第10卷 第3期　　郑州工学院学报　　VOL.10 NO.3
1989年 9 月　　J. ZhengZhou Inst. of Technol.　　sept. 1989

一类非线性伪双曲型方程的第二初值边值问题

杨志坚

（数力系）

提　要：本文用Galerkin方法和Leary—Schauder不动点定理讨论了一类非线性伪双曲型方程。$W_{tt}-[a_0+a_1(W_x)^{2m}]W_{xx}-\lambda W_{xxt}=0$, $a_0>0$, $a_1\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 0$。在矩形域 $[0,\pi]\times[0,t]$ 上的解的存在性．唯一性及解对初值的连续依赖性，并且讨论了当 $\lambda\to 0$时解的渐近性态。

关键词：非线性方程　初值问题　边值问题

对于非线性弹性杆中的非线性波动问题，历来为力学和数学工作者所关注，许多学者都对此作过研究[1-2]。特别在研究具有定常的横杆的纵振动时，在非线性Kelvin固体振动的情况下，会出现一类形如

$W_{tt}-(a_0+a_1W_x^2)W_{xx}-\lambda W_{xxt}=0$　$a_0>0$，$a_1\geqslant 0$，$\lambda\geqslant 0$的非线性伪双曲型方程。文〔3〕讨论了当 $\lambda=0$时该方程的第一初值边值问题的解的存在唯一性。文〔4〕则进一步证明了在一般情况下，该方程的第一初值边值问题的解的存在唯一性，并讨论了当 $\lambda\to 0$时解的性质。

本文利用Galerkin方法及Leary-Schauder不动点定理[5]，更一般地讨论了非线性伪双曲型方程第二初值边值问题（P_λ）。

$$W_{tt}-[a_0+a_1(W_x)^{2m}]W_{xx}-\lambda W_{xxt}=0,\quad 0<x<\pi,\quad t>0 \tag{1,1}$$

$$W_x(0,t)=0,\quad W_x(\pi,t)=0,\qquad t>0 \tag{1,2}$$

$$W(x,0)=f(x),\quad W_t(x,0)=g(x)\quad 0<x<\pi \tag{1,3}$$

（其中$a_0>0$，$a_1\geqslant 0$，$\lambda\geqslant 0$均为常数）

的解的存在唯一性以及当 $\lambda\to 0$时，解的性质。

1　一些引理

我们用$C^k[0,\pi]$，$H^k(0,\pi)$分别表示K次连续可微函数空间和Sobolev空间，特别$H^0(0,\pi)=L_2(0,\pi)$，规定 $|\cdot|_K=\|\cdot\|_{C^k[0,\pi]}$，$\|\cdot\|_K=\|\cdot\|_{H^k(0,\pi)}$，$\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L_2(0,\pi)}$。符号“$\rightarrow\rightarrow$”表示一致收敛，$W_x{}^k=\dfrac{\partial^k W}{\partial X^k}$〕

设方程（1，1）的解$W(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}T^{\lambda}_j(t)\cos jx$，并设

$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\cos jx$，$g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j\cos jx$，代入（1，1），（1，3，）可知，$T_j^{\lambda}(t)$应满足无限常微分方程组的初值问题

$$\ddot{T}_j^{\lambda}+a_0j^2T_j^{\lambda}+\lambda j^2\dot{T}_j^{\lambda}+C_1j\int_0^{\pi}\left(\sum_{l=1}^{\infty}lT_l^{\lambda}\sin lx\right)^{2m+1}\sin jxdx=0,\quad t>0 \qquad (1,4)$$

$$T_j^{\lambda}(0)=\alpha_j,\quad \dot{T}_j^{\lambda}(0)=\beta_j。\ j=0,1,2,\cdots \qquad (1,5)$$

其中　$C_1=\dfrac{2a_1}{(2m+1)\pi}\geqslant 0$

可求得$T_0^{\lambda}(t)=\alpha_0+\beta_0t$，下面我们证明当$j\geqslant 1$时，（1，4），（1，5）的解的存在性，并由此得到（1，1），（1，2），（1，3）的解的存在性。

首先考虑有限常微分方程组的初值问题，

$$\ddot{T}^{\lambda}_{jN}+a_0j^2T^{\lambda}_{jN}+\lambda j^2\dot{T}^{\lambda}_{jN}+C_1\int_0^{\pi}\left(\sum_{l=1}^{N}lT^{\lambda}_{lN}\sin lx\right)^{2m+1}\sin jxdx=0\quad 0<t<T \qquad (1,6)$$

$$T^{\lambda}_{jN}(0)=\alpha_j,\quad \dot{T}^{\lambda}_{jN}(0)=\beta_j\quad j=1,2,\cdots,N \qquad (1,7)$$

引理1　设$h_N=\sum_{j=1}^{N}(\beta_j^2+a_0j^2\alpha_j^2)+\dfrac{C_1}{m+1}\int_0^{\pi}\left(\sum_{j=1}^{N}j\alpha_j\sin jx\right)^{2(m+1)}dx$，如果$\lim\limits_{N\to\infty}h_N<\infty$，则问题（1，6），（1，7）的解存在。

证明：由常数变易法知线性常微分方程组的初值问题

$$\ddot{T}^{\lambda}_{jN}+a_0j^2T^{\lambda}_{jN}+\lambda j^2\dot{T}^{\lambda}_{jN}=-\theta C_1j\int_0^{\pi}\left(\sum_{l=1}^{N}lV_{lN}\sin lx\right)^{2m+1}\sin jxdx\quad 0<t<T \qquad (1,8)$$

$$T^{\lambda}_{jN}(0)=\alpha_j,\qquad \dot{T}^{\lambda}_{jN}(0)=\beta_j\quad j=1,2,\cdots,N \qquad (1,9)$$

