具部分反射边界条件的非线性迁移方程的适定性

徐建国

(运筹学教研室)

提 要: 本文给出了一定条件下的一类具广义边界条件的非线性积分——微分方程解的存在性、唯一性及渐近稳定性结论. 将其结果与线性迁移问题相比较, 推广了 *D.G.Wilson* 的相应结论.

关键词: 迁移方程, 部分反射边界, 耗散算子, 算子半群, 稳定性

1 引 言

本文考虑具一般形式的部分反射边界条件的非线性迁移方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N(x,v,t)}{\partial t} + v\,\mathrm{grad}_x N(x,v,t) = -\sum(x,v,N) + \int_{\Omega_2} K(x,v,v',N(x,v',t))dv' \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x\in\Omega_1,\quad v\in\Omega_2,\quad t>0 \qquad (1.1) \\ N(x,v,0) = N_0(x,v) \qquad (1.2) \\ N(x_{br},v,t) = \alpha_r\sigma_r N(x_{br},v,t),\quad v_r>0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_{br}=0\text{或}x^{br}=c_r \qquad (1.3) \\ N(x^{br},v,t) = \beta_r\sigma_r N(x^{br},v,t),\quad v_r<0 \end{cases}$$

其中$N_{(x,v,t)}$表示中子密度函数, x、v分别为中子位置与速度; Ω_1、Ω_2为n维欧氏空间中的开子集, $x=(x_1, x_2, \cdots, x_r, \cdots, x_n)\in\bar{\Omega}_1=\prod_{r=1}^{n}[0,c_r]$, $v=(v_1, \cdots, v_r, \cdots, v_n)\in\Omega_2$; 边界方程(1.3)中$\sigma_r$为一算子, 其定义为[6]:

$$\sigma_r(N(x,(v_1, v_2, \cdots, v_r, \cdots, v_n),t)) = N(x,(v_1, v_2, \cdots, -v_r, \cdots, v_n),t)$$

α_r、β_r均为常数且$0\leqslant\alpha_r$、$\beta_r\leqslant 1(r=1, 2, \cdots, n)$, $N_0(x,v)$, 为中子初始分布密度函数.

特别地, 若$\sum(x,v,N)=v\sum(x,v)N$, $K(x,v',v,N)=K(x,v',v)N$, $\alpha_r=\beta_r=0(r=1\sim n)$, 此时迁移方程(1.1)–(1.3)即成为零边界（即真空介质或反应堆由黑体包围）线性 Maxwell–Boltzmann 积分——微分方程. 关于它的讨论结论已很多（可参见文献[1]–[3]）; 本文将讨论非线性方程(1.1)–(1.3)的适定性.

---

①收到日期: 1988.06.18

令 $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$，取基本的相空间为 Ω 上所有绝对平方可积函数按下述内积和范数：

$$\langle f,\ g\rangle=\int_\Omega f(x,v)\overline{g(x,v)}dxdv \qquad \|f\|=\langle f,\ f\rangle^{1/2}$$

组成的*Hilbert*空间 $L_2(\Omega)$。令下列算子：

$(1B_0\ f)_{(x,v)}=-v\mathrm{grad}_x f(x,v)$，　$D(1B_0)=\{f\in L_{2(\Omega)}|v\cdot\mathrm{grad}_x f\in L_2(\Omega)$，f满足边界条件(1.3)$\}$.

$$(1F_1\ f)_{(x,v)}=-\sum(x,v,f) \qquad D(1F_1)=L_2(\Omega)$$

$$(1F_2\ f)_{(x,v)}=\int_{\Omega_2}K(x,v,v',f(x,v'))dv' \qquad D(1F_2)=L_2(\Omega)$$

$$1F=1F_1+1F_2 \qquad D(1F)=L_2(\Omega)$$

则 $\overline{D(1B_0)}=L_2(\Omega)$[3]且 $1B_0$，1F分别为其定义域上的线性、非线性算子。问题(1.1)－(1.3)可表达为下述发展方程：

$$\begin{cases}\dfrac{dN}{dt}=1B_0N+1F(N) & (\mathrm{I})\\ N(0)=N_0 & (\mathrm{II})\end{cases}$$

