第10卷 第3期 郑州工学院学报 VOL.10 NO.3
1989年 9 月 J. ZhengZhou Inst. of Technol. sept. 1989

F 拓扑空间

赵万忠

（数理力学系）

提　要：本文引入并使用（小）邻域概念及相亏概念，对F扑拓空间中诸如聚点、闭包、内部、子空间、基、连续映射等基本概念及定理进行了初步探讨。形成较为满意的F拓扑空间系统。

关键词：相亏，（小）邻域，拓扑空间

1 予备

设x为非空集合，F（x）为x上全体F集，$x_\lambda \in F(x)$（$\lambda \in (0, 1]$）叫做X上F的点，如果它满足$x_\lambda(x) = \lambda$，且$x_\lambda(y) = 0$（$y \neq x$）。设$A \in F(x)$，规定"$x_\lambda \leftarrow A$"表示"$\lambda \leqslant A(x)$且仅当$\lambda = 1$时取等号"之意。下面的命题是明显地

命题1.1 $\forall A \in F(x)$，$A = \bigcup_{\lambda \in (0, 1)} \{x_\lambda \mid x_\lambda \leftarrow A\}$

命题1.2 $\forall A、B、A_\alpha \in F(X)$ $\alpha \in T$

1.2.1 $A \subset B \Leftrightarrow \forall x_\lambda \leftarrow A$有$x_\lambda \leftarrow B$ $\lambda \in (0, 1)$

1.2.2 $A = B \Leftrightarrow \forall x_\lambda \leftarrow A$有$x_\lambda \leftarrow B$，且$\forall y_\mu \leftarrow B$有$y_\mu \leftarrow A$ $\lambda, \mu \in (0, 1)$

1.2.3 $x_\lambda \leftarrow \bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha \Leftrightarrow$存在$\alpha_0 \in T$使$x_\lambda \leftarrow A_{\alpha 0}$ $\lambda \in (0, 1)$

定义1.1 称x_λ与A相亏记作$x_\lambda DA$，如果$\lambda + A(x) < 1$。称A与B相亏记作ADB，如果存在x使$A(x) + B(x) < 1$。x叫亏点

不难证明以下结果

命题1.3 1.3.1 $A \subset B \Leftrightarrow A' \nearrow B$（$\nearrow$表不相亏）

1.3.2 若ADB，则$A' \cap B' \neq \phi$

1.3.3 若$A \cap B = \phi$，则$A' \nearrow B'$

命题1.4 1.4.1 $x_\lambda DA \Leftrightarrow \forall B \subset A$有$x_\lambda DB$

1.4.2 $ADB \Leftrightarrow \forall A_1 \subset A$，$B_1 \subset B$，有$A_1 DB_1$

命题1.5 1.5.1 $x_\lambda D \bigcap_{i=1}^{n} \{A_i \mid i = 1.2, \cdots\cdots n\} \Leftrightarrow \forall i$，$x_\lambda DA_i$

1.5.2 $AD \bigcap_{i=1}^{n} \{A_i \mid i = 1.2, \cdots\cdots n\} \Leftrightarrow \forall_i$，$ADA_i$;

1.5.3 $x_\lambda D \bigcap \{A_\alpha \mid \alpha \in T\} \Rightarrow \forall \alpha$，$x_\lambda DA_\alpha$

1.5.4 $AD \bigcup \{A_\alpha \mid \alpha \in T\} \Rightarrow \forall \alpha$，$ADA_\alpha$

1.5.3和1.5.4都不可逆。例如取 $\lambda=\frac{1}{3}$，$A_n(x)=\frac{2n-1}{3n}$ $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$。则 $x_\lambda D A_n$，但 $x_\lambda \nearrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \bigcap$

命题1.6 1.6.1 $x_\lambda D(\bigcap_\alpha A_\alpha) \Leftrightarrow$ 存在 α_0 使 $x_\lambda D A_{\alpha 0}$