对$\forall 0\leqslant\theta\leqslant 1$和$\forall V=(V_{1N},\cdots,V_{NN})\in C[0,T]$存在唯一解
$T^{\lambda}=(T^{\lambda}_{1N},\cdots,T^{\lambda}_{NN})\in C^2(0,T)\cap C[0,T]$。取$C[0,T]$为基本空间，作算子$L_{\theta}$：$C[0,T]\to C[0,T]$，$L_{\theta}V=T^{\lambda}$由（1，8），（1，9）确定。显然对$\forall 0\leqslant\theta\leqslant 1$，$T^{\lambda}=L_{\theta}V$有意义。

当$V\in M\subset C[0,T]$，M为有界集时，设$T^{\lambda(1)}=L_{\theta_1}V$，$T^{\lambda(2)}=L_{\theta_2}V$，$\tilde{T}^{\lambda}=T^{\lambda(1)}-T^{\lambda(2)}=(\tilde{T}^{\lambda}_{1N},\cdots,\tilde{T}^{\lambda}_{NN})$，$|\tilde{T}^{\lambda}|=\sum_{j=1}^{N}|\tilde{T}^{\lambda}_{jN}|$，则$\tilde{T}^{\lambda}$满足问题

$$\ddot{\tilde{T}}^{\lambda}_{jN}+a_0j^2\tilde{T}^{\lambda}_{jN}+\lambda j^2\dot{\tilde{T}}^{\lambda}_{jN}=-(\theta_1-\theta_2)C_1j\int_0^{\pi}\left(\sum_{l=1}^{N}lV_{lN}\sin lx\right)^{2m+1}\sin jxdx,$$
$$0<t<T \qquad (1,10)$$

$$\tilde{T}^{\lambda}_{jN}(0)=0,\quad \dot{\tilde{T}}^{\lambda}_{jN}(0)=0。\ j=1,2,\cdots,N。 \qquad (1,11)$$

(1,10)二端乘以$\dot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN}$，而后在（0，t）上积分并利用cauchy不等式可得，

$$(\dot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN})^2+a_0j^2(\widetilde{T}^{\lambda}_{jN})^2\leqslant\frac{|\theta_1-\theta_2|}{2}\|\dot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN}\|^2+2|\theta_1-\theta_2|\|f_j(V)\|^2$$

其中$f_j(V)=C_1j\int_0^{\pi}\sum_{l=1}^{N}(lV_{lN}\sin lx)^{2m+1}\sin jxdx$，故有

$$|\dot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN}|_0^2+a_0j^2|\widetilde{T}^{\lambda}_{jN}|_0^2\leqslant\frac{|\theta_1-\theta_2|}{2}T|\dot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN}|_0^2+2T|\theta_1-\theta_2||f_j(V)|_0^2$$

不妨设$|\theta_1-\theta_2|T<1$，由上式可得

$|\widetilde{T}^{\lambda}_{jN}|_1\to0$，（$|\theta_1-\theta_2|\to0$），故$|\widetilde{T}^{\lambda}|_1\to0$，（$|\theta_1-\theta_2|\to0$）

这里$|\cdot|_k=|\cdot|_{C^k[0,T]}$，$\|\cdot\|_{L_2[0,T]}=\|\cdot\|$

又对任意给定的θ，$0\leqslant\theta\leqslant1$，设$T^{\lambda(1)}=L_\theta V^{(1)}$，$T^{\lambda(2)}=L_\theta V^{(2)}$，令$\widetilde{T}^{\lambda}=T^{\lambda(1)}-T^{\lambda(2)}=(\widetilde{T}^{\lambda}_{1N},\cdots,\widetilde{T}^{\lambda}_{NN})$，则有

$$\ddot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN}+a_0j^2\widetilde{T}^{\lambda}_{jN}+\lambda j^2\dot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN}=-C_1\theta j\int_0^{\pi}[\sum_{l=1}^{N}l(V^{(1)}_{lN}-V^{(2)}_{lN})\sin lx]g(V^{(1)},V^{(2)})dx \tag{1, 12}$$

$$\widetilde{T}^{\lambda}_{jN}(0)=0,\quad \dot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN}(0)=0。\quad j=1,2,\cdots,N \tag{1,13}$$

其中
$$g(V^{(1)},V^{(2)})=(\sum_{l=1}^{N}lV^{(1)}_{lN}\sin lx)^{2m}+(\sum_{l=1}^{N}lV^{(1)}_{lN}\sin lx)^{2m-1}(\sum_{l=1}^{N}lV^{(2)}_{lN}\sin lx)+\cdots+(\sum_{l=1}^{N}lV^{(1)}_{lN}\sin lx)(\sum_{l=1}^{N}lV^{(2)}_{lN}\sin lx)^{2m-1}+(\sum_{l=1}^{N}lV^{(2)}_{lN}\sin lx)^{2m}$$

方程（1，12）二端乘以$\dot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN}$，而后在（0，t）上积分并利用cauchy不等式可得

$$(\dot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN})^2+a_0j^2(\widetilde{T}^{\lambda}_{jN})^2\leqslant\frac{1}{2T}\|\dot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN}\|^2+\frac{T}{2}\|f_j(V^{(1)},V^{(2)})\|^2$$

其中，$f_j(V^{(1)},V^{(2)})=-C_1\theta j\int_0^{\pi}(\sum_{l=1}^{N}l(V^{(1)}_{lN}-V^{(2)}_{lN})\sin lx]g(V^{(1)},V^{(2)})dx$

故，$|\dot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN}|_0^2+a_0j^2|\widetilde{T}^{\lambda}_{jN}|_0^2\leqslant\frac{1}{2}|\dot{\widetilde{T}}^{\lambda}_{jN}|_0^2+\frac{T^2}{2}|f_j(V^{(1)},V^{(2)})|_0^2$

注意到$|f_j(V^{(1)},V^{(2)})|_0\to0$ （$|V^{(1)}-V^{(2)}|_0\to0$），由上式可得，$|\widetilde{T}^{\lambda}_{jN}|_0\to0$，从而$|\widetilde{T}^{\lambda}|\to0$，（$|V^{(1)}-V^{(2)}|_0\to0$）

