

离心过滤方程的讨论与推导

王德耕

(化工原理教研室)

提 要: 本文以较简捷的方式, 导出了离心过滤速率方程, 并对滤饼比阻的处理方法及滤液量与时间的关系进行了讨论, 给出了工程用计算式。

关键词: 离心过滤 滤饼比阻 悬浮液

1 离心过滤速率方程

离心过滤是由于离心设备旋转使流体产生径向运动通过过滤介质而实现的。通常, 建立离心过滤速率方程的方法是以惯性系为参照系, 通过对流体微元的力学分析建立微分方程, 沿流动路径进行积分导出。这种方法较繁。下面将从非惯性系出发, 建立离心力场能量方程, 直接导出离心过滤速率方程。

从非惯性系出发, 可将流体的相对运动看成力与惯性力(离心力与科氏力)作用的结果, 惯性力可看作场力(无直接施力者)。因科氏惯性力垂直于相对运动方向不做功, 故力场可看做离心力场。在离心力场中单位质量流体所具有的能量为: 静压能 p/ρ 、动能 $u_r^2/2$ (u_r 为相对运动速度, 在离心过滤中可近似看做径向运动)。离心势能 $-\omega^2 r^2/2$ (r 为质点到园心的距离。离心势能场是负势能场, 随 r 的增加, 势能下降)。若流体不流动则各点的能量相等

$$\frac{p_1}{\rho} - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} - \frac{\omega^2 r_2^2}{2}$$
$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\rho \omega^2}{2} (r_2^2 - r_1^2) \quad (1)$$

这便是离心力场两点静压差表达式。

在一流道的两截面列能量守恒方程有:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_{r1}^2}{2} - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_{r2}^2}{2} - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + h_{f1,2} \quad (2)$$

式中 h_f 为阻力损失。(2)式便是离心力场机械能守恒方程。

1.1 离心过滤速率方程的建立

在离心过滤中, 离心分离因数 $\omega^2 r/g \gg 1$ (即使是常速离心机, 离心分离因数也在数百之上, 高速离心机可达数万), 故可忽略重力场的影响。

收到日期: 1987.07.02.

下面讨论在一定滤饼厚度下的瞬时过滤速率。因离心过滤能处理的悬浮液中的颗粒较小,滤饼中的流体通道接近毛细通道,故可认为流道内流型为层流。

假设转鼓为圆柱形,流体的每一质点都处于同一离心力场下(见图1),则在1~3间列能量守恒方程(2)式,得:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_{r1}^2}{2} - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + \frac{u_{r3}^2}{2} - \frac{\omega^2 r_3^2}{2} + h_{f2,3}$$

$$\because p_1 = p_3 = p_a \text{ (大气压)}$$

故有:

$$\frac{\omega^2 (r_3^2 - r_1^2)}{2} + \frac{u_{r1}^2 - u_{r3}^2}{2} = h_{f2,3} \quad (3)$$

在2~3间列(2)式有:

$$\frac{p_2 - p_3}{\rho} + \frac{u_{r2}^2 - u_{r3}^2}{2} + \frac{\omega^2 (r_3^2 - r_2^2)}{2} = h_{f2,3}$$

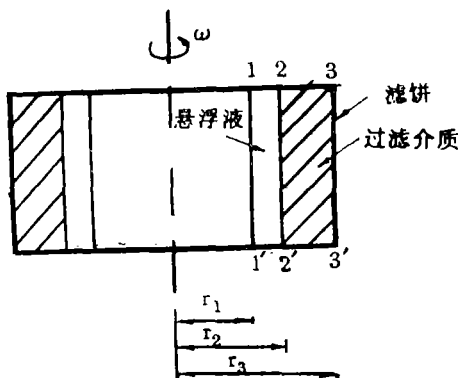


图1 离心过滤示意图

这说明过滤推动力即有静压差又有势差。而静压差($p_2 - p_3$)也是由势差转化而来:

$$p_2 - p_3 = \frac{\rho \omega^2 (r_3^2 - r_1^2)}{2} + \frac{\rho (u_{r1}^2 - u_{r2}^2)}{2}$$