1.6.2 $AD(\bigcap_\alpha A_\alpha) \Leftrightarrow$ 存在 α_0 使 ADA_{α_0}。

2 邻域

设X为非空集，F（X）为X上全体F集。

定义2.1 称 $J \subset F(X)$ 为X上一个F拓扑，如果J满足2.1.1 ϕ、$Z \in J$；2.1.2若A、$B \in J$ 则 $A \bigcap B \in J$，2.1.3若 $A_\alpha \in J$（$\alpha \in T$），则 $\bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha \in J$。这时称（X，J）为F拓扑空间（记作Fts），J中每一元都叫开F集。开F集的余集叫做闭F集。全体闭F集记作 J'。

定理2.1 设（X，J）为Fts，2.1.1 ϕ，$Z \in J'$，2.1.2若A，$B \in J'$，则 $A \bigcup B \in J'$；2.1.3若 $A_\alpha \in J'$（$\alpha \in T$），则 $\bigcap \{A_\alpha \mid \alpha \in T\} \in J'$。

证明是直接的。

定义2.2 设（X，J）是Fts，$A \in F(Z)$ 叫F点 x_λ 的（小）邻域，如果当 $\lambda < A(x)$ 时存在 $O \in J$ 使 $x_\lambda > O' \nearrow A$，当 $\lambda = A(x)$ 时，对任意 $\rho < \lambda$ 存在 $O \in J$ 使 $x_\rho > O' \nearrow A$。

当 $A \in J$ 时，叫开邻域。显然开F集是其每点的邻域。x_λ 的全体邻域组成其邻域系，记作 U_{x_λ}。

命题2.1 $U_{x\lambda}$ 有如下性质：

N_1）$U_{x\lambda} \neq \phi$，且 $\forall A \in U_{x\lambda}$，$x_\lambda \in A$

N_2）若A，$B \in U_{x\lambda}$，则 $A \bigcap B \in U_{x\lambda}$

N_3）若 $A \subset B$ 且 $A \in U_{x\lambda}$，则 $B \in U_{x\lambda}$

N_4）若 $A \in U_{x\varrho}$，则存在 $V \in U_{x\lambda}$ 使 $V \subset A$ 且 $\forall y_\mu \in V$ 有 $V \in U_{y\mu}$

定理2.2 $A \in J \Leftrightarrow \forall x_\lambda \leftarrow A$（$\lambda \in (0, 1)$）有 $A \in U_{x\lambda}$

证明 必要性自明。我们证充分性，$\forall x_\lambda \leftarrow A$（$0 < \lambda < 1$）由 $A \in U_{x\lambda} \Rightarrow$ 存在 $O_{x\lambda} \in J$ 使 $x_\lambda D O'_{x\lambda} D A$（即 $x_\lambda \leftarrow O_{x\lambda} \subset A$） 令 $W = \bigcap \{O_{x\lambda} \mid x_\lambda \leftarrow A, 0 < \lambda < 1\}$，今证明 $W = A$ 从而 $A \in J$，$\forall y_\mu \leftarrow A$（$0 < \mu < 1$），$y_\mu \leftarrow O_{y\mu} \subset W \Rightarrow A \subset W$。另一方面由每个 $O_{x\lambda} \subset A \Rightarrow W \subset A$ 从而 $W = A$。

定理2.3 $A \in J' \Leftrightarrow \forall x_\lambda \overline{\in} A$，（$0 < \lambda < 1$）有 $A' \in U x_{1-\lambda}$

事实上，$A \in J' \Leftrightarrow A' \in J \Leftrightarrow \forall x_{1-\lambda} \leftarrow A'$（$0 < \lambda < 1$）有 $A' \in U x_{1-\lambda}$，即 $\forall x_\varrho \overline{\in} A$（$0 < \lambda < 1$）有 $A' \in U x_{1-\lambda}$。