易知L_θ: $C[0,T]\to C[0,T]$是一紧变换，且当$\theta=0$时，$T^\lambda=L_\theta V$有唯一的不动点。

设$T^\lambda=(T^\lambda_{1N},\cdots,T_{NN})$是算子$L_\theta$的任一不动点，
即有，

$$\ddot{T}^\lambda_{jN}+a_0j^2T^\lambda_{jN}+\lambda j^2\overset{\frown}{T}{}^\lambda_{jN}=-\theta C_1j\int_0^\pi\left(\sum_{l=1}^N lT^\lambda_{lN}\sin lx\right)^{2m+1}\sin jx dx,\quad 0<t<T \tag{1, 14}$$

$T^\lambda_{jN}(0)=\alpha_j$, $\dot{T}^\lambda_{jN}(0)=\beta_j$　$j=1,2,\cdots,N$。

方程（1，14）二端乘以$\dot{T}^\lambda_{jN}$，对j求和而后在（0，t）上积分可得，

$$\sum_{j=1}^N[(\dot{T}^\lambda_{jN})^2+a_0j^2(T^\lambda_{jN})^2]\leqslant h_N$$

因$\lim\limits_{N\to\infty}h_N<\infty$，故有$|T^\lambda_{jN}|_1\leqslant M_1$　　（1，15）

其中M_1是与N无关的常数。

故由Leary-schauder不动点定理知，算子L_θ至少有一个不动点$T^\lambda\in C[0,T]$。又由常数变易法知，问题（1，6），（1，7）至少有一个解$T^\lambda\in C^2(0,T)\cap C[0,T]$

注解1，如果$f(x)\in H^2(0,\pi)$，$g(x)\in L_2(0,\pi)$，则可保证$\lim\limits_{N\to\infty}h_N<\infty$。

引理2　记$W^\lambda_N=\sum\limits_{j=0}^N T^\lambda_{jN}\cos jx$，$\langle U,V\rangle=\int_0^\pi UVdx$

设$E^\lambda_N(t)=\sum\limits_{j=1}^N j^4(\dot{T}^\lambda_{jN})^2+a_0\sum\limits_{j=1}^N j^6(T^\lambda_{jN})^2+(2m+1)C_1[(W^\lambda_{Nx})^{2m}$,
$(W^\lambda_{Nxxx})^2]$

则有，$\dfrac{dE^\lambda_N(t)}{dt}\leqslant K(E^\lambda_N)^{m+1}$，其中$K=\dfrac{2m(2m+1)(4m^2+2m+1)\pi^{2m+2}C_1}{2^{m+1}(\sqrt{a_0})^{2m+1}}$

证明，用$j^4\dot{T}^\lambda_N$乘以方程（1,6），对j求和可得$\dfrac{d}{dt}\left[\sum\limits_{j=1}^N j^4(\dot{T}^\lambda_{jN})^2+a_0\sum\limits_{j=1}^N j^6(T^\lambda_{jN})^2\right]$

$+\lambda\sum\limits_{j=1}^N j^6(\dot{T}^\lambda_{jN})^2+2C_1\langle(W^\lambda_{Nx})^{2m+1},W^\lambda_{Nxxxxxt}\rangle=0$分部积分二次可得，

$$\langle(W^\lambda_{Nx})^{2m+1},W^\lambda_{Nxxxxxt}\rangle=(2m+1)(2m)\langle(W^\lambda_{Nx})^{2m-1}(W^\lambda_{Nxx})^2,W^\lambda_{Nxxxt}\rangle$$
$$+\frac{2m+1}{2}\frac{d}{dt}\langle(W^\lambda_{Nx})^{2m},(W^\lambda_{Nxxx})^2\rangle-m(2m+1)$$
$$\langle(W^\lambda_{Nx})^{2m-1}W^\lambda_{Nxt},(W^\lambda_{Nxxx})^2\rangle$$

故$$\frac{dE^\lambda_N(t)}{dt}\leqslant C_12m(2m+1)\langle(W^\lambda_{Nx})^{2m-1}W^\lambda_{Nxt},(W^\lambda_{Nxxx})^2\rangle$$
$$-4m(2m+1)C_1\langle(W^\lambda_{Nx})^{2m-1}(W^\lambda_{Nxx})^2,W^\lambda_{Nxxxt}\rangle$$

因$W^\lambda_{Nx}(0,t)=W^\lambda_{Nx}(\pi,t)=0$，由Rolle定理知，存在$\xi\in(0,\pi)$，使$W^\lambda_{Nxx}(\xi,t)=0$。故

$$|W^{\lambda}_{Nx}| \leqslant \int_0^X |W^{\lambda}_{Nxx}|\,dx \leqslant (\pi\int_0^{\pi}|W^{\lambda}_{Nxx}|^2dx)^{1/2} = (\frac{\pi^2}{2}\sum_{j=1}^{N} j^4(T^{\lambda}_{jN})^2)^{1/2}$$

$$\leqslant \pi(\frac{E^{\lambda}_N}{2a_0})^{1/2} \qquad (1, 16)$$

$$|W^{\lambda}_{Nxx}| \leqslant \int_{\xi}^X |W^{\lambda}_{Nxxx}|\,dx \leqslant (\int_0^{\pi}|W^{\lambda}_{Nxxx}|^2dx\cdot\pi)^{1/2} = (\frac{\pi^2}{2}\sum_{j=1}^{N} j^6(T^{\lambda}_{jN})^2)^{1/2}$$

$$\leqslant \pi(\frac{E^{\lambda}_N}{2a_0})^{1/2} \qquad (1, 17)$$

$$|W^{\lambda}_{Nxt}| \leqslant \int_0^X |W^{\lambda}_{Nxxt}|\,dx \leqslant (\pi\int_0^{\pi}|W^{\lambda}_{Nxxt}|^2dx)^{1/2} = (\frac{\pi^2}{2}\sum_{j=1}^{N} j^4(\dot{T}^{\lambda}_{jN})^2)^{1/2}$$