式中动能差项 $\frac{\rho (u_{r1}^2 - u_{r2}^2)}{2}$ 很小可忽略。

离心过滤中滤饼的阻力损失可写为

$$\rho h_f = \int_{r_2}^{r_3} \mu \beta \frac{Q}{A} dr = \int_{r_2}^{r_3} \mu \beta Q \frac{dr}{2 \pi h r}$$

式中 $Q = \frac{dv}{d\theta}$ (瞬时过滤速率), β 为滤饼比阻, h 为转鼓长度。 μ 为滤液的粘度。

对于不可压缩滤饼 β 为常数

$$\rho h_f = \frac{\mu \beta Q}{2 \pi h} \ln \frac{r_3}{r_2} \quad (4)$$

$$\text{对可压缩滤饼 } \rho h_f = \frac{\mu \bar{\beta} Q}{2 \pi h} \ln \frac{r_3}{r_2} \quad (4')$$

式中 $\bar{\beta}$ 为平均比阻。

将(4)式或(4')式代入(3),忽略动能差项,并将过滤介质当量阻力写为: $\mu \beta \frac{L}{r_3}$

(通常也写为 $\mu \frac{R_m}{r_3}$), 式中 L 为介质当量厚度。则得:

$$Q = \frac{\pi h \rho \omega^2 (r_3^2 - r_1^2)}{\mu \beta \left(\ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{L_e}{r_3} \right)} = \frac{\pi h \rho \omega^2 (r_3^2 - r_1^2)}{\mu \left(\beta \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{R_m}{r_3} \right)} \quad (5)$$

此式便是离心过滤速率方程, 称为格雷式^[1]。若滤饼可压缩则 β 应写为平均比阻 $\bar{\beta}$ 。

在离心过滤中, 一般 $r_3 \gg r_3 - r_2 = L$ (L 为滤饼厚度), $\ln \frac{r_3}{r_2} = -\ln \frac{r_2}{r_3} = -\ln \left(1 - \frac{r_3 - r_2}{r_3} \right)$

$\approx \frac{L}{r_3}$, 所以(5)式可写为:

$$Q = \frac{\pi h \rho \omega^2 (r_3^2 - r_1^2)}{\mu \beta \left(\frac{L + L_e}{r_3} \right)} \quad (6)$$

1.2 比阻的处理方法

为了便于比较, 先讨论压滤机过滤。在压滤过程中, 滤饼的平均比阻^[2]可近似写为:
 $r = r_0 \Delta p^a$

这表明对于一定的物系, 滤饼的平均比阻与滤饼的厚度无关, 仅与压力有关。滤饼比阻是滤饼的空隙率及比表面的函数, 对于一定物系这两者取决于压紧力(又称为压缩性压力)。

压滤过程滤饼内的压紧力的分布见图2。压紧力 p_s 在滤饼底部达到最大值($p_{s,max} = p_1 - p_2$)当滤饼厚度不大时压紧力分布可写为:

$$p_s = (p_1 - p_2) \left(\frac{l}{L} \right)^a = \Delta p \left(\frac{l}{L} \right)^a,$$

即 p_s 为指数分布。

$$\text{平均压紧力 } \bar{p}_s = \frac{1}{L} \int_0^L p_s dl = \frac{1}{a+1} \Delta p$$