定理2.4 设（X，J）为Fts，若对X上的每个F点 x_λ 指定满足 N_1）—N_4）四条件的F集族 $U_{x\lambda}$，则F集族。

$J^* = \{O : O \in F(X)$ 且 $\forall x_\lambda \leftarrow O$ 有 $O \in U_{x\lambda}\}$ 构成X上F拓扑，而且在 J^* 下，x_λ 的邻域系与对 x_λ 指定的 $U_{x\lambda}$ 一致。

证明仿照分明拓扑中相应定理进行。

3 聚点、闭包

命题3.1 设 (X, J) 为Fts，$A\in J'$，则 $x_\lambda\in A \Leftrightarrow \forall O\in J\cap U_{x_{1-\lambda}}$，有 $O'DA'$

事实上，$x_\lambda \bar{\in} A \Leftrightarrow x_{1-\lambda}\leftarrow A'\in J \Leftrightarrow A'\in U_{x_{1-\lambda}} \Leftrightarrow$ 存在 $O\in J\cap U_{x_{1-\lambda}}$ 使 $O'\nearrow A'$。

定义3.1

3.1.1 x_λ 叫A的附贴点，如果 $\forall O\in J\cap U_{x_{1-\lambda}}$ 有 $O'DA'$。

3.1.2 x_λ 叫A的聚点，如果 $\forall O\in J\cap U_{x_{1-\lambda}}$ 有 $O'DA'$ 且当 $x_\lambda\in A$ 时有不同于x的亏点。

定义3.2 $A^d\equiv\cup\{\{x_\lambda\}\mid x_\lambda$ 是A的聚点$\}$ 叫做A的导集。其中 $\{x_\lambda\}$ 为单承点xF集

注意：A的聚点一定属于 A^d。但反之不真。

不难证明

命题3.2

3.2.1 A中点及A的聚点都是A的附贴点

3.2.2 $A\cup A^d\in J'$

3.2.3 若 x_λ 是A之聚点，则 $\forall\mu<\lambda$，x_μ 也是A之聚点

定义 3.3 $\overline{A}\equiv A\cup A^d$ 叫A的闭包

命题3.3 若 $A\subset B$，则 $A^d\subset B^d$ 从而 $\overline{A}\subset\overline{B}$

命题3.4 $A\in J'\Leftrightarrow A\supset A^d\Leftrightarrow A=\overline{A}$

定理3.1 $\overline{A}=\cap\{F\mid A\subset F\in J'\}$

证明 由 $A\subset F\in J'\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{F}=F\Rightarrow\overline{A}\subset\cap\{F\mid A\subset F\in J'\}$。由 $A\subset\overline{A}\in J'\Rightarrow\cap\{F\mid A\subset F\in J'\}\subset\overline{A}$。故 $\overline{A}=\cap\{F\mid A\subset F\in J'\}$

命题3.5 $\overline{A}$ 就包含A的最小闭F集。

命题3.6 $x_\lambda\in\overline{A}\Leftrightarrow\forall O\in J\cap U_{x_{1-\lambda}}$ 有 $O'DA'$

命题3.7 对于单承点F集 $\{x_\lambda\}$

3.7.1 或者 $\{x_\lambda\}^d(x)=0$，或者 $\{x_\lambda\}^d(x)>\lambda$；

3.7.2 当 $y\neq x$ 时 $\{x_\lambda\}^d(y)=\overline{\{x_\lambda\}}(y)$；

3.7.3 $\{x_\lambda\}\in J'\Leftrightarrow\{x_\lambda\}^d=\phi$

证明3.7.1 由 $\{x_\lambda\}$ 为单承点F集，即 $\mathrm{supp}\{x_\lambda\}=\{x\}$ 按定义若 x_μ 是 $\{x_\lambda\}$ 的聚点，则 $x_\mu\bar{\in}\{x_\lambda\}$ 即 $\mu>\lambda$，从而 $\{x_\lambda\}^d(x)>\lambda$。3.7.2 由 $\overline{A}=A\cup A^d$ 即得。3.7.3是3.7.1与3.7.2的直接结果。

