第10卷 第2期 郑州工学院学报 VOL.10 NO.2
1989年 6 月 J.ZhengZhou Inst. of Technol. June 1989

模的极小生成元

王志岩

（信息学院）

本文将讨论有限生成模极小生成元的性质及应用。

如果R一模M能被a_1，a_2，…，a_m生成，但不能被任意$m-1$个元素生成，则称a_1,a_2，…，a_m为模M的一组极小生成元或极小生成元组。显然有限生成模必有极小生成元组存在。首先讨论自由模的极小生成元组的性质。

定理1 设R为交换环，$M\neq 0$是R上n秩自由模，则M的极小生成元组由n个元素组成。

证 设e_1，e_2，…，e_n为M的一组基，ε_1，ε_2，…，ε_m为M的一组极小生成元，则它们可相互线性表出。

$$e_i=\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\varepsilon_j \qquad \varepsilon_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_i$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}=B_{nm}\begin{pmatrix} \varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_m\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_m\end{pmatrix}=A_{mn}\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}$$

若$m<n$考虑n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{mn}\\ 0\end{pmatrix} \qquad B=(B_{nm}0)$$

由基表出元素的唯一性有，

$$BA=E$$

因R为交换环，对上式取行列式

$$|BA|=|B|\,|A|=1$$

可知A、B为互逆矩阵，且

$$AB=E$$

但

$$\begin{pmatrix} A_{mn} \\ 0 \end{pmatrix} (B_{nm}\ 0) = \begin{pmatrix} C_{mm} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E$$

所以$m \geqslant n$。而M的极小生成元组所含元素个数不可能大于基所含元素的个数。所以有$m = n$。

由定理1可知当R为交换环时，R上的n秩自由模的一组基，必为极小生成元组。进一步还有如下结论。

推论 设R为交换环，$M \neq 0$为n秩自由R—模，则M的极小生成元组为M的一组基。

证 设e_1，e_2，…，e_n为M的一组基，ε_1，ε_2，…，ε_n为M的一个极小生成元组。它们可相互线性表出，写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

同样有

$$AB = E$$

可知B为可逆矩阵。若有线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i = 0$

即

$$(x_1 x_2 \cdots x x_n) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} =$$

可写成

$$(x_1 x_2 \cdots x_n) B \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = 0$$

进而

$$(x_1 x_2 \cdots x_n) B = 0$$

两边同乘B^{-1}

$$(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) = 0$$

所以ε_1，ε_2，…，ε_n为M的一组基。

综上，当R为交换环$M\neq 0$时，R上n秩自由模M的一组基与一组极小生成元是一致的。这与线性空间中的性质是类似的。下面我们讨论主理想整环上的有限生成模。其极小生成元组有如下性质。

定理2　设R为主理想整环，$M\neq 0$为R上有限生成模，则M的极小生成元组所含元素个数等于M的基本结构定理中不变因子理想的个数。

证　设M的标准分解为

$$M=RZ_1\oplus RZ_2\oplus\cdots\oplus RZ_r$$

$$\mathrm{ann}Z_1\supset\mathrm{ann}Z_2\supset\cdots\supset\mathrm{ann}Z_r\quad \mathrm{ann}Z_1\neq R$$

显然Z_1，Z_2，…，Z_r为M的一组生成元，若M可由x_1，x_2，…，x_m生成，且$m<r$。

考虑映射η：$\sum\limits_1^m a_ie_i\to\sum\limits_1^m a_ix_i$

为R^m到M的模同态，设同态核为K，

$$K=\langle f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_m\rangle$$

其中

$$\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_m\end{pmatrix}$$

因R为主理想整环，存在可逆矩阵Q，P使

$$QAP^{-1}=\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_t & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}$$

$$d_i\mid d_{i+1}\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ t-1$$

若取

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$$

可证　$M=Ry_1\oplus Ry_2\oplus\cdots\oplus Ry_m$

去掉零子模

$$M=RZ_1'\oplus RZ_2'\oplus\cdots\oplus RZ'_{r'}$$

$$\mathrm{ann}Z_1'\supset\mathrm{ann}Z_2'\supset\cdots\supset\mathrm{ann}Z'_{r'}\qquad \mathrm{ann}Z_1'\neq R$$

这里　$r'\leqslant m<r$

这与M的标准分解是唯一的矛盾。所以有

$$m=r$$

定理2说明在M的标准分解中，Z_1，Z_2，…，Z_r即为M的极小生成元组。这时M被分解为个数最少的循环子模的直和。