

一个非线性四阶自治电路中的 超混沌振荡

杨育霞 王俊鹄 高金峰

(郑州工学院计算机与自动化系)

摘 要: 本文研究了一个具有非线性电容元件的四阶自治电路中的非线性动力性质。计算机模拟和电路实验表明, 该电路的动态演变序列是丰富多样的, 即随着分岔参数的变动, 电路的振荡制式会有如下的演变: 超混沌-亚超混沌-混沌-拟周期-混沌-拟周期-混沌-拟周期-周期-混沌-拟周期-周期。本文的计算机模拟结果与电路实验结果在定性上是一致的。

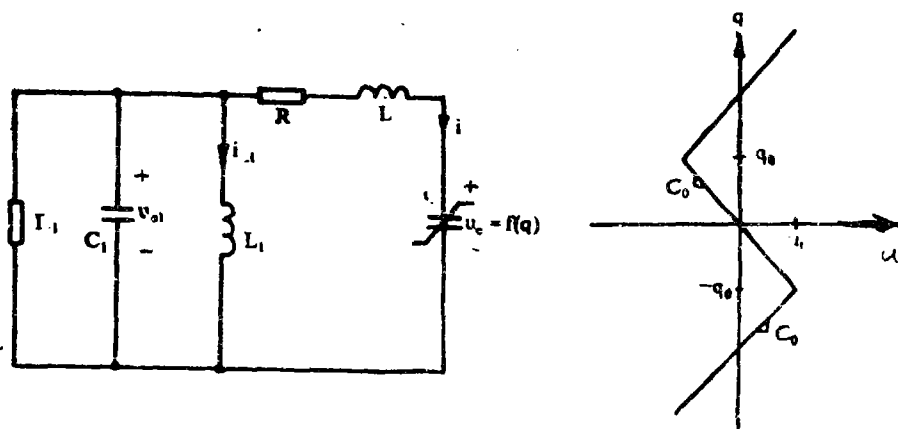
关键词: 超混沌, 亚超混沌, 李雅普诺夫指数, 庞卡莱映射, 非线性电路, 混沌
中国图书分类号: TM133

电子电路中混沌现象的研究已经引起了广泛的兴趣, 尤其是三维自治电路和二维非自治电路的研究已经比较充分, 并发表了许多优秀的文章[1]~[4]。近来, 一些四阶自治电路中超混沌现象的研究结果也相继发表[6]~[8]。但是, 这些电路都局限在所谓电路族(the circuit family) [7]范围内。即在这个族中的任何一个电路都是由一个线性网络 N 和一个具有分段线性的非线性电阻所组成, 其中线性网络 N 由 R 、 L 、 C 及线性负电阻 R 组成。而本文所研究的电路, 是用一个分段线性的荷控电容代替了上述的分段线性电阻, 如图 1 所示。

超混沌在[5]中的定义为具有超过一个正的李雅普诺夫指数的混沌吸引子, 它的动态扩张超过一个方向。超混沌现象只能从四阶以上电路中获得。因为必须总有一个李雅普诺夫指数为零, 并且必须至少有一个负指数才能成为吸引子。

在图 1 的电路中, 我们分别用计算机模拟和实验的方法观察到了超混沌、亚超混沌、混沌、拟周期和周期现象。这样丰富的动态形态, 是到目前为止所发表的论文中所没有见到的。

* 收稿日期: 1990.12.07



(a) 电路原理图

(b) 非线性电容 $q \sim v$ 曲线

图1 具有超混沌状态的四阶自治电路

1 计算机模拟

1.1 状态方程

考虑图 1(a) 的电路。这里, 非线性电容是由图 1(b) 所示的 $q \sim v$ 特性的荷控分段线性电容来描述的。— R 描述了一个负电阻。其它元件都是线性的, 无源的。选取 q 、 i 、 u_{c1} 、 i_{L1} 作为状态变量, 则状态方程为:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = i \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}f(q) - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u_{c1} \\ \frac{du_{c1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} + \frac{1}{R_1 C_1}u_{c1} - \frac{1}{C_1}i_{L1} \\ \frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1}u_{c1} \end{cases} \quad (1)$$