命题3.8 导集算子“d”有如下性质：D_1）、$\phi^d=\phi$；D_2）、若 $A\subset B$，则 $A^d\subset B^d$；D_3）、$(A\cup B)^d=A^d\cup B^d$；D_4）$(A\cap B)^d\subset A^d\cap B^d$

证明 D_1）、D_2）显然，D_4）是 D_2）的直接结果。以下证 D_3）。由 D_2），$A^d\subset$（A

$\cup B)^d$，$B^d\subset(A\cup B)^d$，故$A^d\cup B^d\subset(A\cup B)^d$。反之，若$x_\lambda$为$A\cup B$之聚点，$\forall O\in J\cap U_{x_{1-\lambda}}$有$O'D(A\cup B)'=O'D(A'\cap B')$（且当$x_\lambda\in A\cup B$时有不同于x的亏点），由命题1.6，要么$O'DA'$（且$x_\lambda\in A$时有不同于x的亏点）要么$O'DB'$（且$x_\lambda\in B$时有不同于x的亏点），即$x_\lambda$要么是A之聚点，要么是B之聚点，于是$A^d\cup B^d\supset(A\cup B)^d$。$D_3$）得证

命题3.9　设x_λ是A和B的公聚点且$\lambda\leqslant\min\{A(x),B(x)\}$或$\lambda>\max\{A(x),B(x)\}$，则$x_\lambda$是$A\cap B$的聚点。

命题3.10　闭包算子“$\overline{}$”有如下性质

C_1）、$\overline{\phi}=\phi$；C_2）、$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$；$C_3$）、$A\subset B\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$；$C_4$）、$A\subset\overline{A}$；$C_5$）、$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

C_6）、$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$

事实上，前四个性质显然，C_6）由C_3）即得，今证C_5），由C_3），$\overline{A\cup B}\supset\overline{A}$，$\overline{A\cup B}\supset\overline{B}$故$\overline{A\cup B}\supset\overline{A}\cup\overline{B}$。反过来，由$A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}\in J'$及定理2.1得$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$，于是$C_5$）得证　‖

引理3.1　设(X,J)为Fts，$A\in F(X)$，$x\in X$。若存在O_1、$O_2\in J$使①$O_1(x)+A(x)\leqslant1$，且②$\forall y\neq x$　$O_2(y)+A(y)\leqslant1$，则$\forall z_\lambda\leftarrow O_1\cap O_2$（$0<\lambda<1$），$z_{1-\lambda}$不是A之聚点。

事实上，令$O=O_1\cap O_2\in J\cap U_{z_\lambda}$　且$\forall x\in X$恒有　$O(x)+A(x)\leqslant1$，即$O'\nearrow A'$

定理3.2（C.T.Yang）　设(X,J)为Fts，$A\in F(X)$　则$A^d\in J'\Leftrightarrow\forall x_\lambda$，$\{x_\lambda\}\in J'$

证明　必要性显然。今证充分性。要证$A^d\in J'$，只须证A^d的所有聚点皆属于A^d。假若不然，则有A^d之聚点$x_\lambda\overline{\in}A^d$。由$x_\lambda\in A^{dd}\subset\overline{A^d}\subset\overline{A}=A\cup A^d$，得$x_\lambda\in A$，令$\mu=A(x)\geqslant\lambda$，考虑单承点集$\{x_\mu\}$。由假设$\{x_\mu\}^d\in J'$。

我们说$\{x_\mu\}^d(x)=\rho=0$，因为，若$\rho>0$，由命题2.7得$\rho>\mu\geqslant\lambda$，于是$x_\rho\overline{\in}A$且$x_\rho\in\{x_\mu\}^d=\{\overline{x_\mu}\}\subset\overline{A}=A\cup A^d\Rightarrow x_\rho\in A^d$，与$x_\lambda\overline{\in}A^d$矛盾。

