回路C（即回路ABB′A′A）积分为零，即

$$\oint_C\left(w\,dy-u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds\right)=0 \qquad (1-3)$$

对式中第一项积分，由格林公式，得

$$\oint_C w\,dy=\iint_D\frac{\partial w}{\partial x}dx\,dy=\iint_D\frac{\partial w}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x}dx\,dy$$

因为 $\varepsilon_{ij}=\dfrac{\partial w}{\partial\sigma_{ij}}$ 故

$$\oint_C w\,dx\,dy=\iint_D\varepsilon_{ij}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x}dx\,dy \qquad (1-4)$$

式（1—3）中的第二项积分，为

$$\oint_C u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds=\oint_C\left(u\frac{\partial T_x}{\partial x}+v\frac{\partial T_y}{\partial x}\right)ds \qquad (1-5)$$

由力的边界条件

$$\begin{cases}T_x=l\sigma_x+m\tau_{xy}\\ T_y=l\tau_{xy}+m\sigma_y\end{cases} \qquad (1-6)$$

及 $l=dy/ds$ $m=-dx/ds$，（1—5）式变为

$$\oint_C u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds=\oint_C\left[\left(u\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+v\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\right)dy-\left(u\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+v\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)dx\right] \qquad (1-7)$$

利用格林公式，得

$$\oint_C u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds=\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right.$$

$$\left.+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)+v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)\right]dx\,dy \qquad (1-8)$$

考虑到弹性力学平面问题的几何方程

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad r_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

及不计体力时的平衡微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0\end{cases}$$

（1—8）式变为

$$\oint_C u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds=\iint_D\left(\varepsilon_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\varepsilon_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+r_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\right)dxdy$$

即

$$\oint_C u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds=\iint_D\varepsilon_{ij}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x}dxdy \qquad (1-9)$$

将式（1—4）和（1—9）代入式（1—3），得

$$\oint_C\left(wdy-u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds\right)=0$$

注意到闭合回路C是由r和r′以及裂纹表面组成(即$\overset{\frown}{AB}+\overline{BB'}+\overset{\frown}{B'A'}+\overline{A'A}$)，又注意到在裂纹面$\overline{BB'}$和$\overline{A'A}$上，$dy=0$，当裂纹面上无载荷作用或有均布载荷时，$\partial T_i/\partial x=0$可见只有$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{B'A'}$对积分有贡献，于是

$$\oint_C\left(wdy-u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds\right)=\int_r\left(wdy-u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds\right)-\int_{r'}\left(wdy-u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds\right)=0$$

或

$$\int_r\left(wdy-u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds\right)=\int_{r'}\left(wdy-u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds\right)$$

由此可见，$\mathring{J}$积分是守恒的。

应该指出，基于应变余能的关系式（1—3），不仅适用于弹性变形，而且适应于弹塑性变形。但对弹塑性体不允许发生卸载，以保证ε_{ij}与σ_{ij}唯一确定，ε_{ij}应理解为全应变分量，W为弹性应变余能与塑性应变余能之和。

值得注意的是，如果在闭合回路C中有大应变区，应力应变方程中将增加一些二次项，$\mathring{J}$积分的与线无关性就不能得到严格证明。

2 $\mathring{J}$积分判据及其有效性

要使$\mathring{J}$积分成为断裂判据的有效参量，裂纹尖端地区的应力应变场强度必须有$\mathring{J}$积分值唯一确定。只有这样，当裂纹尖端的应力应变场达到使裂纹开始扩展的临界状态时，

$\dot{J}$积分也达到相应的临界值 $\dot{J}_{IC}$，而与试样尺寸和加载方式无关，于是$\dot{J}$积分判据可表示为

$$\dot{J}=\dot{J}_{IC} \tag{2—1}$$

2·1 线弹性（或小范围屈服）情况

这里主要讨论对平面应变的I型断裂问题中$\dot{J}$积分与裂纹尖端应力强度因子K_1的关系。裂纹尖端区域的应力场

$$\begin{cases} \sigma_x=\dfrac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\theta\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y=\dfrac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\theta\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_z=\dfrac{2\mu K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2} \\ \tau_{xy}=\dfrac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\dfrac{3\theta}{2}\right) \end{cases} \tag{2—2}$$