由此可见平均比阻 r 应视为平均压紧力的

函数: $r = r_0 \Delta p^a = r_0 (a+1)^a \bar{p}_s^a$ 。而最大压

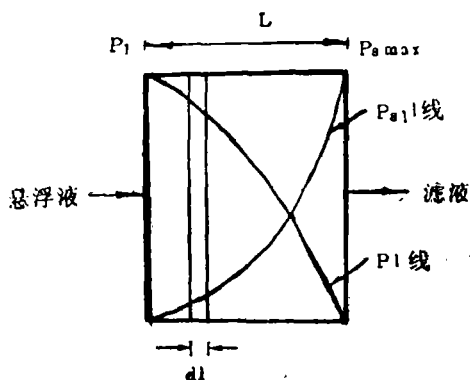


图2 压滤过程中滤饼层内压力及压紧力分布

紧力 $p_{s,max} = \Delta p$, 故比阻也可写为: $r = r_0 p_{s,max}^a$ 。平均压紧力及最大压紧力仅取决于总压差而与滤饼厚度无关。

如果我们把压滤过程中比阻的表示方法用于离心过滤, 则得 $\bar{\beta} = \beta_0 p_{s,max}^a$ (β_0 为比例常数)。但离心过滤中压紧力不仅取决于压差和势能差, 还与固体颗粒在离心力场中产生的压力 p_ω 及科氏力产生的压力有关。若忽略科氏力则有:

$$p_{s,max} = p_l + p_\omega = \frac{\rho \omega^2 (r_3^2 - r_1^2)}{2} + \int \frac{(1 - \varepsilon) p_s \omega^2 dr^2}{2}$$

式中 p_s 为固体颗粒密度, ε 为空隙率。由于式中空隙率本身就是 p_s 的函数, 因此问题变得很复杂。人们曾尝试用统一的方法处理压滤及离心过滤比阻^[3]。由以上分析可知, 由于离心过滤的复杂性, 难以在形式上将两者统一起来。本文将通过以下讨论给出一种处理方法。

由以上讨论知, 离心过滤中滤饼所受的压紧力取决于 $\frac{\rho}{2}\omega^2(r_3^2 - r_1^2)$ 项 (由 (5) 式

$$\text{知 } Q = \frac{\text{推动力项}}{\text{阻力项}} = \frac{\frac{\rho}{2}\omega^2(r_3^2 - r_1^2)}{\frac{\mu}{2\pi h}\bar{\beta}\left(\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{L_e}{r_3}\right)}, \text{ 故 } \frac{\rho}{2}\omega^2(r_3^2 - r_1^2) \text{ 可称为离心过滤的总推动}$$

力) 以及固体颗粒在离心力场中产生的压力, 而此力与滤饼的厚度及悬浮液有关, 对于一定的悬浮液, 它随滤饼的厚度变化而变。因此对于一定的物系, 可将比阻写成:

$$\bar{\beta} \propto (r_3^2 - r_1^2)^a \cdot L'^b$$

L' 包括了过滤介质当量厚度 ($L' = L + L_e$)

将上式无因次化得:

$$\bar{\beta} / \beta_0 = \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2\right]^a \cdot \left(\frac{L'}{r_3}\right)^b \quad (7)$$

β_0 是量纲与 $\bar{\beta}$ 相同的校正系数, 在一定的转速及一定的悬浮液条件下, 它为常数。

将 (7) 式代入 (6) 式得:

$$Q = \frac{\pi h \rho \omega^2 r_3^2 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2\right]^a}{\mu \beta_0 \left(\frac{L + L_e}{r_3}\right)^b} \quad (8)$$

式中 a 、 b 、 β_0 需通过实验加以测定。这种处理比阻计算的方法较为简便且使过滤速率方程中待测参数较少。

2 滤液量与过滤时间的关系

离心过滤通常采用间歇操作方式, 而连续操作的离心过滤设备, 当转鼓的一部分转过加料位置之后, 其后的过程可认为与间歇过滤过程类同 (例如活塞往复卸料离心机)。所以通常研究者所讨论的是间歇过滤过程, 下面将对典型的间歇过滤中滤液量与过滤时间的关系进行讨论。

对于粗粒子悬浮液, 离心沉降过程使得短时间内固体颗粒几乎全部沉降于壁面形成滤饼, 过滤时间主要取决于液面自 r_1 降到 r_2 的时间 (因为离心沉降时间很短可以忽略)。这也就是在滤饼厚度不变的情况下, 找出滤液量与时间的关系。这种情况比较简单, 因此已有较为成熟的计算方法。工程计算中所推荐的方法是蔡特斯奇法^[4]。