$$\leqslant \pi(\frac{E^{\lambda}_N}{2})^{1/2} \qquad (1, 18)$$

利用估计式（1，16），（1，17），（1，18），进一步可得，

$$|\langle (W^{\lambda}_{Nx})^{2m-1}W^{\lambda}_{Nxt},\ (W^{\lambda}_{Nxxx})^2\rangle| \leqslant [\pi(\frac{E^{\lambda}_N}{2a_0})^{1/2}]^{2m-1}\cdot\pi(\frac{E^{\lambda}_N}{2})^{1/2}\cdot$$

$$\frac{\pi}{2a_0}E_N^{\lambda} = \frac{\pi^{2m+1}}{2^{m+1}(\sqrt{a_0})^{2m+1}}(E^{\lambda}_N)^{m+1}$$

$$|\langle (W^{\lambda}_{Nx})^{2m-1}(W^{\lambda}_{Nxx})^2,\ W^{\lambda}_{Nxxxt}\rangle| \leqslant (2m-1)|\langle (W^{\lambda}_{Nx})^{2m-2}(W^{\lambda}_{Nxx})^3,\ W^{\lambda}_{Nxxt}\rangle|$$

$$+2|\langle (W^{\lambda}_{Nx})^{2m-1}(W^{\lambda}_{Nxx})W^{\lambda}_{Nxxx},\ W^{\lambda}_{Nxxt}\rangle|$$

$$\leqslant (2m-1)[\pi(\frac{E^{\lambda}_N}{2a_0})^{1/2}]^{2m+1}\pi(\frac{E^{\lambda}_N}{2})^{1/2}]$$

$$+2[\pi(\frac{E^{\lambda}_N}{2a_0})^{2m}\cdot(\frac{\pi}{2a_0})^{1/2}(\frac{\pi}{2})^{1/2}E^{\lambda}_N]$$

$$\leqslant (2m+1)\pi^{2m+2}(E^{\lambda}_N)^{m+1}/2^{m+1}(\sqrt{a_0})^{2m+1}$$

故有 $\dfrac{dE^{\lambda}_N(t)}{dt} < K(E^{\lambda}_N)^{m+1}$

引理3 如果 $\lim\limits_{N\to\infty} E^{\lambda}_N(o) = b = \sum\limits_{j=1}^{\infty}[j^4\beta_j^2 + a_0 j^6\alpha_j^2] + (2m+1)C_1\int_0^{\pi}(\sum\limits_{j=1}^{\infty} j\alpha_j\sin jx)^{2m}(\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^3\alpha_j\sin jx)^2dx < \infty$，则存在区间$0\leqslant t\leqslant t^* < t_b$，使$E^{\lambda}_N(t)$在此区间上一致有界。

其中 $t_b = \dfrac{1}{Kmb^m}$。

证明，由引理2知，$\dfrac{dE^{\lambda}_N(t)}{(E^{\lambda}_N)^{m+1}} \leqslant Kdt$，二端对t在(0,t)上积分得，$\dfrac{1}{m}[\dfrac{1}{(E^{\lambda}_N(o))^m} - \dfrac{1}{(E^{\lambda}_N(t))^m}] \leqslant Kt$。即$(E^{\lambda}_N(t))^m \leqslant (E^{\lambda}_N(o))^m[1-Km(E^{\lambda}_N(o))^m t]^{-1} \leqslant$

$b^m[1-Kmb^mt]^{-1}$，故只要取$t_b=\frac{1}{Kmb^m}$，则$(E^\lambda_N(t))^m\leqslant M_1$，从而$E^\lambda_N(t)\leqslant M_2$

$0\leqslant t\leqslant t^*<t_b$，其中$M_1$，$M_2$是与$\lambda$，N无关的常数

注解2，$\lim\limits_{N\to\infty}E^\lambda_N(o)=b<\infty$等价于$f(x)\in H^3(0,\pi)$，$g(x)\in H^2(0,\pi)$。

推论，如果$\lim\limits_{N\to\infty}E^\lambda_N(o)=b<\infty$，$\{T^\lambda_N\}$是问题(1，6)，(1，7)的解序列，则一定存在子列(仍记为)$\{T^\lambda_{jN}\}$，$j=1,\cdots,N$使$T^\lambda_{jN}\rightrightarrows\dot{T}^\lambda_j$，$\dot{T}^\lambda_{jN}\rightrightarrows\dot{T}^\lambda_j(N\to\infty)t\in[0,t^*]$，$t^*<t_b$。

证明，由(1，15)知，$|T^\lambda_{jN}|_1\leqslant M_1$，由(1，6)知

$$\ddot{T}^\lambda_{jN}=-a_0j^2T^\lambda_{jN}-\lambda j^2\dot{T}^\lambda_{jN}-C_1j\int_0^\pi\left(\sum_{l=1}^N lT^\lambda_{lN}\sin lx\right)^{2m+1}\sin jxdx$$

由引理3知，$|j^2T^\lambda_{jN}|\leqslant M_1$，$|j^2\dot{T}^\lambda_{jN}|\leqslant M_1$　$t\in[0,t^*]$

$$\left|C_1j\int_0^\pi\left(\sum_{l=1}^N lT^\lambda_{lN}\sin lx\right)^{2m+1}\sin jxdx\right|$$

$$=\left|(2m+1)C_1\left(\int_0^\pi\sum_{l=1}^N lT^\lambda_{lN}\sin lx\right)^{2m}\left(\sum_{l=1}^N l^2T^\lambda_{lN}\cos lx\right)\cos jxdx\right|$$

$$=\left|(2m+1)C_1\langle(W^\lambda_{Nx})^{2m}W^\lambda_{Nxx},\cos jx\rangle\right|\leqslant(2m+1)C_1\pi^{2m+1}\left(\frac{E^\lambda_N}{2a_0}\right)^{2m+1/2}$$