位移场

$$\begin{cases} u=\dfrac{2(1+\mu)K_1}{E}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\left[(1-2\mu)\cos\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\theta\sin\dfrac{\theta}{2}\right] \\ v=\dfrac{2(1+\mu)K_1}{E}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\left[(2-2\mu)\sin\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\dfrac{\theta}{2}\right] \end{cases} \tag{2—3}$$

将式（2—2）代入式（1—6），得

$$\begin{cases} T_x=\dfrac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\left[\left(\cos\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\theta\sin\dfrac{3\theta}{2}\right)l+\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\dfrac{3\theta}{2}\right)m\right] \\ T_y=\dfrac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\left[\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\dfrac{3\theta}{2}\right)l+\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\theta\sin\dfrac{3\theta}{2}\right)m\right] \end{cases} \tag{2—4}$$

由直角坐标与极坐标关系 $\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial r}\cos\theta-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta$，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T_x}{\partial x}=\dfrac{K_1}{\sqrt{2\pi r^3}}\left[-\frac{1}{2}\cos^2\theta\cos\dfrac{\theta}{2}+\frac{3}{4}\sin\theta\sin\dfrac{3\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\sin\dfrac{\theta}{2}\right]\\[2ex]\dfrac{\partial T_y}{\partial x}=\dfrac{K_1}{\sqrt{2\pi r^3}}\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\sin\dfrac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\cos\dfrac{\theta}{2}-\frac{3}{4}\sin\theta\cos\dfrac{3\theta}{2}\right]\end{cases}$$

（2—5）

将式（2—3）及（2—5）代入式（1—1）中的第二项积分，经简化计算可得

$$\int_\Gamma u^i\frac{\partial T_i}{\partial x}ds=\int_{-\pi}^{\pi}\left(u\frac{\partial T_x}{\partial x}+v\frac{\partial T_y}{\partial x}\right)rd\theta=\frac{(5-6\mu)(1+\mu)}{4E}K_1^2$$

（2—6）

由线弹性状态平面应变条件下，应变余能密度

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}=\frac{1+\mu}{2E}\left[(1-\mu)(\sigma_x^2+\sigma_y^2)-2\mu\sigma_x\sigma_y+2\tau_{xy}^2\right]$$

（2—7）

将式（2—2）代入式（2—7），经化简可得

$$W=\frac{(1+\mu)K_1^2}{4E\pi r}\left[2(1-2\mu)\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\qquad(2—8)$$

将式（2—8）代入（1—1）式中的第一项积分，得

$$\int_\Gamma W dy=\int_{-\pi}^{\pi}Wr\cos\theta d\theta=\frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{4E}K_1^2\qquad(2—9)$$

将式（2—6）及（2—9）代入式（1—1），得

$$\dot{J}=-\frac{1-\mu^2}{E}K_1^2\qquad(2—10)$$

由　$J=\dfrac{1-\mu^2}{E}K_1^2=G_1$　关系

可见　$\dot{J}=-J_1=-G_1$　（2—11）

对于平面应力情况或Ⅱ型、Ⅲ型断裂问题也可用类似的方法得到类似的关系，这里不作详述。

由上述可见，在线弹性（或小范围屈服）情况下，$\dot{J}$积分与应力强度因子K和裂纹扩

展力G之间有确定的关系，因此，$\dot{J}$积分和K、G一样能够反映出裂纹尖端应力应变场的奇异性，这样，$\dot{J}=\dot{J}_c$与$K=K_c$，$G=G_c$完全等效，可以作为一种断裂判据。

2·2 弹塑性情况

由塑性理论中全量理论的基本假设，对复杂应力状态，根据单一曲线假定，有

弹性阶段：　$\sigma_i=E\varepsilon_i$　　(2—12)

弹塑性阶段：　$\sigma_i=E'\varepsilon_i$　　(2—13)

其中　$E'=\mathrm{tg}\,\alpha=\sigma/\varepsilon$　称为割线弹性模量(图2)

