

# 水工结构中的空化问题<sup>①</sup>

黄 建 波

(安徽马鞍山市 华东冶金学院)

**摘 要:** 本文从 N—S 方程及气泡运动与扩散生长方程出发,建立了描述紊流场中气核空化过程的统一数学模型,并据此导出了流场空化相似准则。指出空化相似包括宏观与微观相似两个方面,空化过程实际上是气核从微观尺度向宏观尺度转化的过程,在建立空化起始判据、空化相似准则时,均需考虑这一特点。本文的分析表明,要在减压实验条件下对原型空化进行相似模拟是非常困难的,数值模拟与实验模拟相结合,是解决水利工程中面临的空化现象“比尺影响”问题的可行途径。

**关键词:** 空化,空化起始,相似模拟,空泡动力学。

**中国图书分类号:** TV131

## 1 空化相似问题

空化问题在大型高水头的泄水结构中经常发生,由于它常造成结构大规模剥蚀等严重后果,因而在工程设计和运行阶段均需十分小心以避免它发生。目前有关工程界对此都很关注,主要有三个方面的原因:一是空化为突发性现象,事前无明显预兆,且对原型空化往往难以及时发现和处理,在原型工程中,人们能观察到的,往往是空化的后果而不是其本身。二是空化破坏的预后较差,一旦结构的某处出现空化破坏后,进行修复补强措施并经一段时期的运行,还会在当地或另一地方发现空蚀。三是空化的相似模拟十分困难,实验室模拟的结果很难正确地换算到原型。

目前普遍认为,流场空化是液体介质中微小尺寸的气核在流场中局部低压及溶解、扩散等因素联合作用下的产物,因此,它受到两大因素的制约:局部压力场,介质中溶解空气及气核含量与尺度分布。要满足空化现象的相似,必须使原型与模型流场中这两大因素分别相似。此外,空化是气核生长到一定程度所致,而后者受泡动力学方程控制,因而空化相似还必须满足泡动力学的相应条件。

### 1.1 局部压力场及速度场相似准则

流体运动规律由 Navier—Stokes 方程控制,要使两不可压流场宏观相似,流场中物面边界附近的压力及速度场(包括时均和脉动场)应完全相似,理论上可以证明这几乎是不可能的,除非两流场尺度完全相同(实际上变成同一流场),要使其近似相似,必须保证原型与模型流场的 Reynolds 数及 Froude 数分别相等:

<sup>①</sup> 本项工作得到国家自然科学基金资助。

$$\begin{cases} R_{eM} = R_{ep} \\ F_{rM} = F_{rp} \end{cases} \quad (1)$$

其中下标 M 和 P 分别表示模型和原型。

$R_e = \frac{u_o L}{\nu}$ ,  $F_r = \frac{u_o}{\sqrt{gl}}$ ,  $u_o, L$  分别为特征速度及特征长度,  $\nu$  为水的运动粘性系数,  $g$  为重力加速度。

## 1.2 泡动力学相似准则

空化是由流场中气核在低压及扩散等因素联合作用下失稳生长的产物, 气核的生长由泡动力学方程 (2) 控制:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho}(p_g + p_v - p_L - \frac{2S}{R} - \frac{4\mu}{R}\dot{R} + \frac{1}{4}|\vec{u}_r|^2) \quad (2)$$

其中  $R$  为气核半径,  $\dot{R} = dR/dt$ ,  $\ddot{R} = d^2R/dt^2$ , 式(2)右端  $p_g$  为核内气体压力, 由扩散方程控制,  $p_g$  为:

$$p_g(t) = \frac{p_{g0} R_o^3}{R^3(t)} + \frac{1}{R^3} \sqrt{\frac{18D}{\pi}} \int_0^t [p_{g0} \alpha_o - \alpha_{sa} p_g(\tau)] R^{1.5}(\tau) |\vec{u}_r|^{1/2} d\tau \quad (3)$$