$\leqslant M_1$，$0\leqslant t\leqslant t^*$

故$|\ddot{T}^\lambda_{jN}|\leqslant M_1$　$t\in[0,t^*]$，这里M_1为与N无关的常数所以$|T^\lambda_N|_2\leqslant M_1$，由Arzela定理即得推论。

引理4　如果$\lim\limits_{N\to\infty}E^\lambda_N(o)=b<\infty$，则级数$\sum\limits_{j=1}^\infty j^6(T^\lambda_j(t))^2$，$\sum\limits_{j=1}^\infty j^4(\dot{T}^\lambda_j(t))^2$在$[0,t^*]$上一致收敛，并且关于$0\leqslant\lambda\leqslant A$ $t\in[0,t^*]$一致有界。A为任意给定的常数。

证明，令$S_n=\sum\limits_{j=1}^n j^6(T^\lambda_j(t))^2$，显然$S_{n+1}\geqslant S_n$，固定n，取$N>n$且N充分大，则有，

$S_n\leqslant\left|S_n-\sum\limits_{j=1}^n j^6(T^\lambda_{jN})^2\right|+\sum\limits_{j=1}^N j^6(T^\lambda_{jN})^2\leqslant1+\frac{1}{a_0}E^\lambda_N(t)\leqslant M_1$，$t\in[0,t^*]$这里用到了$T^\lambda_{jN}\rightrightarrows T^\lambda_j(t)$　$(N\to\infty)$ $(t\in[0,t^*])$

故知级数$\sum\limits_{j=1}^\infty j^6(T^\lambda_j(t))^2$在$[0,t^*]$上一致收敛并且一致有界。同法可知对级数$\sum\limits_{j=1}^\infty j^4(\dot{T}^\lambda_j)^2$有相同结论。

推论，存在与$0\leq\lambda\leq A$无关的常数M_1，使在$[0,t^*]$上一致的有，$\|W^\lambda\|_3+\|W^\lambda_t\|_2\leq M_1$

$|W^\lambda|_2+|W^\lambda_t|_1\leq M_1$。其中$W^\lambda=\sum\limits_{j=0}^\infty T^\lambda_j(t)\cos jx$

证明，由引理4及Sobolev嵌入定理立得

引理5 如果$\lim\limits_{N\to\infty}E^{\lambda}{}_N(o)=b<\infty$，则有$W^{\lambda}{}_N\rightrightarrows W^{\lambda}$，$W^{\lambda}{}_{Nx}\rightrightarrows W^{\lambda}{}_x$ $t\in[0,t^*]$

证明，
$$|W^{\lambda}{}_{Nx}-W^{\lambda}{}_x|\leqslant|\sum_{j=1}^{n}j(T^{\lambda}{}_{jN}-T^{\lambda}{}_j)\sin jx|+|\sum_{j=n+1}^{\infty}jT^{\lambda}{}_{jN}\sin jx|+|\sum_{j=n+1}^{\infty}jT^{\lambda}{}_j\sin jx|$$

这里规定$T^{\lambda}{}_{jN}=0$，$(j>N)$。由引理4知，$\sum\limits_{j=1}^{\infty}j^6(T^{\lambda}{}_j)^2\leq M_1$，$\sum\limits_{j=1}^{\infty}j^6(T^{\lambda}{}_{jN})^2\leq M_1$，

故$|T^{\lambda}{}_j(t)|\leq\frac{M_1}{j^3}$，$|T^{\lambda}{}_{jN}(t)|\leq\frac{M_1}{j^3}$。$t\in[0,t^*]$所以作为收敛级数的余项，当

n充分大时，$|\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}jT^{\lambda}{}_{jN}\sin jx|+|\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}jT^{\lambda}{}_j\sin jx|<\varepsilon/2$

固定n，令$N\to\infty$，注意到$T^{\lambda}{}_{jN}\rightrightarrows T^{\lambda}{}_j(t)$ $t\in[0,t^*]$

故有$|W^{\lambda}{}_{Nx}-W^{\lambda}{}_x|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$，$t\in[0,t^*]$

同法可知$W^{\lambda}{}_N\rightrightarrows W^{\lambda}$，$t\in[0,t^*]$

2 解的存在性

定理1，如果$\lim\limits_{N\to\infty}E^{\lambda}{}_N(o)=b<\infty$，则$T^{\lambda}{}_j(t)$是无限常微分方程组初值问题(1，4)，(1，5)在$[0,t^*]$上的解。

证明，将方程(1，6)对t在(0，t)上积价二次，化为等价的volterra积分方程，

$$T^{\lambda}{}_{jN}(t)=\alpha_j+(\beta_j+\lambda j^2\alpha_j)t+G_jW^{\lambda}{}_{Nx}-\int_0^t\lambda j^2T^{\lambda}{}_{jN}(\tau)d\tau$$

其中 $G_jW^{\lambda}{}_{Nx}=-\int_0^t(t-\tau)\{a_0j^2T^{\lambda}{}_{jN}-C_1j\langle(W^{\lambda}{}_{Nx})^{2m+1},\ \sin jx\rangle\}d\tau$

下面证明$T^{\lambda}{}_j(t)$也满足类似的积分方程，事实上$|T^{\lambda}{}_j-\alpha_j-(\beta_j+\lambda j^2\alpha_j)t-G_jW^{\lambda}{}_x+\int_0^t\lambda j^2T^{\lambda}{}_j(\tau)d\tau|$

$$\leq|T^{\lambda}{}_j-T^{\lambda}{}_{jN}|+|G_jW^{\lambda}{}_{Nx}-G_jW^{\lambda}{}_{jx}|+\int_0^t\lambda j^2|T^{\lambda}{}_j-T^{\lambda}{}_{jN}|d\tau$$

$$\leq(1+j^2a_0t^{*2}+\lambda j^2t^*)|T^{\lambda}{}_j-T^{\lambda}{}_{jN}|_0+C_1jt^{*2}|\langle(W^{\lambda}{}_{Nx})^{2m+1}-(W^{\lambda}{}_x)^{2m+1},\ \sin jx\rangle|$$
$\rightrightarrows 0$ $(N\to\infty)$ $t\in[0,t^*]$