这里, q 、 i 、 u_{c1} 、 i_{L1} 分别指的是非线性电容极板上的电荷, 流过 L 的电流、 C_1 两端的电压, 流过 L_1 的电流。 $f(q)$ 是图 1(b) 所示的分段线性函数, 由下式给出:

$$u_c = f(q) = \frac{1}{C_0}q + \frac{1}{C_0}|q - q_0| - \frac{1}{C_0}|q + q_0| \quad (2)$$

为了便于计算机进行数值模拟, 我们对式(1)和式(2)进行了归一化处理。令:

$$x_1 \triangleq \frac{q}{q_0} \quad x_2 \triangleq \frac{\sqrt{LC_0}}{q_0}i \quad x_3 \triangleq u_{c1} \quad x_4 \triangleq \frac{\sqrt{L_1 C_1}}{q_0}i_{L1}$$

$$\tau \triangleq \frac{t}{\sqrt{LC_0}} \quad x_3 \triangleq f(x_1) = \frac{q_0}{C_0} (x_1 + |x_1 - 1| - |x_1 + 1|)$$

整理得:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -(x_1 + |x_1 - 1| - |x_1 + 1|) - R\sqrt{\frac{C_0}{L}}x_2 + \frac{C_0}{q_0}x_3 \\ \frac{dx_3}{d\tau} = -\frac{q_0}{C_1}x_2 + \frac{\sqrt{LC_0}}{R_1C_1}x_3 - \frac{q_0}{C_1}\sqrt{\frac{LC_0}{L_1C_1}}x_4 \\ \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{\sqrt{L_1LC_1C_0}}{L_1q_0}x_3 \end{cases} \quad (3)$$

选择参数: $L_1 = 0.2H$, $L = 0.1H$, $C_1 = 0.04\mu f$, $C_0 = 0.008\mu f$,

$R_1 = 20K\Omega$, $q_0 = 1.49 \times 10^{-8}C$, R 可调.

对式(3), 我们选 R 作为分岔参数.

1.2 相空间吸引子模拟及频谱分析

我们采用四阶龙格—库塔算法, 步长 $H=0.25$ 对式(3)进行数值积分, 并将吸引子投影到 (x_3, x_4) 相平面上, 据此来研究电路的振荡制式. 图 2(a)~(e)分别表示超混沌态、亚超混沌态、混沌态、拟周期态和周期态的典型相空间吸引子投影图.

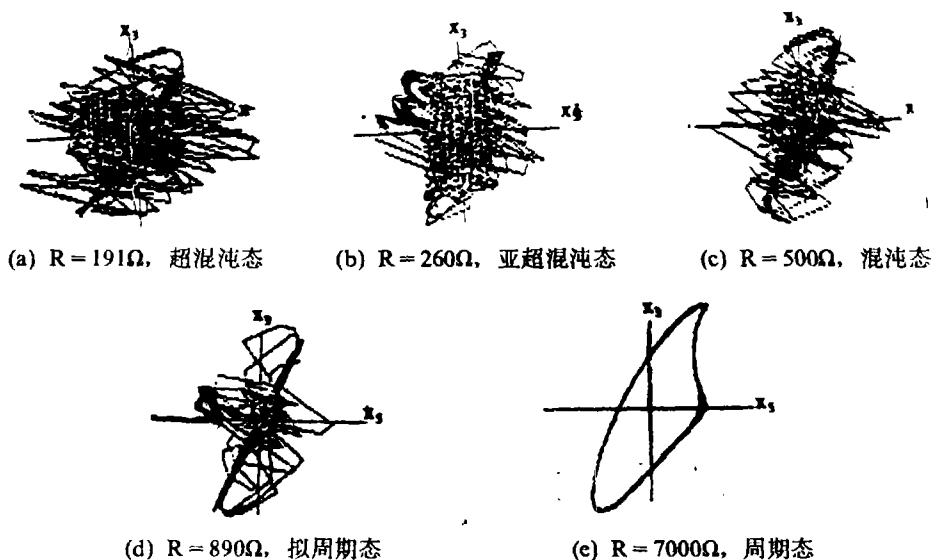


图2 计算机模拟的相空间吸引子

周期态的吸引子是相空间的闭合曲线, 故根据吸引子轨线的闭合性可以直接加以判断. 但拟周期、混沌、亚超混沌、超混沌态都是非周期的, 它们之间的准确区分还要借助于李雅普诺夫指数谱的计算才能确定.