令$O_1=\{x_\mu\}^{d'}\in J$　则$O_1(x)=1$，由$x_\lambda\overline{\in}A^d$且$x_\lambda\in A$得$x_\lambda$必不是A之聚点，于是存在$O_2\in J\cap U_{x_{1-\lambda}}$，使$\forall y\neq x$有$O_2(y)+A(y)\leqslant1$　　（1）

令$O_3=O_1\cap O_2\in J\cap U_{x_{1-\lambda}}$　由x_λ于A^d之聚点得存在$z\in X$使$O_3(z)+A^d(z)>1$，即$O_3'(z)<A^d(z)$，于是存在A之聚点z_δ且使$O_3'(z)<\delta\leqslant A^d(z)$

若$z\neq x$，则$O_1(z)=\{x_\mu\}^{d'}(z)=\{\overline{x_\mu}\}'(z)=\{x_\mu\}'^0(z)$（参见定理3.1），于是$1-\delta<O_3(z)\leqslant O_1(z)=\{x_\mu\}'^0(z)$，从而$z_{1-\delta}\leftarrow O_3\cap\{x_\mu\}'^0$

又　$\{x_\mu\}'^0(x)+A(x)\leqslant\{x_\mu\}'(x)+\mu=1-\mu+\mu=1$。而对$\forall y\neq x$有$O_3(y)+A(y)\leqslant O_2(y)+A(y)\leqslant1$　由引理3.1得z_δ不是A之聚点，矛盾。故$z=x$。于是x_δ是A的聚点，并且有$O_3'(x)<\delta\leqslant A^d(x)<\lambda\leqslant A(x)$，从而存在$y_1\neq x$使$O_3(y_1)+A(y_1)>1$，但由（1）又有$O_3(y_1)+A(y_1)\leqslant O_2(y_1)+A(y_1)\leqslant1$

矛盾。　‖

4　内部、边界

定义4.1　x_λ叫A的内点，如果$A\in U_{x_\lambda}$

$A^0\equiv\bigcup\{x_\lambda \mid x_\lambda$是A的内点$\}$，叫A的内部，显然我们有如下

命题4.1

4.1.1　$\forall A\in F(X)$，$A^0\in J$

4.1.2　若$A\in J$，则　$A^0=A$

命题4.2　内部算子"O"有如下性质：I_1）$X^0=X$；I_2）$A^0\subset A$；I_3）$A^{00}=A^0$；I_4）$A\subset B$则$A^0\subset B^0$；I_5）$(A\cap B)^0=A^0\cap B^0$；I_6）$(A\cup B)^0\supset A^0\cup B^0$

证明　I_1）、I_2）及I_4）显然，I_3）是命题3.1的直接结果。I_6是I_4的直接结果。

$$\begin{aligned}A^0\cap B^0&=[\bigcup\{O_1\in J \mid O_1\subset A\}]\cap[\bigcup\{O_2\in J \mid O_2\subset B\}]\\&=\bigcup\{O_1\cap O_2\in J \mid O_1\subset A,\ O_2\subset B\}\\&=\bigcup\{O_1\cap O_2\in J \mid O_1\cap O_2\subset A\cap B\}\\&=\{O\in J \mid O\subset A\cap B\}=(A\cap B)^0\end{aligned}$$

即J_5）成立。　‖

命题4.3　①A^0是含于A的最大开F集；②$A\in J\Leftrightarrow A=A^0$；③$A^0=\bigcup\{O \mid A\supset O\in J\}$

证明　①设$B\in J$且$B\subset A$，由命题3.1—3.2，$B=B^0\subset A^0$　得证①。②是命题3.1的直接结果，③由$A\supset O\in J$及命题3.2I_4）、命题3.1、②得$A^0\supset O^0=O\Rightarrow A^0\supset\bigcup\{O \mid A\supset O\in J\}$，反之，由$A\supset A^0\in J\Rightarrow\bigcup\{O \mid A\supset O\in J\}\supset A^0$，于是得证③‖