其中:  $p_{g0}$  为  $t=0$  时气体压力,  $R_o = R(0)$ ,  $D$  为空气在水中的扩散系数, 一般为  $2.5 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\alpha_{sa}$  为一大气压下水中饱和含气量,  $\alpha_o = 0.0217$ ,  $\alpha_o$  为初始时刻气核壁上液体中的饱和含气量。式 (2) 右端其余参数为:  $p_v$ —水的饱和蒸汽压,  $p_L$  气核周围液体压力,  $S$ —水的表面张力系数,  $\mu$ —水的动力粘度。  $\vec{u}_r$  为气核与液体的相对运动速度, 令  $\vec{u}_r = u_b \vec{i} + V_b \vec{j}$ , 则  $U_b, V_b$  分别满足方程:

$$R\ddot{u}_b + 3\dot{R}\dot{u}_b + 0.3(u_b^2 + V_b^2)^{0.5} u_b + 9\nu u_b / R + \frac{2R}{\rho} \frac{\partial p_L}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$R\frac{dV_b}{dt} + 3\dot{R}V_b + 0.3(u_b^2 + V_b^2)^{0.5} V_b + 9\nu V_b / R + \frac{2R}{\rho} \frac{\partial p_L}{\partial y} - 2Rg = 0 \quad (5)$$

式(2)—式(5)构成了描述气核运动过程的数学模型, 气核空化条件为:

$$R > R_{cr} = \sqrt{\frac{3N}{2S}} \quad (6)$$

对式(2)—式(5)进行无量纲化, 分别取  $R_o$ ,  $\sqrt{\frac{P_\infty - P_v}{\rho}}$ ,  $P_\infty - P_v$ , 作为长度、速度和压力的参考量纲, 并引入变换:

$$\begin{cases} R_{eb} = R_o V_o / \nu, W = \frac{2S}{R_o \Delta P} \\ C_p = (P_L - P_\infty) / \frac{1}{2} \rho V_o^2 \\ \sigma = \Delta P / \frac{1}{2} \rho V_o^2 \\ P_e = V_o R_o / D, F_{rb} = V_o^2 / g R_o \end{cases} \quad (7)$$

其中  $V_0 = \sqrt{(P_\infty - P_v) / \rho}$ ,  $\Delta P = P_\infty - P_v$ , 则式(2) - (5)分别化成无量纲形式:

$$ZZ + 1.5Z^2 = \bar{P}_g + 0.25(\bar{u}_b^2 + \bar{V}_b^2) - \frac{W}{2} - \frac{4Z}{R_{eb}} - (1 + C_p / \sigma) \quad (8)$$

$$\bar{P}_g(\bar{t}) = N / Z^3 \quad (9)$$

$$N = \bar{P}_{g0} + \sqrt{\frac{18}{\pi P_e}} \int_0^1 [\bar{P}_{g0} \alpha_0 - \bar{P}_g \alpha_{sa}] Z^{1.5} (\bar{u}_b^2 + \bar{V}_b^2)^{0.5} dt \quad (10)$$

$$Z\bar{u}_b + 3Z\bar{u}_b + 0.3(\bar{u}_b^2 + \bar{V}_b^2)^{0.5}\bar{u}_b + \frac{9\bar{u}_b}{R_{eb}Z} + \frac{2Z}{M\sigma} \frac{\partial C_p}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (11)$$

其中:  $M = \frac{L}{R_0}$ ,  $L$  为流场宏观参考长度。

$$Z\bar{V}_b + 3Z\bar{V}_b + 0.3(\bar{u}_b^2 + \bar{V}_b^2)^{0.5}\bar{V}_b + \frac{9\bar{V}_b}{R_{eb}Z} + \frac{2Z}{M\sigma} \frac{\partial C_p}{\partial \bar{y}} - 2 / F_{rb} = 0 \quad (12)$$

根据相似理论, 空化微观相似必须满足无量纲方程完全相同, 为此必须使原型流场和模型流场下列参量分别相等:

$N, W, R_{eb}, C_p / \sigma, M$

再加上宏观相似准数, 要做到空化相似, 必须使 7 个相似准数分别相等, 其中  $N$  为时变准数,  $C_p$  为空化区域内压力系数的分布。

如果气核初始状态为平衡状态, 则有,  $P_{g0} = 1 + W$ , 于是  $N$  相同等价于 (在  $\bar{u}_b, \bar{V}_b$  相同的前提下)  $\alpha_0 / \sqrt{P_e}$  及  $\alpha_{sa} / \sqrt{P_e}$  分别相等。此外, 原型与模型流场中气核分布应当相同。