但对细粒子悬浮液, 特别是粒子密度接近液体时, 不能采用蔡氏方法。有些研究者提出了一些计算方法^[5], 但多数考虑的是推动力项不变的情况。事实上随着过滤的进行, 转鼓内液体减少, 推动力不断下降。本文将就这类情况进行讨论与推导, 提出滤液量与时间的关系式。

2.1 不可压缩滤饼离心过滤

不可压缩滤饼比阻为常数。离心过滤设备中一般有 $r_3 \gg L$, 故 $L = \frac{CV}{A_0}$ 。式中 A_0

$= 2\pi hr_3$, V 是滤液量, C 是滤液体积与滤渣体积之比。

$$L + L_e = \frac{C}{A_0} (V + V_e) \quad (9)$$

V_e 为过滤介质的当量滤液量。

$$\pi (r_3^2 - r_1^2) h = V_{L0} - V \quad (10)$$

式中 V_{L0} 是转鼓内初始料液量。

将 (9)、(10) 式代入 (6) 式得:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= \frac{2\rho V_0 \omega^2}{\mu \beta C} \left(\frac{V_{L0} - V}{V + V_e} \right) \\ &= \frac{2\rho \omega^2 V_0 V_{L0}}{\mu \beta C V_e} \cdot \left(\frac{1 - V/V_{L0}}{1 + V/V_e} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $V_0 = \pi r^2 h$, 即转鼓容积

$$\text{令 } Q_0 = \frac{2\rho V_0 V_{L0} \omega^2}{\mu \beta C V_e} \quad \text{则 } \frac{dV}{d\theta} = Q_0 \left(\frac{1 - V/V_{L0}}{1 + V/V_e} \right) \quad (12)$$

故 Q_0 是 $\theta = 0$ 时的过滤速率, 即 $Q_0 = \left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta=0}$

$$\text{积分上式: } \int_0^V \frac{1 + V/V_e}{1 - V/V_{L0}} dV = Q_0 \int_0^\theta d\theta$$

$$\text{得 } \theta = \frac{V_{L0}}{V_e Q_0} [(V_e + V_{L0}) \ln \frac{V_{L0}}{V_{L0} - V} - V] \quad (13)$$

令 $\phi = V/V_{L0}$, $\phi_e = V_e/V_{L0}$

$$\text{则 } \theta = \frac{V_{L0}}{Q_0 \phi_e} [(1 + \phi_e) \ln \frac{1}{1 - \phi} - \phi] \quad (14)$$

过滤完毕时 $\theta = \tau$, $V = \frac{1}{1+C} V_{L0}$ 代入上式

$$\tau = \frac{V_{L0}}{Q_0 \phi_e} [(1 + \phi_e) \ln \frac{1+C}{C} - \frac{1}{1+C}] \quad (15)$$

在上面的推导中 L 采用了近似算法 $L = \frac{CV}{A_0}$, 这种算法得到的 L 值较实际的小, 但

当 $r_3 \gg L$ 时误差较小, 在工程计算上是可行的。例如当 r_3 为 0.5m, $L/r_3 = 1/5$, L 为 0.1m 时, 近似计算 L 值为 0.09m, 误差为 10%。当 L/r_3 很小时误差要小得多。

为了得到准确的计算式, 可将 L 写为:

$$L = r_3 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V}{V_0} C} \right)$$