的 Cauchy 问题，研究系统(1.1)–(1.3)解的存在，唯一及稳定性即可转化为(Ⅰ)(Ⅱ)的相应问题。

2　问题(1.1)–(1.3)解的适定性

我们先给出一些定义和假设。

定义 1：N(t)称为复 Hilbert 空间 $L_2(\Omega)$内(Ⅰ)(Ⅱ)的一个解，如果它满足下列条件：

①对 $\forall t\geqslant 0$，$N(t)\in D(1B_0)$，N(t)是*Lipschitz*连续的且 $N(0)=N_0$；

②强导数 $\dfrac{dN(t)}{dt}$ 存在，且 $\dfrac{dN(t)}{dt}=1B_0N(t)+1F(N(t))$.

定义 2：Hilbert 空间内的线性算子 1H 称为是耗散的，若存在常数 $\beta>0$ 使得：

$$\mathrm{Re}\langle 1Hf,\ f\rangle\leqslant-\beta\|f\|^2, \qquad \forall f\in D(1H)$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 Hilbert 空间内积，β 称为耗散常数，若 $\beta>0$，称 1H 是严格耗散的.

本文假定：

(H1)$\sum(x,v,N)$为定义在 $x\in\Omega_1$，$v\in\Omega_2$，$N\in L_2(\Omega)$上的函数，$\sum(x,v,N)\in L_2(\Omega)$，且存在一实值函数$\sum(x,v)$满足：

$$\sum\nolimits_0=\operatorname*{essSup}_{(x,v)\in\Omega}\sum(x,v)<\infty \tag{2.1}$$

使得：$|\sum(x,v,N_1)-\sum(x,v,N_2)|\leqslant\sum(x,v)|N_1-N_1|$ 　　N_1，$N_2\in L_2(\Omega)$

(H2)$k(x,v,v',N)$为定义在 $x\in\Omega_1$，v，$v'\in\Omega_2$，$N\in L_2(\Omega)$上的函数，$k(x,v,v',N)\in L_2(\Omega_1 x\Omega_2 x\Omega_2)$，且存在实函数 $k(x,v,v')$满足：

$$k_0=\{\int_{\Omega_2}[\operatorname*{essSup}_{x\in\Omega_1}(\int_{\Omega_2}|k(x,v,v')|^2dv']dv\}^{1/2}<\infty \tag{2.2}$$

使得: $|k(x,v,v',N_1)-k(x,v,v',N_2)|\leqslant k(x,v,v')|N_1-N_2| \qquad N_1,\ N_2\in L_2(\Omega)$

引理2.1: $1B_0$是一个耗散算子，且对$\forall\alpha>0$，$(\alpha I-1B_0)^{-1}$存在，$\|(\alpha I-1B_0)^{-1}\|\leqslant 1/\alpha$.

证明: 取$f\in D(1B_0)$，$x=(x_1,\cdots,x_r,\cdots,x_n)$，$v=(v_1,\cdots,v_r,\cdots,v_n)$;

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\langle 1B_0 f,f\rangle &= -\mathrm{Re}\int_\Omega v\,\mathrm{grad}_x f(x,v)\overline{f(x,v)}dxdv\\
&= -\mathrm{Re}\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\sum_{r=1}^{n} v_r\frac{\partial f(x,v)}{\partial x_r}\overline{f(x,v)}dxdv\\
&-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\int_{\Omega_2}dv\int_{\Omega_1}v_r\frac{\partial(|f(x,v)|^2)}{\partial x_r}dx\\
&-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\int_{\Omega_2}dv\int_{\Omega_1'}v_r(|f(x,v)|^2|_{x_r=0}^{x_r=c_r}dx'\\
&-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\int_{\Omega_2}dv\int_{\Omega_1'}v_r[|f((x',c_r),v)|^2)-|f(x',0),v)|^2]dx'
\end{aligned}$$

其中Ω_1'表示Ω_1中除去$(0,c_r)$而成的$n-1$维欧氏空间中的一长方体,

$$\begin{aligned}
x' &= (x_1,\cdots,x_{r-1},x_{r+1},\cdots,x_n),\\
(x',0) &= (x_1,\cdots,x_{r-1},0,x_{r+1},\cdots,x_n),\\
(x',c_r) &= (x_1,\cdots,x_{r-1},c_r,x_{r+1},\cdots,x_n).
\end{aligned}$$

又:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_2}dv\int_{\Omega_1'}v_r[|f((x',c_r),v)|^2-|f((x',0),v)|^2]dx'\\
&=\int_{v_r>0}dv\int_{\Omega_1'}v_r[|f((x',c_r),v)|^2-|f((x',0),v)|^2]dx'\\
&+\int_{v_r<0}dv\int_{\Omega_1'}v_r[|f((x',c_r),v)|^2-|f((x',0),v)|^2]dx'\\
&=\int_{v_r>0}dv\int_{\Omega_1'}v_r[|f((x',c_r),(v_1,\cdots,v_r,\cdots,v_n))|^2\\
&-\alpha_r^2|f((x',0),(v_1,\cdots,-v_r,\cdots,v_n))|^2]dx'\\
&+\int_{v_r<0}dv\int_{\Omega_1'}v_r[\beta_r^2|f((x',c_r),(v_1,\cdots,v_r,\cdots,v_n))|^2\\
&-|f((x',0),(v_1,\cdots,-v_r,\cdots,v_n))|^2]dx'\\
&=\int_{v_r>0}dv\int_{\Omega_1'}v_r[(1-\beta_r^2)|f((x',c_r),(v_1,\cdots,v_r,\cdots,v_n))|^2\\
&+(1-\alpha_r^2)|f((x',0),(v_1,\cdots,-v_r,\cdots,v_n))|^2]dx'\geqslant 0
\end{aligned}$$

故$\mathrm{Re}\langle 1B_0 f,f\rangle\leqslant 0$; 从而$1B_0$为耗散常数$\beta=0$的耗散算子. 由$1B_0$耗散性知，对任意$f\in D(1B_0)$，$\alpha>0$，$\|(\alpha I-1B_0)f\|\ \|f\|\geqslant\mathrm{Re}<(\alpha I-1B_0)f,f\geqslant\alpha\langle f,f\rangle=\alpha\|f\|^2$

从而有: $\|(\alpha I-1B_0)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\alpha}$成立，引理证毕.

引理2.2：$1B_0$是可闭的，若$1B=\overline{1B_0}$(即1B为$1B_0$的闭包)则1B亦是耗散算子，且对$\forall\alpha>0$，$Re(\alpha I-1B_0)=L_2(\Omega)$.

证明：此引理证明参见[7]可类似得到.

由上述引理 2.2，据 Lumcr-Phillips 定理，1B 为一压缩 C_0 半群的无穷小生成元[4]．根据本文上述假设(H1)(H2)参照[7]很容易证明非线性算子 1F 是 $L_2(\Omega)$上的 Lipschitz 连续算子．据此由线性算子半群的非线性 Lipschitz 扰动理论[4] (Chap.6, Th.16)，我们得到下述定理：

定理 2.1：设(H1)(H2)成立，则对任意初始分布$N_0\in D(1B_0)$，Cauchy 问题(Ⅰ)(Ⅱ)即迁移系统(1.1)-(1.3)存在唯一解 $N(x,v,t)$.

如果$\sum(x,v,N)$中包含一线性项，即$\sum(x,v,N)=\sum_1(x,v)N+\sum_2(x,v,N)$，且若$\sum_1(x,v)$是本性有界的，$\sum_2(x,v,N)$满足(H1)，则由定理 2.1 知系统的解存在唯一，因为$\sum_1(x,v)N$亦是 Lipschitz 连续的．但倘若$\sum_2(x,v,N)$，$K(x,v,v',N)$仅在原点的邻域内满足 Lipschitz 条件，(即局部 Lipschitz 连续)，其全局解未必存在，即对$\forall t>0$，方程(1.1)-(1.3)的解不一定存在．

设$B_\xi=\{N\in L_2(\Omega)\,|\,\|N\|\leq\xi\}$，记$\lambda_0^*=\underset{(x,v)\in\Omega}{\operatorname{essinf}}\,Re\sum_1(x,v)$;