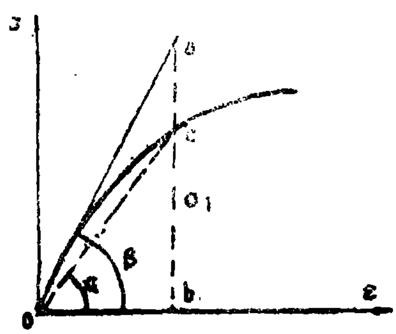

图2

由图2看出，$\sigma_i=\overline{ab}(1-\overline{ac}/\overline{ab})$，若令$\overline{ab}=E\varepsilon_i$，$\overline{ac}/\overline{ab}=E\varepsilon_i f(\varepsilon_i)$，则有

$$\sigma_i=E\varepsilon_i[1-f(\varepsilon_i)]\qquad(2—14)$$

式中　E为弹性模量，σ_i为应力强度，ε_i为应变强度，$f(\varepsilon_i)$为某一函数，可由实验确定。

假定材料为幂硬化材料，令式(2—14)中

$$f(\varepsilon_i)=1-A\varepsilon^{n-1}/E$$

则　$\sigma_i=A\varepsilon_i^n$　　(2—15)

代入(2—13)式，得

$$E'=A\varepsilon_i^{n-1}=A\varepsilon_i^n\varepsilon_i^{-1}=A\varepsilon_i^n(A/\sigma_i)^{1/n}=\sigma_i(A/\sigma_i)^{1/n}$$

为方便起见，令$\alpha=1/n$，α为材料的幂硬化指数，则

$$E'=A^{\alpha}\sigma^{(1-\alpha)}\qquad(2—16)$$

采用极坐标表示裂纹尖端区域的应力应变场，由直角坐标与极坐标之间的关系，得

$$\begin{cases}\sigma_r=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\\[2ex]\sigma_\theta=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\\[2ex]\tau_{r\theta}=-\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\end{cases}\qquad(2—17)$$

平衡微分方程(不计体力)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\\[2ex]\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\dfrac{2\tau_{r\theta}}{r}=0\end{cases}\qquad(2-18)$$

几何方程为

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ r_{r\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r} \end{cases} \tag{2-19}$$

物理方程

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E'}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{E'}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) \\ r_{r\theta} = \dfrac{1}{G'}\tau_{r\theta} = \dfrac{3}{E'}\tau_{r\theta} \end{cases} \tag{2-20}$$

将式（2—16）代入式（2—20），得

$$\begin{cases} \varepsilon_r = A^{(-\alpha)}\sigma_i^{(\alpha-1)}(\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta = A^{(-\alpha)}\sigma_i^{(\alpha-1)}(\sigma_\theta - \frac{1}{2}\sigma_r) \\ r_{r\theta} = 3A^{(-\alpha)}\sigma_i^{(\alpha-1)}\tau_{r\theta} \end{cases} \tag{2-21}$$

对裂纹尖端区域的应力场，若取应力函数为

$$\varphi = kr^C\tilde{\varphi} \tag{2-22}$$

其中 $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\theta)$，c、k为待定常数。

边界条件

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^0 \qquad \theta = \pm\pi \tag{2-23}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 \qquad \theta = \pm\pi \tag{2-24}$$

由（2—17）式，得

$$\begin{cases} \sigma_r = kr^{C-2}(c\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}'') = kr^{C-2}\tilde{\sigma}_r \\ \sigma_\theta = kr^{C-2}c(c-1)\tilde{\varphi} = kr^{C-2}\tilde{\sigma}_\theta \\ \tau_{r\theta} = kr^{C-2}(1-c)\tilde{\varphi}' = kr^{C-2}\tilde{\tau}_{r\theta} \\ \sigma i = kr^{C-2}\sqrt{\tilde{\sigma}_r^2 + \tilde{\sigma}_\theta^2 - \tilde{\sigma}_r\tilde{\sigma}_\theta + 3\tilde{\tau}_{r\theta}^2} = kr^{C-2}\tilde{\sigma} i \end{cases} \tag{2-25}$$

由式（2—21），得

$$\left\{\begin{aligned}\varepsilon_r&=A^{(-\alpha)}k^{\alpha}r^{(C-2/n)}\tilde{\sigma}_i^{(\alpha-1)}\left(\tilde{\sigma}_r-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_\theta\right)\\&=A^{(-\alpha)}k^{\alpha}r^{(C-2/n)}\tilde{\varepsilon}_r\\\varepsilon_\theta&=A^{(-\alpha)}k^{\alpha}r^{(C-\alpha/n)}\tilde{\sigma}_i^{(\alpha-1)}\left(\tilde{\sigma}_\theta-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_r\right)\\&=A^{(-\alpha)}k^{\alpha}r^{(C-2/n)}\tilde{\varepsilon}_\theta\\r_{r\theta}&=3A^{(-\alpha)}k^{\alpha}r^{(C-2/n)}\tilde{\sigma}_i^{(\alpha-1)}\tilde{\tau}_{r\theta}\\&=3A^{(-\alpha)}k^{\alpha}r^{(C-2/n)}\tilde{r}_{r\theta}\end{aligned}\right.\qquad(2-26)$$