定理4.1　算子"′""—"及"O"满足如下关系①$A^0=A'^{-\prime}$；②$\overline{A}=A'^{0\prime}$；③$A^{0\prime}=A'^{-}$；④$A^{-\prime}=A'^{0}$

证明①$A^0=\bigcup\{O \mid A\supset O\in J\}=[\bigcap\{O \mid A\supset O\in J\}']'=[\bigcap\{O' \mid A'\subset O'\in J'\}]'=A'^{-\prime}$

②$\overline{A}=\bigcap\{F \mid A\subset F\in J'\}=[\bigcup\{F \mid A\subset F\in J'\}']'=[\bigcup\{F' \mid A'\supset F'\in J\}]'=A'^{0\prime}$

对①两边取"′"得③，对②两边取"′"得④ ‖

定理4.2　对任何F集A施行"′"、"—"及"O"三种运算至多可出现十四种不同的F集。而且确有Fts使其中一F集经上述三种运算恰好得到十四个不同的F集。

只要注意到$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$，$A''=A$，$A^{00}=A^0$及定理3.1便可得定理3.2。例子，取Fts（R，J）其中$J=\{0,\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{7}{20},\frac{3}{5},\frac{7}{9},\frac{79}{100},1\}$，则$J'=\{1,\frac{4}{5},\frac{2}{3},\frac{13}{20},\frac{2}{5},\frac{2}{9},\frac{21}{100},0\}$，

其中J，J′中各元表示其隶属度恒取该值的F集。取$A\in F(R)$使$A(x)=\begin{cases}1/3 & x\in(-\infty,0)=R^-\\2/9 & x\in[0,+\infty)=R^+\end{cases}$　则有①$A'(x)=\begin{cases}2/3 & x\in R^-\\7/9 & x\in R^+\end{cases}$　②$A^0(x)=\frac{1}{3}$　$x\in R$；

③$\overline{A}(x)=2/9\quad x\in R$；④$A'^{0}(x)=\frac{7}{9}\quad x\in R$；⑤$A'^{-}(x)=\frac{2}{3}x\in R$；⑥$A^{0-}(x)=\frac{2}{5}\quad x\in R$；⑦$A^{-0}(x)=\frac{1}{5}\quad x\in R$；⑧$A'^{0-}(x)=\frac{4}{5}\quad x\in R$；⑨$A'^{-0}(x)=\frac{3}{5}x\in R$；⑩$A^{0-0}(x)=\frac{7}{20}\quad x\in R$；⑪$A^{-0-}(x)=\frac{21}{100}\quad x\in R$；⑫$A'^{0-0}(x)=\frac{79}{100}\quad x\in R$；⑬$A'^{-0-}(x)=\frac{13}{20}\quad x\in R$。

定义4.2 规定A的边界A^b满足

$$A^b(x)=\begin{cases}A^d(x) & A^d(x)>A(x)\\ O & A^d(x)\leqslant A(x)\end{cases}$$

容易证明

命题4.4 ①$\overline{A}=A\cup A^b$；②$A\in J'\Leftrightarrow A^b\subset A$；③$A\in J\Leftrightarrow A'^b\subset A'$

5 子空间

定义5.1 设（X，J）为Fts，$Y\subset X$，令$J_1=\{O\cap Y|O\in J\}$，不难验证J_1是Y上F拓扑，叫做J在Y上的相对F拓扑，而（Y，J_1）叫子F拓扑空间，简记为SFts。

$O\cap Y$实质是O在Y上的局限。

设A为Fts（X，J）上F集。有时也说SFts（A，J_1）意指SFts（A_0，J_1），其中$A_0=\mathrm{supp}A$。SFts（Y，J_1）中F集A可自然地视为Fts（X，J）中F集，意指 $A(x)=\begin{cases}A(x), & x\in Y\\ O & x\in Y'\end{cases}$ Fts（X，J）中F集A可自然地视为SFts（Y，J_1）中F集意指A在Y上的局限。

