

少筋砼结构考虑破坏相关性 的可靠度分析

贡金鑫 赵继章

(西安公路学院)

摘 要: 考虑少筋砼结构两道防线失效的相关性, 本文对少筋砼结构的可靠度作了分析。

分析结果表明, 考虑相关性的失效概率较不考虑相关性约大 6—11 倍。因此分

析少筋砼结构的可靠性必须考虑两道防线失效的相关性。

关键词: 少筋砼结构, 可靠度, 破坏相关性

中国图书分类号: TV333

少筋砼结构是水利、港口等工程中常遇的一种结构形式。采用这种结构形式是出于经济、安全两方面的考虑^[1,2,3]。少筋砼结构的经济性是显而易见的, 但对于少筋砼结构的安全性, 目前仍存在着种种不同的看法^[4]。因此, 对这一问题作进一步的澄清是很有必要的。

关于少筋砼结构安全性的论征, 从少筋砼结构计算理论的提出到现在已有过多种方法。最早是采用数理统计方法^[1]; 后来又采用半概率方法^[5], 由于半概率法本身的局限性^[6], 得出的结论有时与工程直接经验相违^[7], 因而半概率法对少筋砼结构的可靠度反映并不确切。随着结构可靠度理论的发展, 文献^[8]则用近似概率法对少筋砼结构进行了可靠度分析, 使少筋砼结构的可靠度在一定程度上得到论证。需要指出的是, 文献^[8]在分析少筋砼结构的可靠度时假定砼和钢筋两道防线的失效是独立的。由于两道防线的失效存在着一定的相关性, 因此得出的结论也将的有所不同。例如, 当砼的抗力大于钢筋的抗力时, 第一道防线失效则第二道防线必失效, 而当假定两道防线独立时, 第一道防线的失效对第二道防线是否失效并无影响。由此可见, 假定两道防线相独立实际上低估了少筋砼结构的失效概率。为更确切地揭示少筋砼结构的可靠性, 本文对少筋砼结构的可靠度分析考虑了两道防线失效的相关性。

1 少筋砼结构的近似概率分析

如所周知, 少筋砼结构具有双强度保证, 结构破坏必须突破这两道防线, 因而少筋砼构件有两个极限状态方程。第一道防线以砼受拉开裂为标志, 第二道防线以钢筋屈服为特征 (由于少筋砼结构配筋率很低, 不再考虑可能出现的砼受压破坏)。两道防线的极限状态方程为:

$$Z_1 = R_1 - S = 0 \quad (1)$$

$$Z_2 = R_2 - S = 0 \quad (2)$$

其中 S 为荷载效应, R_1 、 R_2 分别为砼开裂(第一道防线)和钢筋屈服(第二道防线)时的抗力。

少筋砼只有当两道防线全失效时结构才破坏。因此少筋砼结构的失效概率为:

$$P_f = P(Z_1 < 0 \cap Z_2 < 0) = \int \int f_{z_1 z_2}(z_1, z_2, \rho) dz_1 dz_2 \quad (3)$$

其中 $f_{z_1 z_2}(z_1, z_2, \rho)$ 为两道防线失效的联合分布密度函数, ρ 为两道防线间的相关系数。

按照规范公式:

$$K_L S = R_{1K} \quad (4)$$

$$K_P S = R_{2K} \quad (5)$$

其中 S 为荷载效应, K_L 、 K_P 分别为防止砼破坏和防止钢筋屈服的安全系数。由规范^[9], 在少筋砼范围内, 对于 II、III 级建筑物、基本荷载组合下受弯构件, K_L 和 K_P 满足下列关系:

$$K_P = 2.15 - 0.435 K_L \geq 1.15 \quad (6)$$

$$R_{1K}、R_{2K} \text{ 为规范规定的公式计算的抗力, 即: } R_{1K} = \frac{1}{6} \gamma b h^2 R_1 \quad (7)$$

$$R_{2K} = 0.88 \mu b h^2 R^s \quad (8)$$

其中 γ 为砼塑性系数, μ 为钢筋配筋率, b 、 h 为构件的宽度和高度, R_1 、 R_s 为砼和钢筋的设计抗拉强度。本文 R_{2K} 采用的是近似计算公式。