由式（2—19）得

$$\left\{\begin{aligned}u_r&=A^{(-\alpha)}k^{\alpha}r^{(C-2/n)+1}\frac{n\tilde{\varepsilon}_r}{C-2+n}A^{(-\alpha)}k^{\alpha}r^{(C-2/n)+1}\tilde{u}_r\\u_\theta&=A^{(-\alpha)}k^{\alpha}r^{(C-2/n)+1}\int(\tilde{\varepsilon}_r-\breve{u}_r)\,d\theta=A^{(-\alpha)}k^{\alpha}r^{(C-2/n)+1}\tilde{u}_\theta\end{aligned}\right.$$

（2—27）

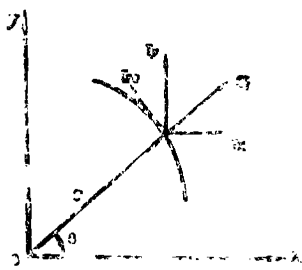

图3

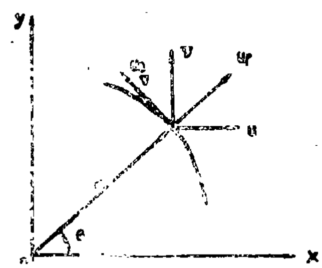

图4

由图3得

$$\left\{\begin{aligned}T_x&=l\sigma_r-m\tau_{r\theta}=kr^{C-2}\tilde{T}_x\\T_y&=l\tau_{r\theta}+m\sigma_r=kr^{C-2}\tilde{T}_y\end{aligned}\right.\qquad(2-28)$$

而

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial T_x}{\partial x}&=kr^{C-3}\frac{\partial\tilde{T}_x}{\partial x}\\\frac{\partial T_y}{\partial x}&=kr^{C-3}\frac{\partial\tilde{T}_y}{\partial x}\end{aligned}\right.\qquad(2-29)$$

由图4得

$$\begin{cases} u = l u_x - m u_\theta = A^{(-\alpha)} k^{\alpha} r^{(C-2/n)+1} \tilde{u} \\ v = l u_\theta + m u_r = A^{(-\alpha)} k^{\alpha} r^{(C-2/n)+1} \tilde{v} \end{cases} \qquad (2-30)$$

将式（２—２９）、（２—３０）代入式（１—１）中第二项表达式

$$u_i \frac{\partial T_i}{\partial x} = A^{(-\alpha)} k^{(1+\alpha)} r^{(1+\alpha)(C-2)} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}_x}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}_y}{\partial x} \right) \qquad (2-31)$$

将　$\varepsilon_i = \partial w / \partial \sigma_i$　代入式（２—１５），然后积分，得

$$W = \int \varepsilon_i d\sigma_i = A^{(-\alpha)} \sigma_i^{(1+\alpha)} \cdot \frac{1}{n+1}$$

即

$$W = A^{(-\alpha)} k^{(1+\alpha)} r^{(1+\alpha)(C-2)} \tilde{\sigma}_i^{(1+\alpha)} \cdot \frac{1}{1+\alpha} \qquad (2-32)$$

若取园心位于裂纹尖端，半径为r的园周作为积分回路，则$ds = r d\theta$，将式（2—31）（２—３２）代入式（１—１），得

$$\dot{J} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(w r \cos\theta - u_i \frac{\partial T_i}{\partial x} r \right) d\theta$$

$$= A^{(-\alpha)} k^{(1+\alpha)} r^{(1+\alpha)(C-2)} I \qquad (2-33)$$

由于$\dot{J}$积分具有守恒性，即与r无关，故有

$$(1+\alpha)(c-2)+1=0$$

解之得

$$c = \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} \qquad (2-34)$$

将式（２—３４）代入式（２—３３），得

$$k = A \left(\frac{\dot{J}}{A I} \right)^{1/(1+\alpha)} \qquad (2-35)$$

将式（２—３４）、（２—３５）代入式（２—２５），得

$$\begin{cases} \sigma_r = A \left(\frac{\dot{J}}{A I} \right)^{1/(1+\alpha)} r^{-1/(1+\alpha)} \tilde{\sigma}_r \\ \sigma_\theta = A \left(\frac{\dot{J}}{A I} \right)^{1/(1+\alpha)} r^{-1/(1+\alpha)} \tilde{\sigma}_\theta \\ \tau_{r\theta} = A \left(\frac{\dot{J}}{A I} \right)^{1/(1+\alpha)} r^{-1/(1+\alpha)} \tilde{\tau}_{r\theta} \end{cases} \qquad (2-36)$$