图3给出了几个典型吸引子所对应的状态变量的时间波形。

采用FFT算法,对时间波形 x_2 做了频谱分析,如图4所示。图4(a)~(c)分别对应于超混沌、亚超混沌和混沌态,它们都是连续的频谱,所以,仅靠频谱分析无法区别三种混沌状态。图4(d)和(e)分别对应于拟周期和周期态,它们都是离散的频谱,从频谱的离散还是连续可以区分出拟周期和混沌态。

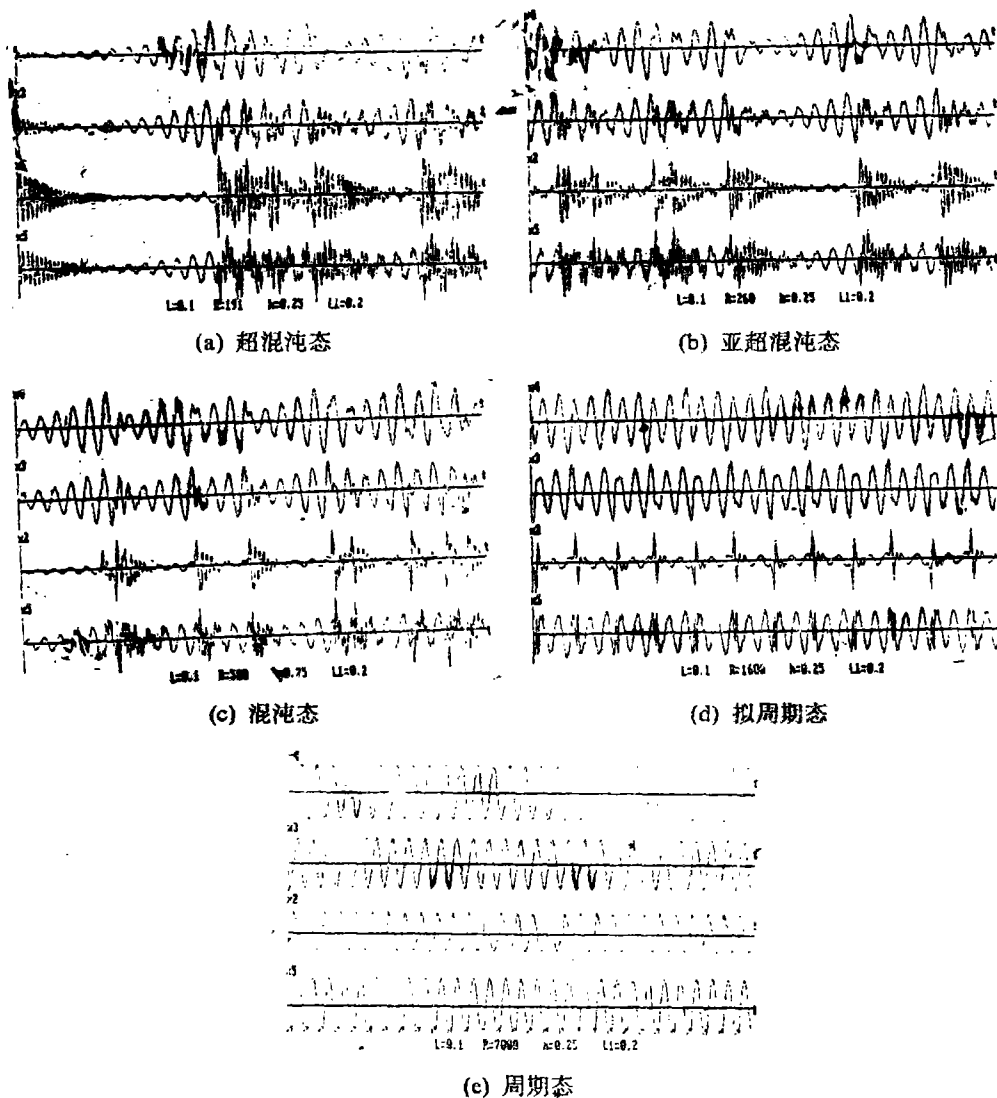
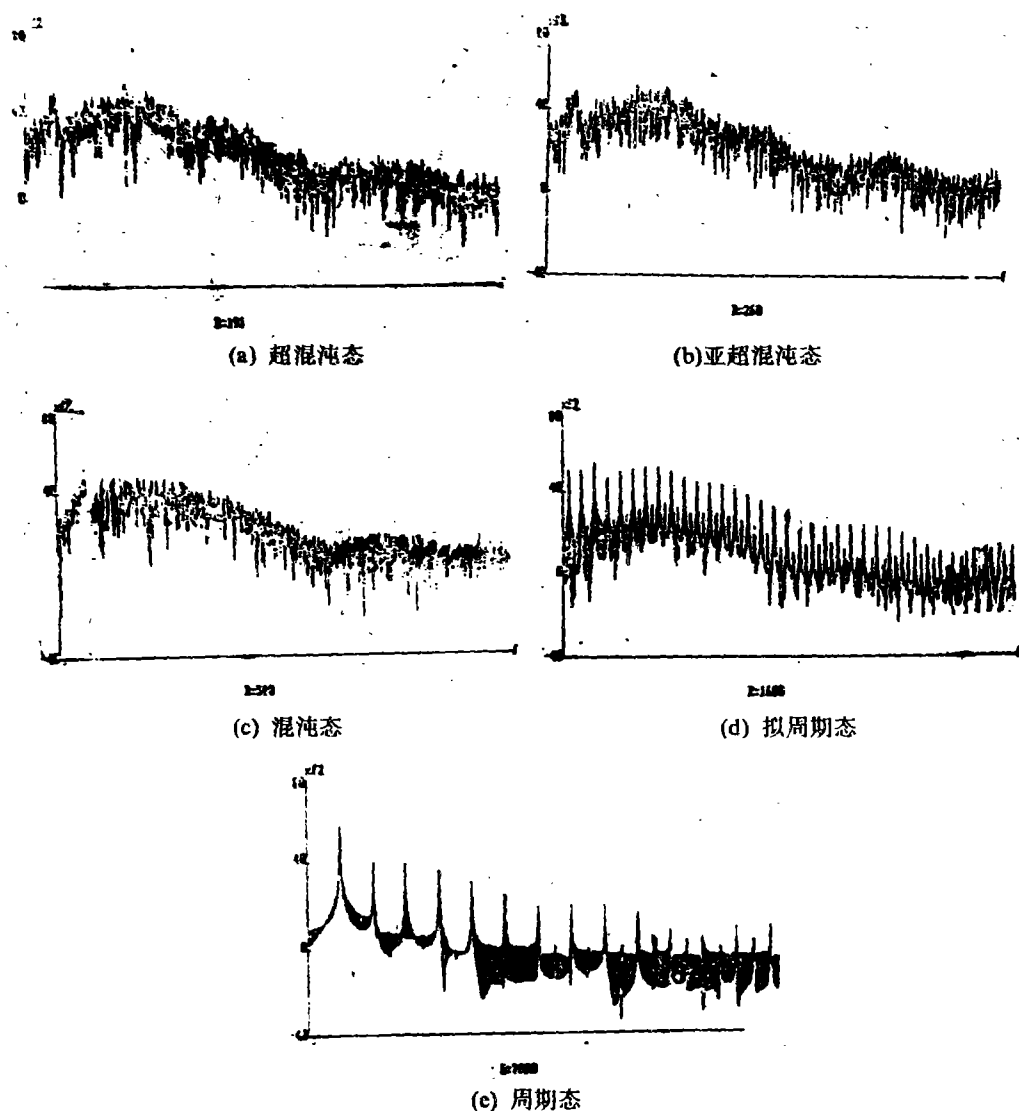