砼和钢筋抗力 R_1 、 R_2 的不确定性可按文献^[10]的方法确定。对于砼抗为 R_1 , 由于实测资料不全面, 特别是缺乏一些大尺寸砼试件的实验, 而砼抗弯时的尺寸效应又很显著, 只能凭经验作出估计。因此本文不再逐项计算, 而是参考文献^[11]对钢筋砼受弯构件抗裂度可靠性分析时的结果, 并考虑正常使用极限状态与承载能力极限状态砼强度取值的不同, 近似确定为 $K_{R1} = \frac{\mu_{R1}}{R_{1K}} = 1.544$, $V_{R1} = 0.29$ 。对于钢筋产生的抗力 R_2 的不确定性, 直接取用文献^[10]给出的值 $K_{R2} = \frac{\mu_{R2}}{R_{2K}} = 1.13$, $V_{R2} = 0.10$, 不再考虑由于少筋砼构件配筋率较低而引起的差异。

荷载的统计资料也很少, 对于水工 II、III 级建筑物、基本荷载组合下的受弯构件, 按文献^[8]取荷载效应 S 的不确定性参数为 $k_s = \frac{\mu_s}{S_K} = 1.0$, $V_s = 0.15$ 。

如以纯砼构件承受弯曲荷载, 由于砼强度的变异性较大, 构件的极限承载力不易保证, 为确保结构达到一定的安全水准, 就必须采用较大的安全系数。按文献^[9]取 $k_b = 2.65$, 假定 S 和 R_1 均服从正态分布, 利用前面的统计参数可得可靠指标为:

$$\beta_1 = \frac{\mu_{R_1} - \mu_s}{\sqrt{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_s^2}} = \frac{2.65 \times 1.544 - 1}{\sqrt{(2.65 \times 1.544 \times 0.29)^2 + 0.15^2}} = 2.585$$

假定 S 和 R_1 均服从对数正态分布, 则可靠指标为:

$$\beta_1 = \frac{\ln(K_h \frac{K_{R_1}}{K_S})}{\sqrt{V_{R_1}^2 + V_S^2}} = \frac{\ln(2.65 \times \frac{1.544}{1})}{\sqrt{0.29^2 + 0.15^2}} = 4.315$$

两者相差甚大, 可见 S 和 R_1 的概型对 β_1 有显著影响。假定 S 服从正态分布而 R_1 服从对数正态分布, 由 Jc 法求得 $\beta_1 = 4.361$, 与 S 、 R_1 均服从对数正态分布时的情形接近, 且大于文献^[10]对脆性破坏结构要求的可靠指标。

对于钢筋砼构件 (少筋砼第一道防线失效后, 第二道防线抗力可按钢筋砼结构的方法计算), 由于钢筋匀质性好, 强度变异性小, 保证物件不发生破坏的安全系数相对可取得小些。按规范^[9]取 $K_g = 1.5$, 假定 S 、 R_2 均服从正态分布则可靠指标为 $\beta_2 = 3.071$; 假定 S 、 R_2 均服从对数正态分布则可靠指标为 $\beta_2 = 2.927$; 假定 S 服从正态分布、 R_2 服从正态分布则可靠指标 $\beta_2 = 3.226$ 。后者大于文献^[10]对延性破坏结构要求的可靠指标。

由以上分析可知, 如以文献^[10]规定的可靠指标为标准, 可靠指标以 Jc 法计算时, 纯砼及钢筋砼均能达到可靠性要求。

少筋砼结构两道防线相关性的产生是因为两道防线的失效受同一荷载效应控制及抗力 R_1 和 R_2 中含有同一构件截面尺寸因素。由于构件截面尺寸的变异性很小, 为简化计算, 可忽略这一因素的影响, 即近似假定 R_1 和 R_2 独立。