对下述迁移方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N}{\partial t}+v\cdot grad_x N+\sum_1(x,0)N+\sum_2(x,v,N)=\int_{\Omega_2}k(x,v,v'N(x,v',t)dv' \\ N(x_{br},v,t)=\alpha_r\sigma_r N(x_{br},v,t) \qquad v_r>0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_{br}=0\text{或}x^{br}=c_r \\ N(x^{br},v,t)=\beta_r\sigma_r N(x^{br},v,t) \qquad v_r<0\end{cases}\qquad(*)$$

有如下定理成立：

定理 2.2：若$\sum_2(x,v,N)$，$K(x,v,v',N)$在B_ξ上分别满足(H1)(H2)且$\sum_2(x,v,0)=K(x,v,v'0)=0$，$\sum_1(x,v)$在 Ω 上本性有界，设 $\lambda_0^*>0$，则对$\forall N_0(x,v)\in B_\xi$ (B_ξ的内部)，存在 $t_0>0$，当 $0<t<t_0$ 时，总有满足(＊)的解 $N(x,v,t)$存在，且$N(x,v,0)=N_0(x,v)$；若另假设$\sum_0+k_0<\lambda_0^*$，则(＊)的解 $N(x,v,t)$对$\forall t\in[0,+\infty)$均存在．进而若$\sum_0+k_0=\lambda_0^*$，系统的解是稳定的；若$\sum_0+k_0<\lambda_0^*$，解是指数渐近稳定的（稳定性是 Lyapunov 意义下的含义）.

证明：令算子$(CN)_{(x,v)}=-\sum_1(x,v)N$，$D\mathbb{C}=L_2(\Omega)$;

则：$Re\langle\mathbb{C}N,N\rangle=-Re\langle\sum_1(x,v)N,N\leq-\lambda_0^*\|N\|^2$

此时：$1F_1(N)=-\sum_2(x,v,N)$，1F，$1F_2$，定义同§1.

则：$\|1F(N_1)-1F(N_2)\|\leq(\sum_0+k_0)\|N_1-N_2\|$，$\forall N_1$，$N_2\in B_\xi$（其证明参见[7]）．

定义$L_2(\Omega)$到$L_2(\Omega)$内的映象G如下：

$$G(N)=\begin{cases}1F(N) & \|N\|\leq\xi \\ 1F(\xi N/\|N\|) & \|N\|>\xi\end{cases}$$

则G是1F从B_ξ到整个空间的延拓．又已知半径压缩映象：

$$1P(N)=\begin{cases}(N) & \|N\|\leqslant\xi\\ \xi N/\|N\| & \|N\|>\xi\end{cases}$$

有不等式：

$$\|1PN_1-1PN_2\|\leqslant(\|N_1-N_2\|,\quad N_1,\ N_2\in L_2(\Omega)$$

从而：

$$\|G(N_1)-G(N_2)\|\leqslant(\sum_0+k_0)\|1PN_1-{}^1PN_2\|$$
$$\leqslant(\sum_0+k_0)\|N_1-N_2\|$$

$\because G(0)=1F(0)=0$故$\|G(N)\|\leqslant(\sum_0+k_0)\|N\|$，从而由定理2.1知对$\forall N_0\in D(1B_0)$，方程$\frac{dN}{dt}=1B_0N+CN+GN$存在唯一解$N(x'v't)$，并且$N(x'v'0)=N_0$．

又对$\forall t\in[0,+\infty)$：

$$\frac{d\|N(t)\|^2}{dt}=2R_e\langle\frac{dN(t)}{dt},\ N(t)\rangle$$
$$=2R_e\langle 1B_0N+CN+GN,\ N\rangle$$
$$\leqslant-2(\lambda_0^*-\sum_0-k_0)\|N(t)\|^2 \tag{2.3}$$

根据*Gronwall*不等式得到：

$$\|N(t)\|\leqslant e^{(\sum_0+k_0-\lambda_0^*)t}\|N_0\|\qquad(t\geqslant0) \tag{2.4}$$

若$N_0\in D(1B_0)\bigcap B_\xi$，则$\|N_0\|<\xi$，所以当$\lambda_0^*=\sum_0+k_0$时存在$t_0>0$，使得当$0\leqslant t<t_0$时$\|N(t)\|<\xi$，又因$\|N(t)\|\leqslant\xi$时$G(N(t))=1F(N(t))$，故方程(＊)在$t\in[0,t_0)$时存在唯一解$N(x,v,t)$．