又 令 $l_e = L_e/r_3$ 代入 (6) 式得

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\rho\omega^2 V_{L0}}{\mu r l_e} \cdot \left[\frac{1 - V/V_{L0}}{1 + \frac{1}{l_e} (1 - \sqrt{1 - \frac{VC}{V_0}})} \right]$$

$$\text{令 } Q_0 = \frac{\rho\omega^2 V_{L0}}{\mu r l_e}, \text{ 即 } Q_0 = \left(\frac{dV}{d\theta} \right) \Big|_{\theta=0}$$

$$\text{则 } \frac{dV}{d\theta} = Q_0 \frac{1 - V/V_{L0}}{1 + (1 - \sqrt{1 - VC/V_0})/l_e} \quad (16)$$

$$\text{积分上式: } \int_0^V \frac{1 + (1 - \sqrt{1 - VC/V_0})/l_e}{1 - V/V_{L0}} \cdot dV = Q_0 \int_0^\theta d\theta$$

$$\text{得: } \theta = \frac{V_{L0}}{l_e Q_0} \left\{ (1 + l_e - \sqrt{1 - C \frac{V_{L0}}{V_0}}) \ln \frac{V_{L0}}{V_{L0} - V} + 2 \left[1 - \sqrt{1 - C \frac{V}{V_0}} \right. \right. \\ \left. \left. (1 + \ln \frac{\sqrt{1 - C \frac{V_{L0}}{V_0}} + \sqrt{1 - C \frac{V}{V_0}}}{1 - C \frac{V_{L0}}{V_0} + C}) \right] \right\}$$

$$\text{令 } \sigma_0 = \frac{V_{L0}}{V_0}, \quad \sigma = \frac{V}{V_0}$$

$$\text{则 } \theta = \frac{V_{L0}}{l_e Q_0} \left\{ (1 + l_e - \sqrt{1 - C \sigma_0}) \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma} + 2 \left[1 - \sqrt{1 - C \sigma} \right. \right. \\ \left. \left. (1 + \ln \frac{\sqrt{1 - C \sigma_0} + \sqrt{1 - C \sigma}}{1 + \sqrt{1 - C \sigma_0}}) \right] \right\} \quad (17)$$

此式较繁, 不便应用。(14)式与之相比, 较为简捷, 而且两者计算结果相差不大。仍以 r_3 为0.5m, $L/r_3 = 1/5$ 为例, 两者计算的相对误差小于10%, 若 L/r_3 较小则误差更小。所以工程计算可采用较简单的(14)式。

2.2 加料时滤液量与时间的关系

在离心过滤操作中, 通常先在一一定的转速下加料, 设加料速率为 Q_l (m^3/s), 则(11)

$$\text{式可写为: } \frac{dV}{d\theta} = \frac{2\rho\omega^2 V_0}{\mu\beta C} \left(\frac{Q_l\theta - V}{V + V_e} \right)$$

在加料的开始阶段 $Q_l\theta \gg V$, 又令 $k = \frac{2\rho\omega^2 V_0}{\mu\beta C}$, 则

$$\frac{dV}{d\theta} = k \frac{Q_l\theta}{V + V_e}$$

$$\text{积分 } \int_0^{V_1} (V + V_e) dV = \int_0^\theta k Q_l \theta d\theta$$

$$\text{得 } (V_1 + V_e)^2 = k Q_l \theta^2 + V_e^2$$

$$V_1 = \sqrt{k Q_0 \theta^2 + V_e^2} - V_e \quad (18)$$

若加料使转鼓内液体达到一定厚度时减低加料速度, 使单位时间的加料量与单位时间的滤液量相等, 则过滤推动力保持不变。

$$\frac{dV}{d\theta} = k \frac{A}{V + V_e}$$

式中A为转鼓内保持的料液及滤饼的体积之和。

$$\text{积分上式得 } \left[\frac{1}{2} \left[(V + V_e)^2 - V_e^2 \right] \right] = k A \theta$$

$$V = \sqrt{2kA\theta + V_e^2} - V_e \quad (19)$$

加料阶段的其它经验计算式可参见文献[5]。

在离心过滤操作周期中, 由于在加料阶段及加速阶段均已形成了一定厚度的滤饼, 故在应用过滤方程(14)或(17)式时, 应将这层滤饼看做过滤介质, 因此当量滤液量应写为 $V_e + V_1 + V_a$ (V_a 为加速阶段所得滤液量)。