这样极限状态方程 Z_1 和 Z_2 的协方差可由下式计算:

$$\begin{aligned} \text{COV}(Z_1, Z_2) &= E(Z_1 Z_2) - E Z_1 \cdot E Z_2 \\ &= E [(R_1 - S)(R_2 - S)] (\mu_{R_1} - \mu_S)(\mu_{R_2} - \mu_S) \\ &= \sigma_S^2 \end{aligned} \quad (9)$$

其中

μ_{R_1} 和 μ_{R_2} 是将 R_1 和 R_2 当量正态化后的随机变量, μ_{R_1} 、 μ_{R_2} 为 R_1 和 R_2 的数学期望。

由于 S 与 R_1 、 S 与 R_2 各自独立, Z_1 和 Z_2 的方差为:

$$\sigma_{Z_1}^2 = \sigma_S^2 + \sigma_{R_1}^2 \quad (10)$$

$$\sigma_{Z_2}^2 = \sigma_S^2 + \sigma_{R_2}^2 \quad (11)$$

其中 σ_{R_1} 和 σ_{R_2} 为 R_1 和 R_2 的均方差, 由 Jc 法计算 β_1 和 β_2 时得出。

Z_1 和 Z_2 的相关系数为:

$$\rho = \frac{\text{COV}(Z_1, Z_2)}{\sigma_{Z_1} \sigma_{Z_2}} = \frac{\sigma_S^2}{\sqrt{(\sigma_S^2 + \sigma_{R_1}^2)(\sigma_S^2 + \sigma_{R_2}^2)}} \quad (12)$$

假定 S 服从正态分布, R_1 和 R_2 服从对数正态分布, 由于 (1)、(2) 式表示的极限状态方程为线性函数, 在以 JC 法进行计算、将 R_1 和 R_2 变换为当量正态分布变量后, 可近似假定 Z_1 和 Z_2 服从正态分布。这样 Z_1 和 Z_2 的联合分布密度为:

$$f_{Z_1 Z_2}(Z_1, Z_2, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_{Z_1}\sigma_{Z_2}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(Z_1-\mu_{Z_1})^2 - 2\rho(Z_1-\mu_{Z_1})(Z_2-\mu_{Z_2}) + (Z_2-\mu_{Z_2})^2}{2\sigma_{Z_1}\sigma_{Z_2}(1-\rho^2)}} \quad (13)$$

作标准变换 $\mu = \frac{Z_1 - \mu_{Z_1}}{\sigma_{Z_1}}, v = \frac{Z_2 - \mu_{Z_2}}{\sigma_{Z_2}}$, 则(13)式可表示为:

$$f_{\mu v}(\mu, v, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{\mu^2 + v^2 - 2\rho\mu v}{2(1-\rho^2)}} \quad (14)$$

这样少筋砼结构的失效概率为:

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{-\infty}^{-\beta_1} \int_{-\infty}^{-\beta_2} f_{\mu v}(\mu, v, \rho) d\mu dv \\ &= \int_{-\infty}^{-\beta_1} \int_{-\infty}^{-\beta_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{\mu^2 + v^2 - 2\rho\mu v}{2(1-\rho^2)}} d\mu dv \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\beta_1 = \frac{\mu_{Z_1}}{\sigma_{Z_1}}, \beta_2 = \frac{\mu_{Z_2}}{\sigma_{Z_2}}$, 可由Jc法计算。

(15)式为一二重积分形式, 对此直接进行积分计算是较繁琐的。为此将该式变换为下面的一维积分式^[12]:

$$\begin{aligned} P_f &= H(\beta_1, \beta_2, \rho) + \Phi(-\beta_1)\Phi(-\beta_2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\rho \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{-\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2t\beta_1\beta_2}{2(1-t^2)}} dt + \Phi(-\beta_1)\Phi(-\beta_2) \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $H(\beta_1, \beta_2, \rho)$ 可由数值积分法计算; $\Phi(\cdot)$ 为标准正态函数, 可直接查表求得。