将式（2—34）、（2—35）代入式（2—26），得

$$\begin{cases} \varepsilon_r=\left(\frac{\dot{J}}{AI}\right)^{\alpha/1+\alpha}r^{-\alpha/1+\alpha}\tilde{\varepsilon}_r \\ \varepsilon_\theta=\left(\frac{\dot{J}}{AI}\right)^{\alpha/1+\alpha}r^{-\alpha/1+\alpha}\tilde{\varepsilon}_\theta \\ r_{r\theta}=3\left(\frac{\dot{J}}{AI}\right)^{\alpha/1+\alpha}r^{-\alpha/1+\alpha}\tilde{r}_{r\theta} \end{cases} \tag{2—37}$$

式中

A为与材料性质有关的常数，可实验确定。

α为材料的幂硬化指数，可实验确定。

$\tilde{\sigma}_r$、$\tilde{\sigma}_\theta$、$\tilde{\tau}_{r\theta}$为应力角度因子。

$\tilde{\varepsilon}_r$、$\tilde{\varepsilon}_\theta$、$\tilde{r}_{r\theta}$为应变角度因子。

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{1+\alpha}\sigma_i^{(1+\alpha)}\cos\theta-\tilde{u}\frac{\partial\tilde{T}_x}{\partial x}-\tilde{v}\frac{\partial\tilde{T}_y}{\partial x}\right)d\theta$$

可见，裂纹尖端附近的应力应变，就某一定材料来说，只依赖于$\dot{J}$积分。即上述弹塑性或非线弹性情况下，裂纹尖端应力应变场奇异性强度由$\dot{J}$积分唯一确定。

3　$\dot{J}$积分形变功率表达式

为便于计算和实验测定，参照文献〔3〕对形变功率表达式的证明，采用类似的方法，可以很容易得到$\dot{J}$积分的形变功率表达式

$$\dot{J}=-\frac{1}{B}\frac{d\pi}{d\alpha}+\oint_c u_i\frac{dT_i}{d\alpha}ds \tag{3—1}$$

式中　π为应变余能，它等于应变余能密度在构件体积内的积分，即

$$\pi=\int_v w\,dv \tag{3—2}$$

4　结　　语

$\dot{J}$积分可用于建立弹塑性断裂判据，尤其是适用于裂纹面上有均布载荷作用的情况，这对解决某些工程问题有一定的实际价值。例如，对压力容器出现裂纹后在裂纹面上存在内压力及重力坝下出现裂纹后裂纹面上存在水压力的情况，用$\dot{J}$积分进行弹塑性断裂分析是可行的。

最后需要指出：$\dot{J}$积分的与路径无关性及$\dot{J}$积分的等效定义都是在不计体力，小应变全量理论、单调加载条件下得到证明的。

参考文献

〔1〕徐芝伦编《弹性力学》(下册)，人民教育出版社，1979.

〔2〕徐秉业、陈森灿编《塑性理论简明教程》清华大学出版社，1981，7.

〔3〕北京钢铁研究院金属物理室编《工程断裂力学》，国防出版社，1977，6.

〔4〕D.B.Roek, Elementry Eignneering Frabture Mechanics, Noorohff International Publising Leyden, 1074.

〔5〕高庆主编《工程断裂力学》，重庆大学出版社，1987.

The $\dot{J}$ Integral on The Basis of The Strain Complementary Energy

Han Lianyan Ding Suidong

(Dept. of Math. and Mech.)

Abstract: In This paper, The $\dot{J}$ integral on The basis of The strain Complementary energy is raised. We proved The Conseruation of return definition of The $\dot{J}$ Integral, and discuss The effectiueness of The $\dot{J}$ integral using as elastoplastic fracture Criterion. Simultaneously, The expression of deformation power definition of The $\dot{J}$ integral is posed yet.

Keywords: Crack, Fracture Criterion, $\dot{J}$ Integral