第10卷 第3期　　郑州工学院学报　　VOL.10 NO.3
1989年 9 月　　J.ZhengZhou Inst. of Technol.　　sept.　　1989

受光滑约束系统的机械能守恒问题

李有为

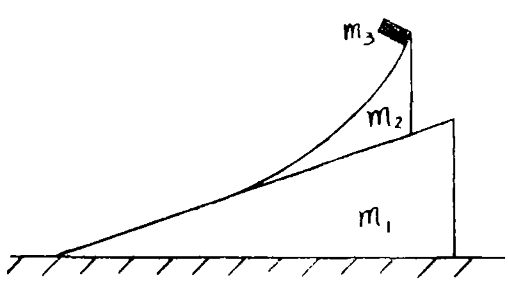
（物理教研室）

提　要　本文普遍地论证了系统内仅存在光滑约束的情况下非保守内力所作的总功为零，从而阐明了该类系统的机械能守恒。

关键词：光滑约束，机械能守恒

1　概述

众所周知，如果一个系统内只有保守力（如弹性力、重力）作功，其它内力和一切外力都不作功（或其它内力和一切外力的总功为零），那么系统内各物体的动能和势能（如重力势能，弹性势能）可以互相转换，但是它们的总和保持不变。这一结论称为机械能守恒定律。



若一个不受外力作用的系统内只有保守力的作用，或者虽然有非保守内力的作用，但所有的非保守内力均不作功，则在惯性参照系中应用机械能守恒定律解决问题是很方便的。但是在有些实际问题中，尤其是系统内各物体之间既存在相互作用又存在着相对运动，如图1所示的情况，系统内各物体间相互作用的各非保守内力相对于地面参照系所作的功不等于零，在系统内仅存在光滑约束的情况下，对于这类问题能否用机械能守恒定律，取决于能否判断各非保守内力所作功之代数和是否为零。笔者在现行的教科书中尚未见到对本问题的一般论证，本文对系统内仅存在光滑约束的情况，给出了系统内各非保守内力所作功之代数和等于零的一般证明，从而在此情况下，相对于惯性参照系，可直接应用机械能守恒定律解决问题。

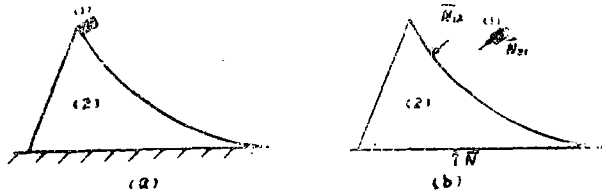
2　证　明

受光滑约束的系统内非保守内功所作的总功为零。下面利用数学归纳法证明上述结论对于n个物体和地球组成的系统是成立的。

1、设对于两个物体和地球组成的系统如图2（a）所示，因为系统内的约束是光滑的，

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

所以系统内各物体所受非保守内力的情况如图2（b）所示。



图中$\overrightarrow{N_{21}}$是物体（2）作用于物体（1）的约束反力，而$\overrightarrow{N_{12}}$是物体(1)作用于物体（2）的约束反力，显然有：

$$\overrightarrow{N_{12}} = -\overrightarrow{N_{21}} \tag{1}$$

$\vec{N}$是地面对物体（2）的约束反力，因此地面对物体（2）的约束是光滑的，所以地面对物体（2）的约束反力$\vec{N}$的方向总是与物体（2）的运动方向垂直，故$\vec{N}$在系统运动的过程中不作功。

设物体（2）在约束反力$\overrightarrow{N_{12}}$的作用下相对于地面发生了一小位移$d\overrightarrow{\Gamma_2}$，则$\overrightarrow{N_{12}}$所作的元功为：

$$dA_2 = \overrightarrow{N_{12}} \cdot d\overrightarrow{\Gamma_2} \tag{2}$$

在此过程中，物体（1）相对于物体（2）的位移为$d\overrightarrow{\Gamma_{12}}$，则相对于地球的位移为：

$$d\overrightarrow{\Gamma_1} = d\overrightarrow{\Gamma_2} + d\overrightarrow{\Gamma_{12}} \tag{3}$$

于是，约束反力$\overrightarrow{N_{21}}$所作的元功为：

$$dA_1 = \overrightarrow{N_{21}} \cdot d\overrightarrow{\Gamma_1} \tag{4}$$

所以系统内的约束反力所作的总元功为.

$$\begin{aligned} dA &= dA_1 + dA_2 \\ &= \overrightarrow{N_{21}} \cdot d\overrightarrow{\Gamma_1} + \overrightarrow{N_{12}} \cdot d\overrightarrow{\Gamma_2} \\ &= \overrightarrow{N_{21}} \cdot (d\overrightarrow{\Gamma_1} - d\overrightarrow{\Gamma_2}) \\ &= \overrightarrow{N_{21}} \cdot d\overrightarrow{\Gamma_{12}} \end{aligned} \tag{5}$$