故$T^{\lambda}{}_j(t)$是问题(1，4)，(1，5)的解。$j=1,2,\cdots$ $t\in[0,t^*]$

由定理1立得

定理2，如果$\lim\limits_{N\to\infty}E^{\lambda}{}_N(o)=b<\infty$（亦即$f(x)\in H^3(0,\pi)$，$g(x)\in H^2(0,\pi)$），则问题(1，1)，(1，2)，(1，3)在矩形域$[0,\pi]\times[0,t^*]$上的解存在。

其中 $0<t^*<t_b$，$t_b=\frac{1}{Kmb^m}$

$$K=\frac{2m(2m+1)(4m^2+2m+)\pi^{2m+2}C_1}{2^{m+1}(\sqrt{a_0})^{2m+1}}$$

注解3，当 $\|f(x)\|_3\to 0$，$\|g(x)\|_2\to 0$（亦即 $b\to 0$）或者 $a_1\to 0$ 时，$t_b\to\infty$，从而问题（p_λ）的大范围解存在。

3 解的收敛性

设 $m=1$，$T^\lambda{}_j(t)$ 是问题（1，4），（1，5）之解，则 $W^\lambda(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}T^\lambda{}_j(t)\cos jx$ 是问题（P_λ）之解，记 $\varphi^\lambda{}_j(t)=T^\lambda{}_j(t)-T^0{}_j(t)$，显然 $\varphi^\lambda{}_{i0}(t)\equiv 0$，当 $j\geqslant 1$ 时，$\varphi^\lambda{}_j(t)$ 满足问题

$$\ddot{\varphi}^\lambda{}_j+a_0j^2\varphi^\lambda{}_j=C_1j\int_0^\pi[(U^\lambda{}_x)^3+3W^\lambda{}_xW^0{}_xU^\lambda{}_x]\sin jx\,dx=-\lambda j^2\dot{T}^\lambda{}_j,\quad 0<t<t^* \tag{4，1}$$

$$\varphi^\lambda{}_j(o)=0,\quad \dot{\varphi}^\lambda{}_j(o)=0。\ j=1,2,\cdots。 \tag{4，2}$$

方程（4，1）二端同乘以 $j^2\varphi^\lambda{}_j$，对 j 求和并利用caudy不等式及引理4可得

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}j^2(\dot{\varphi}^\lambda{}_j)^2+a_0\sum_{j=1}^{\infty}j^4(\varphi^\lambda{}_j)^2\Big]-2C_1\langle(U^\lambda{}_x)^3+3W^\lambda{}_xW^0{}_xU^\lambda{}_x,\ U^\lambda{}_{x^3t}\rangle$$

$$=-2\lambda\Big[\sum_{j=1}^{\infty}j^4(\dot{T}^\lambda{}_j)^2-\sum_{j=1}^{\infty}j^4\dot{T}^\lambda{}_j\dot{T}^0{}_j\Big]\leq\lambda K_1,\quad t\in[0,t^*] \tag{4，3}$$

分部积分一次可得

$$-2C_1\langle(U^\lambda{}_x)^3+3W^\lambda{}_xW^0{}_xU^\lambda{}_x,\ U^\lambda{}_{x3t}\rangle=3C_1\frac{d}{dt}\langle(U^\lambda{}_x)^2+(W^0{}_x)^2,\ (U^\lambda{}_{xx})^2\rangle-$$

$$-6C_1\langle U^\lambda{}_xU^\lambda{}_{xt}+W^0W^0{}_{xxt},(U^\lambda{}_{xx})^2\rangle+6C_1\langle U^\lambda{}_xW^0{}_xU^\lambda{}_{xx}+W^\lambda{}_{xx}W^0{}_xU^\lambda{}_x+W^\lambda{}_xW^0{}_{xx}U^\lambda{}_x,\ U^\lambda{}_{xxt}\rangle$$

取

$$G_\lambda(t)=\sum_{j=1}^{\infty}j^2(\dot{\varphi}^\lambda{}_j)^2+a_0\sum_{j=1}^{\infty}j^4(\varphi^\lambda{}_j)^2+3C_1\langle(U^\lambda{}_x)^2+(W^0{}_x)^2,\ (U^\lambda{}_{xx})^2\rangle$$

$$=\frac{2}{\pi}\big[\|U^\lambda{}_{xt}\|^2+a_0\|U^\lambda{}_{xx}\|^2+3C_1\langle(U^\lambda{}_x)^2+(W^0{}_x)^2,\ (U^\lambda{}_{xx})^2\rangle\big]$$

由（4，3）可得

$$\frac{dG^\lambda(t)}{dt}\leq\lambda K_1+6C_1\big[\langle U^\lambda{}_xU^\lambda{}_{xt}+W^0{}_xW^0{}_{xt},\ (U^\lambda{}_{xx})^2\rangle-\langle U^\lambda{}_xW^0{}_xU^\lambda{}_{xx}+W^\lambda{}_{xx}W^0{}_xU^\lambda{}_x$$
$$+W^\lambda{}_xW^0{}_{xx}U^\lambda{}_x,\ U^\lambda{}_{xxt}\rangle\big]$$

下面对方括号内的各项逐项进行估计，利用引理4推论可知，

$$|\langle U^\lambda{}_xU^\lambda{}_{xt}+W^0{}_xW^0{}_{xt},\ (U^\lambda{}_{xx})^2\rangle|\leq M_1\int_0^\pi(U^\lambda{}_{xx})^2dx\leq M_2G_\lambda(t)$$

分部积分一次得

$$|\langle U^\lambda{}_xW^0{}_xU^\lambda{}_{xx},\ U^\lambda{}_{xxt}\rangle|=|\langle W^0{}_x(U^\lambda{}_{xx})^2+U^\lambda{}_xW^0{}_{xx}U^\lambda{}_{xx}+U^\lambda{}_xW^0{}_xU^\lambda{}_{xx},\ U^\lambda{}_{xt}\rangle|$$