为表明少筋砼结构第一道防线失效后第二道防线所起的作用, 由下式可求出第一道防线失效后第二道防线失效的概率:

$$P(Z_2 < 0 | Z_1 < 0) = \frac{P(Z_1 < 0 \cap Z_2 < 0)}{P(Z_1 < 0)} = \frac{P_f}{\Phi(-\beta_1)} \quad (17)$$

在少筋砼范围内, 本文的计算结果汇总于表 1。由表 1 可见: ①随着 K_1 的增大 β_1 增大, 随着 K_p 的减小 β_2 减小, 这是显而易见的。当 K_1 约为 2.2 时, β_1 已达到标准^[10]规定的对脆性破坏要求的可靠指标, 表明砼本身对荷载作用已有很高的抵抗能力。但这一 K_1 值可能不够准确, 因此计算 β_1 值使用的统计参数相当粗糙。②两道防线间的相关系数 ρ 基本保持的 0.3 左右, 随 K_1 或 K_p 无显著变化。在计算中发现, σ_{R_1} 随 K_1 的增大略有增大, 而 σ_{R_2} 随 K_1 的增大略有减小, 这是 ρ 变化不大的原因。③少筋砼结构考虑两道防线失效相关时的失效概率较不考虑失效相关 (即独立) 时的失效概率大 6—11 倍, 可见两道防线的相关性对少筋砼结构的失概率有很大影响。④按本文的计算结果, 除少筋砼 K_1 在 1.6—2.0 范围内的失效概率略较少筋砼的上限 (与钢筋砼交界处) 高一点外, 其余均较少筋砼的上限低, 如果以少筋砼失效概率的上限为标准 (仍较钢筋砼低), 从近似概率的观点认识采用少筋砼结构合理的, 更确切地说现行规范^[9]提供的少筋砼结构的设计公式是足够安全的。由表中结果还可看出, 即便不考虑对 $k_p \geq 1.15$ 的限制, 失效概率也很小。⑤由表中最后一栏可见, 在少筋砼

第一道防线失效后, 钢筋作为第二道防线对防止结构破坏仍有一定的保护作用, 这就是结构仍需置一定数量钢筋的意义所在。不过随着 K_1 的增大钢筋所起的作用明显降低, 这有两个方面的原因: 一是 K_1 的增大意味着砼本身对荷载作用抵抗能力的增强, 在保证一定的安全度的条件下所需钢筋面积减少; 二是砼本身对荷载作用抵抗能力的提高使得第一道防线失效的荷载较大, 从而使第二道防线失效的可能性也变大。如果不考虑少筋砼结构两道防线的相关性, 则在可靠度分析中第二条原因无法体现。

本文的少筋砼可靠度分析结果

表 1、

K_1	K_p	β_1	β_2	ρ	$H(\beta_1, \beta_2, \rho)$ $\times 10^{-5}$	$\phi(\beta_1)$ $\phi(-\beta_2)$ $\times 10^{-6}$	P_f $\times 10^{-5}$	$P(Z_2 < 0 Z_1 < 0)$ $\times 10^{-2}$
1.50	1.50	2.527	3.226	0.3078	3.686	3.530	4.039	0.708
1.60	1.45	2.734	2.999	0.3073	4.398	4.275	4.826	1.524
1.70	1.41	2.928	2.814	0.3071	4.376	4.199	4.796	2.829
1.80	1.37	3.112	2.625	0.3070	4.124	3.993	4.523	4.835
1.90	1.32	3.286	2.383	0.3076	4.060	4.336	4.494	8.972
2.00	1.28	3.451	2.184	0.3078	3.438	4.099	3.848	13.733
2.10	1.24	3.609	1.982	0.3081	2.757	3.651	3.122	20.392
2.20	1.19	3.759	1.722	0.3094	2.248	3.627	2.611	30.750
2.30	1.15	3.902	1.510	0.3102	1.625	3.148	1.940	40.383
2.40	1.15	4.040	1.510	0.3087	0.948	1.675	1.116	43.645
	1.11*		1.292	0.3112	1.115	2.519	1.367	51.046
2.50	1.15	4.172	1.510	0.3073	0.556	0.980	0.654	35.152
	1.06*		1.014	0.3128	0.743	2.337	0.997	52.513
2.60	1.15	4.299	1.510	0.3059	0.327	0.558	0.383	44.912
	1.02*		0.785	0.3142	0.455	1.831	0.638	74.847
2.65	1.15	4.361	1.510	0.3054	0.251	0.445	0.296	45.429
	1.00*		0.668	0.3150	0.349	1.638	0.513	78.743