### 1.3 空化状态的近似相似

要准确满足空化现象的相似条件是不可能的, 为此, 必须舍去一些不太重要的相似准数, 而保证那些至关重要的相似准数分别相等。

宏观流场: 保证  $F_r$  数相等, 不要求  $R_e$  相等。

微观相似: 在保证宏观流场相似的前提下,  $C_p$  的分布在原型与模型流场中相同, 其余比较重要的相似准数为:  $\sigma, W, \alpha_0 / \sqrt{P_e}, M$

由于空化是大量气核运动的宏观表现, 对不同的气核,  $R_0$  是不相同的, 当作为参考长度的  $R_0$ , 应取大量气核平衡半径的数学期望。

一般工程实践中, 比较容易满足的是  $\sigma$  相等。而其余相似准数几乎都不能满足。由于模型试验通常是在减压条件下进行的,  $\Delta P_{\text{模}} < \Delta P_{\text{原型}}$ , 为改善  $W$  的相似条件, 国际空化委员会建议采用人工种核方法<sup>[1]</sup>, 以增大模型中的  $R_0$ , 并改善气核分布状态的相似。由于原型与模型的扩散系数基本相同, 而模型中  $V_0$  小于原型, 采用人工种核, 增大模型中  $R_0$  的统计平均值, 可使模型中的  $P_e$  数更接近于原型。

但是, 模型是的  $M$  与原型仍无法相等, 特别是对于大比尺试验, 两者差别很大, 因而难以避免由于扩散作用造成的比尺影响。

上述理论分析表明, 无论采用什么样的试验方法, 均只能在一定程度上改善模型实验

所造成的比尺影响,而无法准确地模拟原型空化现象,这一缺陷严重制约着空化实验研究的应用前景,因而近年来国际、国内均转而致力于空化现象的计算机仿真。

## 2 空化现象的计算机仿真模型

空化现象具有宏观和微观两重性,宏观上,它表现为可压缩、非恒定,非均匀的汽—液两相流场,微观上表现为大量肉眼不能分辨的气核非稳定生长成为尺寸可见的蒸汽泡,采用计算机对这一现象进行仿真时,必须充分考虑到这一两重性特点,从宏观和微观两个尺度入手分别建立数学模型。

2.1 宏观尺度下的控制方程为:

2.1.1 可压缩的连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{V}) = 0 \quad (13)$$

2.1.2 动量方程:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} \right) = -\nabla P_L + \mu \left\{ \nabla^2 \bar{V} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \bar{V}) \right\} \quad (14)$$

其中密度  $\rho$  为:

$$\rho = \rho_L(1-f) + \rho_v f \approx \rho_L(1-f) \quad (15)$$

$\rho_v$  为蒸汽密度,  $f$  为蒸汽泡所占体积比。

$$\mu = \mu_L(1-f) + \mu_v f \approx \mu_L(1-f) \quad (16)$$

$\mu_v$  为蒸汽动力粘度。蒸汽泡所占体积比由微观模型确定。

2.2 微观尺度下的控制方程

当流场中  $f(x,y,t)$  已知时,由上述宏观模型可计算出流场中的流速及压力分布,计算格式见文<sup>[2]</sup>,而  $f$  由下式计算:

$$f(x,y,t) = \sum_{i=1}^{N_b} \frac{4}{3} \pi R_i^3(t) \quad (17)$$

其中  $R_i(t)$  为  $(x,y)$  点的邻域内某一汽泡的半径,  $N_b$  为该邻域内单位体积中汽泡的个数。

汽泡是由气核运动生长而成,当气核的初始半径及当地压力场、速度场,液体中的含气量(溶解气体含量)已知时,单气核的运动过程由方程(2)~(5)确定。

由于液体介质中含有大量的气核,在运动及生长过程中气核间将产生相互影响,在局部均匀的假定下,其主要影响表现为改变了当地压力场,其改变量为<sup>[3]</sup>

$$\Delta P = \rho \sum_{i=1}^{N_b} \left[ (R_i^2 R_i + 2 R_i R_i^2) / r_i + \frac{1}{2} R_i^3 (\dot{u}_{bi} \cos \theta_i + V_{bi} \sin \theta_i) / r_i^2 + \frac{3}{2} R_i^2 R_i (u_{bi} \cos \theta_i + V_{bi} \sin \theta_i) \right] \quad (18)$$