命题5.1 设（Y，J_1）是Fts(X,J)的SFts，则①$F_1\in J_1'\Leftrightarrow$存在$F\in J'$使$F_1=F\cap Y$；②$Y\in J\Leftrightarrow J_1\subset J$；③$Y\in J'\Leftrightarrow J_1'\subset J'$

证明②$\forall O_1\in J_1\Rightarrow$存在$O\in J$使$O_1=O\cap Y$，由$Y\in J\Rightarrow O_1=O\cap Y\in J$，即$J_1\subset J$。反过来，由$Y\in J_1\subset J\Rightarrow Y\in J$。

①$F_1\in J_1'\Leftrightarrow F_1'\in J_1\Leftrightarrow$存在$O\in J$使$F_1'=O\cap Y$(即O在Y上的局限）$\Leftrightarrow$存在$F=O'\in J'$使$F_1=F\cap Y$（即$F=O'$在Y上的局限）

③由①仿②进行

命题5.2 设（Y，J_1）是Fts（X，J）的SFts，$A\in F(Y)$，则①SFts（Y，J_1）中F点y_λ是A在J_1下的聚点；$\Leftrightarrow y_\lambda$是A在J下的聚点，②$A^d{}_y=Y\cap A^d$其中$A^d{}_y$表A在$J_1$下的导集；③$\overline{A}_y=Y\cap\overline{A}$，其中$\overline{A}_y$表A在$J_1$下的闭包；④$\mathring{A}\supset\mathring{A}\cap Y$，其中$\mathring{A}_y$表A在$J_1$下的内部；⑤$A^b{}_y=A^b\cap Y$，其中$A^b{}_y$表A在$J_1$下的边界。

证明 ①必要性：设y_λ是A在J_1下之聚点，$\forall O\in J\cap U_{y_{1-\lambda}}$，令$O_1=O\cap Y\in J_1$，按定义在SFts（Y，$J_1$）中$O_1'DA'$且当$y_\lambda\in A$时有不同于y的亏点。由O与$O_1$在Y上同值，故在

$Fts(X, J)$中$O'DA'$，从而y_λ是A在J下之聚点。

充分性：设y_λ是A在J下之聚点，$\forall O_1 \in J_1 \cap U_{1 y 1-\lambda}$存在$O \in J$使$O_1 = O \cap Y$，于是按定义在$Fts(X, J)$中$O'DA'$，且当$y_\lambda \in A$时，有不同于y的亏点。由于$A \in F(Y)$，故当视$A \in F(X)$时，$A'$在$X-Y$上恒取值1，故亏点必在Y中，又在Y上O与$O_1$同值，于是在$SFts(Y, J_1)$中$O_1'DA'$，从而$y_\lambda$是A在$J_1$下的聚点。

②与⑤是①的直接结果

③$\overline{A}_y = A \cup A^d{}_y = (A \cap Y) \cup (A^d \cap Y) = (A \cup A^d) \cap \overline{Y} = \overline{A} \cap Y$

④$\overset{\circ}{A} \cap Y = [\cup\{O \mid A \supset O \in J\}] \cap Y$

$= \cup\{O \cap Y \mid A \supset O \cap Y \in J_1\}$

$= \cup\{O \mid A \supset O \in J_1\}$ ($A \in F(Y) \Rightarrow O$在$X-Y$上取零值$\Rightarrow O \cap Y = O$)

$\subset \cup\{O_1 \mid A \supset O_1 \in J_1\}$ (O_1可以是在$X-Y$上不恒取零值的O在Y上的局限)