利用引理4推论及cauchy不等式知

$$|\langle W^0{}_x(U^\lambda{}_{xx})^2+U^\lambda{}_xW^0{}_{xx}U^\lambda{}_{xx},U^\lambda{}_{xt}\rangle|\leqslant M_1\Big[\int_0^\pi(U^\lambda{}_{xx})^2dx+\int_0^\pi(U^\lambda)_{xt}{}^2dx\Big]\leq M_2G_\lambda(t)$$

$|\langle U^\lambda_x W^0_x U^\lambda_{xxx}, U^\lambda_{xt}\rangle| \leqslant M_1 \| U^\lambda_x U^\lambda_{x3} \| \| U^\lambda_{xt} \| \leq M_1 | U^\lambda_x |_0 \| U^\lambda_{x3} \| \| U^\lambda_{xt} \| \leq$

$\leqslant M_1' \| U^\lambda_{xx} \| \| U^\lambda_{xt} \| \leq M_2 G_\lambda(t) \quad (0 \leq t \leqslant t^*)$

这里应用了下述事实，即$U^\lambda_x \in H'(0, \pi) \hookrightarrow C[0, \pi]$，所以，$|U^\lambda_x|_0 \leq C \| U^\lambda_x \|_1$

$\leq C[\| U^\lambda_x \| + \| U^\lambda_{xx} \|] \leq 2C \| U_{xx}{}^\lambda \|$

故有，$|-\langle U^\lambda_x W^0_x U^\lambda_{xx}, U^\lambda_{xxt}\rangle| \leq M_2 G_\lambda(t)$

类似的方法可以估计出

$|-\langle W^\lambda_{xx} W^0_x U^\lambda_x + W^\lambda_x W^0_{xx} U^\lambda_x, U^\lambda_{xxt}\rangle| \leqslant M_2 G_\lambda(t)$，故有

$\frac{dG_\lambda(t)}{dt} \leqslant \lambda K_1 + M_2 G_\lambda(t)$，$t \in [0, t^*]$。其中$K_1$，$M_2$均为与$\lambda$无关的常数。

因$G_\lambda(t) \geqslant 0$且$G_\lambda(o) = 0$，故由Gronwall不等式得，$G_\lambda(t) \leq \lambda K_1 t^* e^{M_2 t^*}$，$t \in [0, t^*]$。

故$G_\lambda(t) \rightarrow\rightarrow 0$，$(\lambda \rightarrow 0)$，$t \in [0, t^*]$，由此知.

$\| U^\lambda_{xt} \| \rightarrow\rightarrow 0$，$\| U^\lambda_{xx} \| \rightarrow\rightarrow 0$，$(\lambda \rightarrow 0)$ $t \in [0, t^*]$。又因为

$\| U^\lambda \| \leq \| U^\lambda_{xx} \|$，$\| U^\lambda_t \| \leq \| U^\lambda_{xt} \|$，故由Sobolev内插不等式知$\| U^\lambda \|_2 \rightarrow\rightarrow 0$，$\| U^\lambda_t \|_1 \rightarrow\rightarrow 0$，$(\lambda \rightarrow 0)$，$t \in [0, t^*]$。由嵌入定理得，$|U^\lambda|_1 \rightarrow\rightarrow 0$，$|U^\lambda_t|_0 \rightarrow\rightarrow 0$。$(\lambda \rightarrow 0)$，$t \in [0, t^*]$，故有

定理3，设$m=1$，$\lim\limits_{N\rightarrow\infty} E^\lambda_N(o) = b < \infty$，则问题$(P_\lambda)$ $(\lambda \geqslant 0)$在矩形域$[0, \pi] \times [0, t^*]$上的解$W^\lambda(x, t)$存在，并且当$\lambda \rightarrow 0$时，$|W^\lambda - W^0|_1 \rightarrow\rightarrow 0$，$|W^\lambda_t - W^0_t|_0 \rightarrow\rightarrow 0$，$\| W^\lambda_{xx} - W^0_{xx} \| \rightarrow\rightarrow 0$，$\| W^\lambda_{xt} - W^0_{xt} \| \rightarrow\rightarrow 0$，$t \in [0, t^*]$，其中，$W(x, t)$是问题$(P_0)$的解。

4 解对初值的连续依赖性

设$m=1$，$W^\lambda = \sum\limits_{j=0}^{\infty} T^\lambda_j(t) \cos jx$，$\overline{W}^\lambda = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{T}^\lambda_j(t) \cos jx$分别是问题$(P_\lambda)$对应于初始函数$f(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_j \cos jx$，$g(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \beta_j \cos jx$；$\overline{f}(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{\alpha}_j \cos jx$，$\overline{g}(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{\beta}_j \cos jx$的解。令$\psi^\lambda_j(t) = T^\lambda_j(t) - \overline{T}^\lambda_j(t)$，$V^\lambda(x, t) = W^\lambda - \overline{W}^\lambda = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \psi^\lambda_j(t) \cos jx$，则$\psi^\lambda_0(t) = (\alpha_0 - \overline{\alpha_0}) + (\beta_0 - \overline{\beta_0}) t$，当$j \geqslant 1$时，$\psi^\lambda_j(t)$满足问题

$$\ddot{\psi}^\lambda_j + a_0 j^2 \psi^\lambda_j - C_1 j \int_0^\pi [(V^\lambda_x)^3 + 3 W^\lambda_x \overline{W}^\lambda_x V^\lambda_x] \sin jx dx = -\lambda j^2 \dot{\psi}^\lambda_j, \quad 0 < t < t^* \quad (5,1)$$

$$\psi^\lambda_j(o) = \alpha_j - \overline{\alpha_j}, \quad \dot{\psi}^\lambda_j(o) = \beta_j - \overline{\beta_j}, \quad j = 1, 2, \cdots。 \quad (5, 2)$$