图3 几种典型吸引子的状态变量时间波形

图4 对应于时间波形 x_2 的频谱

1.3 庞卡莱映射

从式(3)的数值解中取下面的横向截割得庞卡莱映射的三维超平面:

$$\Sigma = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) | x_2 = 0 \} \quad (4)$$

图5示出了由式(4)所确定的三维超平面映射在 (x_1, x_3) 平面上的投影, 它们分别对应于超混沌、亚超混沌和混沌态, 可以看出, 图5(a)比图5(b)复杂, 图5(b)又比图5(c)复杂。下面就要讨论李雅谱诺夫指数的计算结果, 将证明以上各状态的区分是正确的。

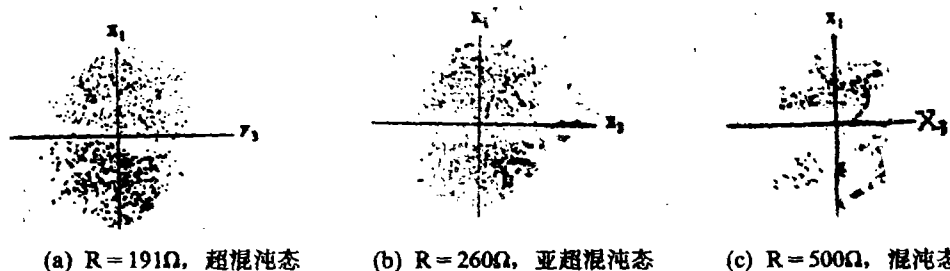


图5 各种混沌吸引子的庞卡莱映射

1.4 李雅普诺夫指数

1.4.1 李雅普诺夫指数的定义和算法

对某一初值 x_0 , 考察以 x_0 为圆心的 n 维无穷小球面的长时间演变, 有的方向伸长, 有的方向缩短, 逐渐变为 n 维椭球面。轨线的第 i 维李雅普诺夫指数定义为:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{\varepsilon(0) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon(0)} \right] \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

式中, $\varepsilon(0)$ 为 n 维初始条件球面的半径, $\varepsilon_i(t)$ 是 t 时刻的 n 维椭球面的第 i 主轴的长度, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$ 。显然, 李雅普诺夫指数在平均的意义上表征了相邻轨线之间的扩张率和收缩率。

本文采用[1]中介绍的算法来计算李雅普诺夫指数, 只是把三维系统的算法推广到四维系统, 具体公式此处从略。我们用此算法验证了[7]的超混沌, 二者关于李雅普诺夫指数的计算结果是一致的。所以此算法的计算是可信的。

1.4.2 李雅普诺夫指数谱

李雅普诺夫指数的正与负提供了对非线性系统运动形态的一种有效的定性措施。收缩时, $\lambda < 0$, 扩张时, $\lambda > 0$, 具有一个以上的正的李雅普诺夫指数的耗散系统的吸引子称为混沌或超混沌吸引子。在四维系统中, 指数谱 $(+, +, 0, -)$ 对应于超混沌吸引子, 指数谱 $(+, 0, 0, -)$ 对应于亚超混沌吸引子, 指数谱 $(+, 0, -, -)$ 对应于混沌吸引子, 指数谱 $(0, 0, -, -)$ 对应于拟周期吸引子, 指数谱 $(0, -, -, -)$ 对应于周期解。

1.4.3 李雅普诺夫指数的计算结果

计算时间 $T = 4000$ (归一化时间), 步长 $H = 0.01$ 。为避免数值溢出, 每隔 $\tau = 10$ 进行一次再归一化处理。为避免暂态过程的影响, 已甩去了前 10^4 个点。计算是在 Wang-V₃300 机上进行的。