$= \overset{\circ}{A}_y$

6　稠密集、无处稠密集

定义6.1　$F_ys(X, J)$中F集A称为稠密的，如果对任$F \in J'$且$F \neq X$，有A不包含在F内

命题6.1　F集A在$Fts(X, J)$中稠密$\Leftrightarrow \overline{A} = X$

事实上，若A稠密，则只有F闭集$X \supset A$，故$\overline{A} = X$。反之，由于$Z = \overline{A}$是含A的最小闭集，故任何不等于X的F闭集都不包含A，从而A稠密。

定义6.2　$Fts(X, J)$中F集A叫无处稠密的，如果对任$B \in J$且$B \neq \phi$有B不包含在$\overline{A}$内

命题6.2　F集A在$Fts(X, J)$中无处稠密$\Leftrightarrow A^{-\circ} = \phi$

事实上，A无处稠密$\Leftrightarrow$F开集中仅$\phi \subset \overline{A} \Leftrightarrow A^{-\circ} = \phi$

命题6.3　F集A在$Fts(X, J)$中无处稠密$\Leftrightarrow \overline{A}'$在$Fts(X, J)$中稠密

事实上，A无处稠密$\Leftrightarrow A^{-\circ} = \phi \Leftrightarrow X = A^{-\circ\prime} = A^{-\prime -} \Leftrightarrow A^{-\prime}$稠密。

系①A是$Fts(X, J)$中无处稠密闭集$\Leftrightarrow A'$是$Fts(X, J)$中稠密开集。②A是$Fts(X, J)$中稠密开集$\Leftrightarrow A'$是$Fts(X, J)$中无处稠密闭集。

定义6.3　$Fts(X, J)$中F集A叫第一类的，如果存在$Fts(X, J)$中的无处稠密集序列$(A_n, n \in N)$使$A = \cup\{A_n, n \in N\}$，所有不是第一类的F集都叫第二类F集。

命题6.4　在$Fts(X, J)$中，下列条件互相等价，①$Fts(X, J)$中的每一稠密开集序列之交在$Fs(X, J)$中是稠密的；②$Fts(X, J)$中的每一第一类集的内部是ϕ；③$Fts(X, J)$中的每一非空开集都是第二类集。

证明　①$\Rightarrow$②　设B是$Fts(X, J)$中第一类集，则$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$其中$(A_n, n \in N)$是$Fts(X, J)$中某无处稠密集序列，今$\overline{A}_n' \in J, n \in N$由命题6.3、系①及命题6.1得$[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{-\prime}]^- = X$，由$A_n^{-\prime} \subset A_n'$得$[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n']^- = X$，于是$B^\circ = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^\circ = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)'^{-\prime} =$

$[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n']^{-\prime} = X' = \phi$

②⇨①　设$(A_n, n\in N)$为Fts(X, J)中稠密开集序列，由命题6.3系②A_n'为无处稠密闭集$n\in N$，从而$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n'$是第一类集，于是由②得$(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^{-} = [\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n']'^{-} = [\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n']^{0\prime} = \phi' = X$　由命题6.1得①

②⇨③　设$A\in J$且$A\neq\phi$，但A是第1类集，由②⇨$A = A^0 = \phi$矛盾

③⇨②　设A是第一类集，但$A^0\neq\phi$，由③A^0是第二类集，从而$A(\supset A^0)$也必是第二类集，矛盾。‖

参　考　文　献

[1]　蒲保明、刘应明：四川大学学报（自然科学版）　1977年第1期

[2]　Murray Eisenberg. Topology

[3]　J.D.鲍姆：点集拓扑原理

[4]　赵万忠、F拓扑空间中的Moore—Smith收敛

[5]　赵万忠　关于F拓扑空间中的分离性　郑工学报　Vol.8.No.3　（1987）

Fuzzy Topological Space

Zhao Wanzhong

（Department of Mathematics and Dynamics）

Abstract: In this paper, We have introduced (little) neighborhood notion and mutual defect notion. For as accumulation point、closure、interior、subspace、base、continuous map and soon basic notion in fuzzy topological space, We have made elementary search.

Key words: (little) neigghbor hood, mutual defect.