2.3 可压缩滤饼过滤

对于可压缩滤饼, 建立滤液量与时间的关系式的较简单的方法是直接将不可压缩滤饼计算式乘以一校正系数。

将(14)式写为

$$\theta = \alpha \frac{V_{L0}}{Q_0 \phi_e} \left[(1 + \phi_e) \ln \frac{1}{1 - \phi} - \phi \right] \quad \text{令 } \delta = \frac{\alpha}{Q_0 \phi_e}$$

$$\text{则 } \theta = \delta V_{L0} \left[(1 + \phi_e) \ln \frac{1}{1 - \phi} - \phi \right] \quad (20)$$

事实上, 如用近似式 $L = \frac{CV}{2\pi hr_s}$, 将(6)式写为:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{2\rho V_0 \omega^2}{\mu \bar{\beta} C} \left(\frac{V_{L0} - V}{V_e + V} \right)$$

$$\text{式中 } \bar{\beta} = \beta_0 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_s} \right)^2 \right]^{1-a} \cdot \left(\frac{L + L_e}{r_s} \right)^{b-1}$$

$$= \beta_0 \left(\frac{V_{L0} - V}{V_e + V} \right)^{1-a} \cdot \left(\frac{CV}{2V_0} \right)^{b-1}$$

(a、b是(8)式中的参数)

$$\text{积分上式得 } \theta = \int_0^V \frac{\mu \bar{\beta} C}{2\rho V_0 \omega^2} \left(\frac{V_e + V}{V_{L0} - V} \right) dV$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\mu C}{2\rho V_0 \omega^2} \cdot \beta^* \int_0^V \frac{V_e + V}{V_{L0} - V} dV \\
 &= \frac{\mu C}{2\rho V_0 \omega^2} \cdot \beta^* V_{L0} \left[(1 + \phi_e) \ln \frac{1}{1 - \phi} - \phi \right] \quad (21)
 \end{aligned}$$

式中 β^* 值是介于 $V = 0$ 时及 $V = V$ 时的平均比阻之间的“中”值。

(21)式中令 $\delta = \frac{\mu C}{2\rho V_0 \omega^2} \beta^*$ 即得(20)式。

β^* 值与 β_0 、 C 、 V 、 V_{L0} 、 V_0 值有关,可将它写为:

$$\beta^* = \beta_0 C^{b-1} \cdot f(V, V_{L0}, V_0)$$

将 $f(V, V_{L0}, V_0)$ 无因次化并写成指数函数

$$\text{则 } \beta^* = \beta_0 C^{b-1} \cdot \left(\frac{V}{V_0} \right)^m \cdot \left(\frac{V_{L0}}{V_0} \right)^n$$

代入(21)式得:

$$\theta = \frac{\mu C^b V_{L0}}{2\rho V_0 \omega^2} \beta_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^m \cdot \left(\frac{V_{L0}}{V_0} \right)^n \cdot \left[(1 + \phi_e) \ln \frac{1}{1 - \phi} - \phi \right] \quad (22)$$

当然,此式的适用性及有关参数的求取需通过进一步的实验来确定。

参 考 文 献

- [1] H.P.Grace Chemical Engineering Progress, V40, No 8, P427—432, 1953
- [2] F.M.Tiller, Ind, Eng, Chem, 53, 529, 1961
- [3] 孙启才,金鼎五主编《离心机原理结构与设计计算》,机械工业出版社,1987
- [4] L.Svarovsky:《Solid liquid Separation》,1977
- [5] B.N.索柯罗夫:《离心分离理论及设备》(中译本),P283—288,机械工业出版社,1986

Analysis and Deduction of Centrifugal Filtration Equation

Wang Degeng

(Chemical Engineering Department)

Abstract: In this paper, the filtration equations are deduced in brief. Some analyses on specific cake resistance are made and a set of the equations of centrifugal filtration calculation are given.

Keywords: centrifugal filtration, cake resistance, suspensions.