注: 表中带 * 号横格内的数字为不考虑 $K_p > 1.15$ 限制的计算结果

2 结论

根据现行规范^[9]少筋砼结构的计算方法, 考虑两道防线失效的相关性, 本文对少筋砼结构的可靠度进行了分析。分析得出如下两个结论:

2.1 少筋砼结构两道防线存在相关性是由于两道防线同时失效时受同一荷载控制的缘故。一些文献往往注意抗力的相关而忽略了荷载引起的相关。少筋砼结构考虑两道防线相关性的失效概率较不考虑相关性约大一个数量级。因此, 分析少筋砼结构的可靠度必须考虑两道防线失效的相关性。

2.2 由本文的计算结果可知(表1最后一栏),少筋砼结构第一道防线失效后第二道防线对结构的破坏仍有一定的保护作用,这就是少筋砼配筋的意义所在。随 K_1 的增大第二道防线所起的作用逐渐变小,但并不意味着结构安全性的降低,因为 K_1 增大表明砼本身有了一定的抵抗能力,即两道防线的抵抗能力是协调变化的。

总而言之,少筋砼结构无论从理论上还是从工程经验上讲都有一定的基础,单从实验室的一些特定结果来认识少筋砼结构的安全性是不科学的。少筋砼结构的设计实质上是充分、恰当地利用了自然界的客观规律,因而采用少筋砼结构是经济、安全和稳妥的。

参 考 文 献

- [1] 赵国藩.加筋砼结构计算.上海科学技术出版社,1961年6月
- [2] 大连工学院水利系少筋砼研究组.少筋砼结构的试验和计算方法.大连工学院学报,1978年第3期
- [3] 华东水利学院等编.水工钢筋混凝土结构学.水利电力出版社,1983年12月
- [4] 少筋砼试验组.少筋砼的试验研究.水利水运科学研究,1981年第2期
- [5] 杨松泉.少筋砼的安全度分析.水运工程,1980年第8期
- [6] 余安东,叶润修.建筑结构的可靠性与安全性.上海科学技术文献出版社,1986年5月
- [7] 赵国藩.再谈水工少筋砼结构计算中的安全度问题.水运工程,1982年第12期
- [8] 赵国藩.少筋砼构件承载能力的安全度.水运工程,1981年第4期
- [9] 《水工钢筋混凝土结构设计规范》(DSJ20-78),1978年
- [10] 《建筑设计统一标准》GBJ68-84(试行),1984年北京
- [11] 大连理工大学土木系结构研究室.钢筋混凝土结构正常使用极限状态可靠度分析.1990年
- [12] R.E.Melchers. Structural Reliability Analysis and prediction. ELLIS HORWOOD LIMITED publishers, 1987

Reliability Analysis For Rare-reinforced Concrete Structure Considering Failure Correlation

Gong Jinxin Zhao Jizhang
(Xian Institute of Highway)

Abstract: A reliability analysis was presented considering failure correlation between tow limit states of rare-reinforced concete structure. The results shown that failure probability considering failure correlation. 6--11 times larger than the one that not considering failure correlation. Thus, the correlation between two limit states of rare-reinforced concrete structure must be considered in the reliability analysis.

Keywords: Rare-reinforced concrete structure, Reliability analysis, Failure correlation