因为物体（1）和物体（2）之间的约束是光滑的，在光滑约束的情况下，约束反力总是垂直于两物体接触处的公切面而指向物体，而两物体的相对元位移位于接触处的公切面内且指向物体前进的一方，所以物体（1）相对于物体（2）的元位移$d\overrightarrow{\Gamma_{12}}$总是与约束反力$\overrightarrow{N_{21}}$的方向垂直，即：

$$\overrightarrow{N_{21}} \cdot d\overrightarrow{\Gamma_{12}} = 0 \tag{6}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

所以有：$dA = dA_1 + dA_2 = 0$　　(7)

于是我们证明了在只存在光滑约束的情况下，两物体和地球组成的系统在发生任何小位移的过程中，非保守内力所作的总功为零。

为了讨论的方便，我们把dA记为：

$$\begin{aligned} dA &= dA_1 + dA_2 \\ &= \overrightarrow{N_{12}}\cdot d\overrightarrow{\Gamma_2} + \overrightarrow{N_{21}}\cdot d\overrightarrow{\Gamma_1} \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{2}\sum_{j=1}^{2}\overrightarrow{N_{ij}}\cdot d\overrightarrow{\Gamma_j} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

2、假设对于n－1个物体和地球组成的系统上述结论成立，即：

$$\begin{aligned} dA &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-n}\sum_{j=1}^{n=1}\overrightarrow{N_{ij}}\cdot d\overrightarrow{\Gamma_j} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3、对于n个物体和地球组成的系统有：

$$dA = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overrightarrow{N_{ij}}\cdot d\overrightarrow{\Gamma_i}$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\overrightarrow{N_{ij}}\cdot d\overrightarrow{\Gamma_j} + \sum_{i=1}^{n-1}\overrightarrow{N_{in}}\cdot d\overrightarrow{\Gamma_n} + \sum_{j=1}^{n-1}\overrightarrow{N_{nj}}\cdot d\overrightarrow{\Gamma_j} \tag{10}$$

根据（9）式，（10）式的第一项等于零，所以，

$$\begin{aligned} dA &= \sum_{i=1}^{n-1}\overrightarrow{N_{in}}\cdot d\overrightarrow{\Gamma_n} + \sum_{j=1}^{n-1}\overrightarrow{N_{nj}}\cdot d\overrightarrow{\Gamma_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\overrightarrow{N_{in}}\cdot d\overrightarrow{\Gamma_n} + \overrightarrow{N_{ni}}\cdot d\overrightarrow{\Gamma_i}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

因为：$\overrightarrow{N_{in}} = -\overrightarrow{N_{ni}}$

所以：$$dA = \sum_{i=1}^{n-1}\overrightarrow{N_{ni}}\cdot\left(d\overrightarrow{\Gamma_i} - d\overrightarrow{\Gamma_n}\right) \tag{12}$$

下面分几种情况对（12）式加以说明：

（1）若第i个物体和第n个物体之间不存在约束，即 $\overrightarrow{N_{ni}} = 0$，所以$dA = 0$。

（2）若第i个物体和第n个物体之间存在着约束，相 $\overrightarrow{N_{ni}} \neq 0$，但两物体之间没有相对运动，则 $d\overrightarrow{\Gamma_n} = d\overrightarrow{\Gamma_i}$，所以$dA = 0$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

（3）若第i个物体和第n个物体之间存在着约束，即 $\overrightarrow{N_{ni}} \neq 0$，并且两物体之间有相对运动，即 $d\overrightarrow{\Gamma_i} \neq d\overrightarrow{\Gamma_n}$，此时，$d\overrightarrow{\Gamma_i}$可以表示为：

$$d\overrightarrow{\Gamma_i} = d\overrightarrow{\Gamma_n} + d\overrightarrow{\Gamma_{in}} \qquad (13)$$

（13）式中 $\overrightarrow{\Gamma_{in}}$为第i个物体相对于第n个物体的小位移。于是：

$$dA = \sum_{i=1}^{n-1} \overrightarrow{N_{ni}} \cdot d\overrightarrow{\Gamma_{in}}$$

因为物体之间的约束是光滑的，如前所述，约束反力的方向总是与物体之间相对运动的方向垂直，所以 $\overrightarrow{N_{ni}} \cdot d\overrightarrow{\Gamma_{in}} = 0$，即$dA = 0$。

于是我们证明了对于n个物体和地球组成的系统，在系统内只存在光滑约束的情况下，非保守内力（即约束反力）所作的总功为零。

3 结论

通过以上的讨论可以得出如下的结论：如果一个系统内只有保守力作功，其它内力和一切外力都不作功；或者一切外力都不作功，同时系统内仅存在着光滑的约束，则系统的机械能守恒。

参 考 文 献

[1] 程守洙，江之永《普通物理学》第一册，高等教育出版社，1986.4
[2] 周衍柏，《理论力学教程》，人民教育出版社，1979,9

Mechanical Energy Conservation for a System under Smooth Constraints

Li Youwei
(Department of Mathematics, Physics and Mechenicns)

Abstract: For a general case this paper demonstrates that the total work due to non-conservative internal forces will be zero if there exist only smooth constraints in the system. That is to say, the mechanical energy of the system is conservative.

Key words Smooth Constraint, Conservation of Mechenical Energy.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net