表1列出了几个典型吸引子的李雅普诺夫指数。

表2列出了由计算李雅普诺夫指数所确定的分岔情况。

表1 李雅普诺夫指数

R(Ω)	李雅普诺夫指数				状态
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
191	0.042	0.008	0.000	-0.067	超混沌
260	0.033	0.000	0.000	-0.073	亚超混沌
500	0.029	0.000	-0.038	-0.097	混沌
890	0.000	0.000	-0.052	-0.167	拟周期
1350	0.024	0.000	-0.138	-0.032	混沌
1600	0.000	0.000	-0.135	-0.282	拟周期
1700	0.024	0.000	-0.168	-0.301	混沌
3000	0.000	0.000	-0.284	-0.528	拟周期
5000	0.000	-0.026	-0.534	-0.819	周期
5300	0.019	0.000	-0.517	-0.967	混沌
5690	0.000	0.000	-0.543	-1.030	拟周期
7000	0.000	-0.038	-0.616	-1.290	周期

表2 计算得到的分叉情况

R(Ω)	180 ~210	220 ~280	290 ~850	860 ~900	900 ~1550	1590 ~1620	1650 ~2700	2800 ~4000	4090 ~5000	5020 ~5580	5600 ~5700	5700 ~8000
状态	超混沌	亚超混沌	混沌	拟周期	混沌	拟周期	混沌	拟周期	周期	混沌	拟周期	周期

1.5 分数维

吸引子的维数是吸引子复杂程度的重要标志。在等自由度的系统中，维数越高，就意味着吸引子越复杂。混沌吸引子的维数是分数。

李雅普诺夫维由下式给出：
$$d_L = K + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_K}{|\lambda_{K+1}|} \tag{6}$$

上式中令指数 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ （在四维情况下），且令K是一个下标，致使 $\sum_{i=1}^K \lambda_i \geq 0$ ，而 $\sum_{i=1}^{K+1} \lambda_i < 0$ 。由此，我们可以得到 R=191Ω 时的李雅普诺夫维数： $d_L = 3 + \frac{0.042 + 0.008}{0.067} \approx 3.746$ ，这是3和4之间的分数。其它曲型吸引子的维数由表3所示。

表3 典型吸引子的维数

R(e)	191	260	500	890	1350	1600	1700	3000	5000	5300	5690	7000
d_L	3.746	3.452	2.763	2	2.174	2	2.143	2	1	2.020	2	1

仅从超混沌来看，此电路超混沌状态下的李雅普诺夫维数 3.746，比 L.O.Chau [6]的超混沌的维数 3.006 和夏承铨[8]的超混沌维数 3.077 都要大。所以，非线性元件为分段线性电容的四阶自治电路，比非线性元件为分段线性电阻的四阶自治电路的动态行为要复杂得多。

2 电路实验

我们用图 6 所示的实验电路来实现图 1 所示的电路模型。电路参数如图中所示。

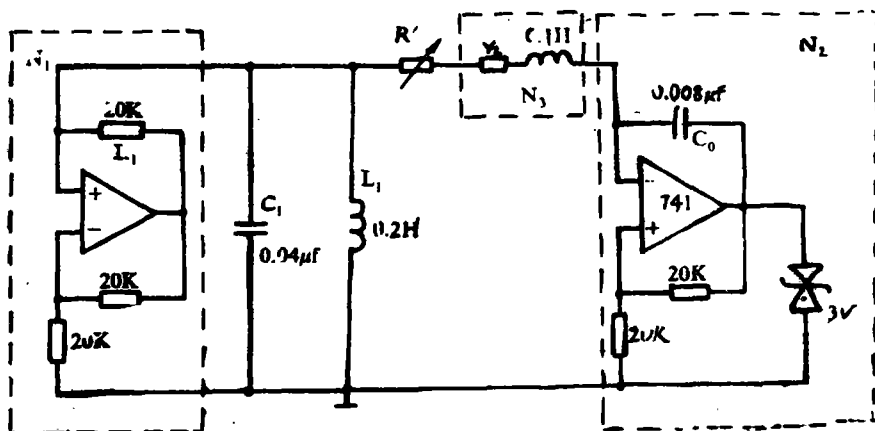
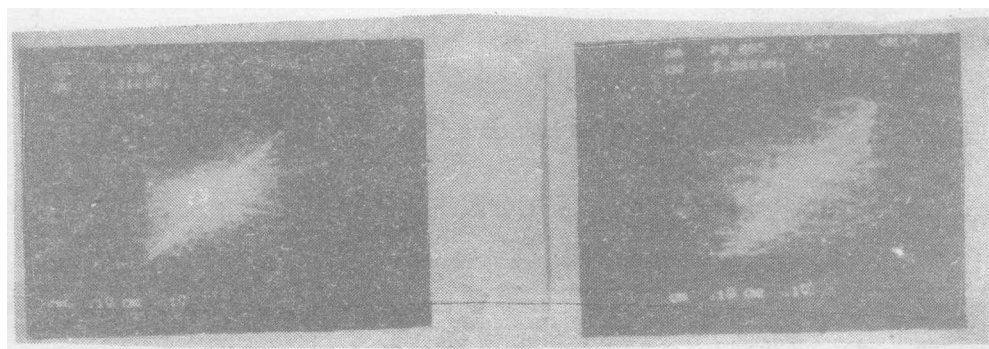