另一方面，如果$\lambda_0>\sum_0+k_0$，由(2.4)对$\forall t\in[0,+\infty)$，$\|N(t)\|\leqslant\|N_0\|<\xi$，此时方程(＊)存在全局解，存在性得证，下证唯一性．

若$N_1(t)$，$N_2(t)$为系统(＊)的二解，且$N_1(0)=N_2(0)=N_0$，由(2.3)式看出：

$$\frac{d}{dt}(\|N_1(t)-N_2(t)\|^2\leqslant-2(\lambda_0^*-\sum_0-k_0)\|N_1(t)-N_2(t)\|^2$$

从而(2.4)式对$N(t)=N_1(t)-N_2(t)$成立．但因$N(0)=0$故$\|N_1(t)-N_2(t)\|=0$．从而$N_1(t)=N_2(t)$．

根据上述证明，若$\lambda_0^*=\sum_0+k_0$，有$\|N(t)\|\leqslant\|N_0\|$，从而解$N(t)$在*Lyapunov*意义下是稳定的，如果$\lambda_0^*>\sum_0+k_0$，$\|N(t)\|\leqslant e^{(\sum_0+k_0-\lambda_0^*)}\|N_0\|\to0(t\to+\infty)$，此时$N(t)$是指数渐近稳定的，至此定理所有结论证毕．

3 与线性迁移问题的比较

根据上节定理 2.1，定理 2.2，直接可得下述线性迁移系统解的适定性之结论，它包含了 D.G.Wilson [6] 的结果（[6]为证明其结果采用了相当麻烦的过程）。

定理 3.1：对给定的线性迁移系统：

$$\frac{\partial N(x,v,t)}{\partial t} + v\,\mathrm{grad}_x N(x,v,t) + \sum(x,v)N(x,v,t) = \int_{\Omega_2} k(x,v,v')N(x,v,t)dv' + q(x,v)$$

若 $N(x,v,t)$满足部分反射边界条件(1.3)，且若$\sum(x,v)$，$k(x,v,v')$分别在 Ω，$\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3$ 上本性有界（或更弱地，$k(x,v,v')$只满足(H2))，$q(x,v)\in L_2(\Omega)$，则对任意$N_0\in D(1B_0)$上述迁移方程在 L^2 $(\Omega\times(0,\infty))$ 上存在唯一性的全局解 $N(x,v,t)$满足 $N(x,v,0)=N_0$，且若$\sum_0=k_0$（$\sum_0$，k_0 分别记为$\sum(x'v)$，$k(x,v,v')$的本性界）则其解是稳定的；而当$\sum_0>k_0$ 时，解是指数渐近稳定的。

致谢：本文写作得到中科院系统科学研究所朱广田研究员、西安交大王绵森副教授两位导师的指导和帮助，在此谨表衷心感谢!

参 考 文 献

【1】 Davison, B.. Neutron Transport Theory. Oxford University Press, 1957

【2】 Lenhner, J & Wing, G.M.. Duke Math J.. 23(1956), PP.125-142

【3】 Jorgens, K.. Commun. Pure Appl. Math.. 11(1958), PP.219-243

【4】 Pazy, A.. Semigroups Theory of Linear OPerators and Application to Partial Differential Equations. Springer Verlay, New York, 1983

【5】 Taylor, A.E.. Introduction to Functional Analysis. New York, 1958

【6】 Wilson, D. G. J.Math. and. Appl. 47(1974), PP182-209

【7】 徐建国. 郑州工学院学报. 1988年 第3期

【8】 Xu Jianguo(徐建国), Wang Miansen(王绵森) and Zhu Guangtian(朱广田). J.Sys. Sci. Math. Sci. (1)1989 PP14-21(in English)

On Well Posed Behavior of the Solution for Nonlinear Transport Equations With Partial Reflecting Boundary Conditions

Xu Jianguo

(Room of Operations ResearchTeaching and Researching)

Abstract: In this paper, the conclusion of existence, uniquness and asymptotic stability of the solution for a class of nonlinear integral differential equations with generalized boundary con-ditions are given under certain assumptions. Comparition between the conclusions with linear transport problem is made and the D.G.Wilson's canclusion is generlized.

Keyworads: transport equation, partial relection boundary, dissipative operator, semigroup of operator, stability