方程(5，2)二端同乘以$j^2 \dot{\psi}^\lambda_j$，对j求和可得

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{\infty} j^2 (\dot{\psi}^\lambda_j)^2 + a_0 \sum_{j=1}^{\infty} j^4 (\psi^\lambda_j)^2\right] - 2C_1 \langle (V^\lambda_x)^3 + 3 W^\lambda_x \overline{W}^\lambda V^\lambda_x, V^\lambda_x{}^3{}_t \rangle$$

$$=-2\lambda\sum_{j=1}^{\infty} j^4(\dot{\psi}^\lambda_j)^2\leq 0,\quad t\in[0,\ t^*] \qquad (5,\ 3)$$

令 $F(t)=\frac{2}{\pi}[\|V^\lambda_{xt}\|^2+a_0\|V^\lambda_{xx}\|^2]+3C_1\langle(V^\lambda_x)^2+(\overline{W}^\lambda_x)^2,\ (V^\lambda_{xx})^2\rangle$

利用（5，3）及证明定理3的方法可得估计式，

$\frac{dF(t)}{dt}\leq AF(t),\ t\in[0,\ t^*]$

因 $F(t)\geqslant 0$，故由Gronwall不等式知，

$0\leqslant F(t)\leqslant e^{At^*}F(o),\ t\in[0,\ t^*]$，而

$$F(o)=\frac{2}{\pi}[\|(g(x)-\overline{g}(x))_x\|^2+a_0\|(f(x)-\overline{f}(x))_{xx}\|^2]+3C_1\langle(f(x)-\overline{f}(x))^2_x+(\overline{f}(x))^2_x,\ (f(x)-\overline{f}(x))_{xx}\rangle\to 0,\ (\|(f-\overline{f})_{xx}\|+\|(g-\overline{g})_x\|\to 0)$$

故 $F(t)\to\to 0,\ (\|(f-\overline{f})_{xx}\|+\|(g-\overline{g})_x\|\to 0)\ t\in[0,\ t^*]$ 　　（5，4）

又因，$\psi^\lambda_0(t)\to\to 0,\ \dot{\psi}^\lambda_0(t)\to\to 0\ (|\alpha_0-\overline{\alpha}_0|+|\beta_0-\overline{\beta}_0|\to 0)\ t\in[0,\ t^*]$，所以

得，$\|V^\lambda\|=[\pi(\psi^\lambda_0)^2+\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(\psi^\lambda_j)^2]^{1/2}\to\to 0$

$\|V^\lambda_t\|=[(\dot{\psi}^\lambda_0)^2+\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(\dot{\psi}^\lambda_j)^2]^{1/2}\to\to 0\quad t\in[0,\ t^*]$

$(\|f-\overline{f}\|_2+\|g-\overline{g}\|_1\to 0)$

由(5，4)及Sobolev内插不等式[6]及Sobolev嵌入定理，知，$\|V^\lambda\|_2\to\to 0,\ \|V^\lambda_t\|_1\to\to 0,$
$|V^\lambda|_1\to\to 0,\ |V^\lambda_t|_0\to\to 0,\ (\|f-\overline{f}\|_2+\|g-\overline{g}\|_1\to 0)\ t\in[0,\ t^*]$。故有，

定理4，设 $m=1$，$\lim\limits_{N\to\infty}E^\lambda_N(o)=b<\infty$，$W^\lambda(x,t)$，$\overline{W}^\lambda(x,t)$ 分别是问题（P_λ）在矩形域 $[0,\ \pi]\times[0,\ t^*]$ 上对应于初始函数 $f(x)$，$g(x)$ 和 $\overline{f}(x)$，$\overline{g}(x)$ 的解，则对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $\|f-\overline{f}\|_2+\|g-\overline{g}\|_1<\delta$ 时，$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant *}[|W^\lambda-\overline{W}_\lambda|_1+|W^\lambda_t-\overline{W}^\lambda_t|_0+\|(W^\lambda-\overline{W}^\lambda)_{xx}\|+\|(W^\lambda-\overline{W}^\lambda)_{xt}\|<\varepsilon$

由定理4立得，

定理5，设 $m=1$，$\lim\limits_{N\to\infty}E^\lambda_N(o)=b<\infty$，则问题（$P_\lambda$）在矩形域 $[0,\ \pi]\times[0,\ t^*]$ 上的解是唯一的。其中 $0<t^*<t_b$，t_b 如定理1所示。

参　考　文　献

[1] G.A.Nariboli and A.Sedov, Burgers's—korteweg—De Vries equation for viscoelastic rods

and plates.J.Math.Anal.Appl 32 (1970)

[2] 朱位秋，弹性杆中的非线性波，固体力学学报，2 (1980)

[3] R.WDickey, A quasi—linear evolution equation and the mothed of Galerkin.poceeding of the Amer Math Scie Vol.37 No.1(1973)

[4] P.L.Davis, A quasi—Linear hyperbolic and related third order equation.J.Nath.Anal. Appl Vol.S.No.1(1975)

[5] A.Friedman 抛物型偏微分方程 科学出版社 （第一版）（226—227）（1964）

[6] R.A.ADAMS, 索伯列夫空间，人民教育出版社 （第一版）(97—112)

Second Initial and Boundary Problem of A class of Nonlinear Pseudo—hypoblic Partial Differential Equation

Yang Zijian

(Dept.Math.and mech.)

Abstract: In this paper, By Galerkin method and Leary-Schauder fixed point theorem, We discussed the existence, unicity and continuous dependence for initial functions of A class of second initial boundary problem of nonlinear pseudo-hypoblic partial differential and equation.

$W_{tt}-[a_0+a_1(W_x)^{2m}]W_{xx}-\lambda W_{xxt}=0$ $a_0>0$, $a_1\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 0$ in the rectangular demain$[0,\ \pi]\times[0,\ t^*]$and proved the asymptotic behavior of the solution of the equation when $\lambda\to 0$.

Keywords: non-liner equations, initial-value problem, boundary-value problem