图 6 实验电路图

这里，子电路 N1 用来实现负电阻 $-R_1$ ，N2 用来实现分段线性荷控电容，N3 是电感线圈，其中电感部分实现 L ，电阻部分 r_L 与可变电阻 R' 一起用来实现 R ，即 $R = R' + r_L$ 。其中， r_L 在频率为 1KHz 时测得为 10Ω 。这个电路是在假定电感、电容、电阻都是线性的，运放和稳压二极管都是理想的前提下来实现图 1 电路的。

以 R 作为分岔参数，用 7201 存储示波器来观察相空间轨线在 $(u_{c1} \sim u_c)$ 平面上的投影，如图 7 所示。



(a) $R = 60\Omega$ ，超混沌态

(b) $R = 100\Omega$ ，亚超混沌态

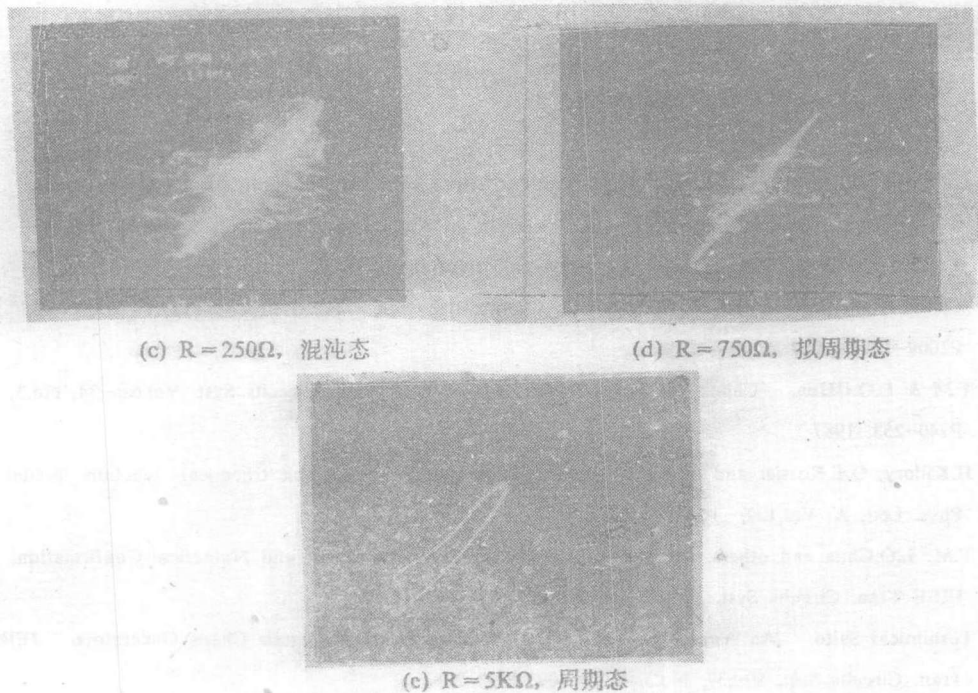


图7 实测的典型吸引子

通过实验, 多们找到了与计算机模拟结果相同的振荡制式, 即随着分岔参数 R 的变化, 电路状态依次为超混沌、亚超混沌、混沌、拟周期、混沌、拟周期、混沌、拟周期、周期、混沌、拟周期、周期。而且二者对应各状态下的相图也一致。这说明电路实验和计算机模拟结果在定性上是一致的。但是, 它们在定量上却有一定的差异。我们认为, 造成定量差异的原因主要是由实际器件的非理想因素造成的, 特别是电感线圈的非线性影响, 在混沌、超混沌、亚超混沌情况下最为明显, 这时的 r_L 已不是常数, 它的大小与频率变化有关, 而混沌状态下没有固定频率, 故无法掌握 r_L 的变化规律, 由于 r_L 是 R 的一部分, 故它的不确定性直接造成了这种定量差异。

3 结 论

3.1 本文所研究的四阶非线性自治电路, 首次把分段线性电容作为非线性元件, 并且观察到了十分丰富多样的动态演变过程, 出现三种不同混沌振荡, 即超混沌、亚超混沌、混沌, 所以可作为混沌发生器使用。

3.2 在本文所研究的电路中, 当改变 R 的参数值时, 会出现如下的动态演变序列:

191 Ω (超混沌) — 260 Ω (亚超混沌) — 500 Ω (混沌) — 890 Ω (拟周期) — 1350 Ω (混沌) — 1600 Ω (拟周期) — 1700 Ω (混沌) — 3000 Ω (拟周期) — 5000 Ω (周期) — 5300 Ω (混沌) — 5690 Ω (拟周期) — 7000 Ω (周期)

这一结果在目前国内外有关文献中尚未报道过。

3.3 本文所进行的计算机模拟与实验测量之间虽然在定量上有些差异, 但在定性上和

动态演变过程是一致的。说明本文所采用的电路模型和算法都是合理的。

参 考 文 献

- (1) L.O.Chua. The double scroll. IEEE Trans. Circuits Syst. Vol.cas-32, No.8, P798-817, 1985
- (2) E.F & L.F and others. Periodicity and Chaos in an Autonomous Electronic System. IEEE Tran. Circuit Syst. Vol.cas-31, No.3, P237-247, 1984
- (3) Martin J. Hasler. Electrical Circuits with Chaotic Behavior. IEEE Proceedines. Vol.75, No.8, P1009-1021, 1987
- (4) T.M & L.O.Chua. Chaos Via Torus Breakdown. IEEE Tran. Circuits Syst. Vol.cas-34, No.3, P240-253, 1987
- (5) H.Killory, O.E.Rossler and others. Higher Chaos in a Four-Variable Chemical reaction model. Phys. Lett. A. Vol.122, P341-345, 1987
- (6) T.M, L.O.Chua and others. Hyperchaos. Laboratory Experiment and Numerical Confirmation. IEEE Tran. Circuits Syst. Vol.cas-33, No.11, P1143-1146, 1986
- (7) Toshimichi Saito. An Approach Toward Higher Dimensional Hysteresis Chaos Generators. IEEE Tran. Circuits Syst. Vol.37, No.3, P399-409, 1990
- (8) 夏承铨, 王继昌. 一个非线性四阶电路中的超混沌振荡. 理论电工学术年会论文集, P361-368, 1990

Hyperchaotic Oscillations in a Four Order Nonlinear Autonomous Circuit

Yang Yuxia Wang Junkun Gao Jinfeng
(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: This paper discusses the nonlinear dynamical nature in a four order autonomous circuit containing a nonlinear capacitor. The computer simulation and circuit experiment showed plentiful, various dynamical evolutionary sequences in this circuit, that is, With the change of bifurcation parameters, the oscillatory mode in this circuit evolved as follows: hyperchaos-sub hyperchaos-chaos-quasiperiod-chaos-quasiperiod-chaos-quasiperiod-period-chaos-quasiperiod-period. The computer simulation and circuit experiment results corresponded qualitatively with one another.

Keywords: hyperchaos, sub-hyperchaos, lyapunov exponents, poincare map