其中  $r_i$  为第  $i$  个汽泡与所考虑点  $(x, y)$  之间的距离,  $u_{ib}$ ,  $V_{ib}$  分别为汽泡  $i$  在  $x, y$  方向的相对运动速度,  $N_b$  为  $(x, y)$  的邻域内汽泡总数,  $\theta_i$  为  $r_i$  与  $x$  轴的夹角。考虑气核相互影响及液体中的压力脉动后, 当地液体压力为:

$$P_L^* = P_L + \Delta P_L + P_L' \quad (19)$$

其中  $K_L'$  是随机量, 满足标准正态分布。

流场中任意点  $(x, y)$  的邻域内气核个数及其初始半径分布, 气核在当地邻域内的位置、液体的脉动压力等因素均为随机量, 满足一定的分布规律, 可用 Monte—Carlo 方法进行模拟, 作者在文<sup>[3]</sup>中对此作了详细的介绍, 气核运动方程的求解格式亦在该文给出。

式 (18), (19) 与单气核运动方程 (2) — (6) 联立, 即构成了微观尺度下流场空化形成的数学模型。宏观模型与微观模型联立, 即构成了紊流场中水动力学空化的统一数学模型, 分别采用适当的数值格式对宏观—微观模型进行求解, 则可对水利工程中的空化问题进行数值预报。

### 3 紊流场中空化状态的计算机诊断

水利工程中, 流场大都是高紊动状态的。对水工结构的空化问题, 人们感兴趣的是, 在某一具体的运行条件下是否会发生空化? 如发生空化, 其强度多大?

在给定运行条件下, 可以通过计算或实验等手段确定结构物附近的边界层内压力系数  $C_p$  的分布, 并结合液体介质中气核尺寸分布的测量结果, 利用计算机便可对结构物附近空化的状态 (不空化、初生空化、轻微空化、中等空化, 较强空化, 强空化等) 及空化起始点进行预测。为此必须对空化状态的判据作出人为的规定。

由于空化是由于水介质中的气核在低压及扩散等因素联合作用下丧失其平衡状态所致, 显然, 在拉应力区 (液体压力  $P_l$  小于蒸汽压力  $P_v$  的区域) 单位体积的液体中, 丧失平衡的气核数量越多, 空化程度就越高, 据此, 我们定义: 通过流场物面附近最小压力断面的每  $\text{cm}^3$  液体中, 平衡失稳的气核个数为  $N_{cav}$ , 而流场的空化状态定义为:

$$\begin{cases} N_{cav} < 0.2, \text{无空化} \\ N_{cav} = 0.2, \text{初生空化} \\ 0.2 < N_{cav} < 1.0, \text{轻微空化} \\ 1.0 < N_{cav} < 5.0, \text{中等空化} \\ 5.0 < N_{cav} < 10.0, \text{较强空化} \\ N_{cav} > 10.0, \text{强空化} \end{cases} \quad (20)$$

$N_{cav}$  定义中的具体数值带有一定的人为性, 而空化状态强弱的判别本身就是定性的, 因为没有有一个绝对的尺度来度量空化状态的强弱, 因此, 这两个概念是互相适应的。

在流场速度及压力分布已知的前提下, 借助于方程 (2) — (5) 可以计算出来流中处于平衡条件下, 且具有初始半径  $R_0$  的气核经过拉应力区后的半径  $R_{max}$ , 并根据式 (6)

判别它是别否失稳、在何处失稳。实验表明,在  $1\text{cm}^3$  水介质中,气核数量  $n$  与其平衡半径  $R_0$  的关系可以表示为:

$$n(R_0) = N_0 R_0^{-\beta} \quad (21)$$

设大于某一半径  $R_0^*$  的气核经过拉应力区后其平衡失稳,则

$$N_{\text{cav}} = N_0 (R_0^*)^{1-\beta} / (\beta - 1) \quad (22)$$

从而:

$$R_0^* = \left[ \frac{N_0}{(\beta - 1) N_{\text{cav}}} \right]^{\frac{1}{\beta - 1}} \quad (23)$$

根据式(20)中  $N_{\text{cav}}$  算出对应的  $R_0^*$ ,以此作为初始半径,可计算出该气核经过拉应力区后是否失稳,在何处失稳,进而对整个流场在给定条件下的空化状态进行判别。

#### 4 数值算例

图 1 所示为一安装在高速水洞内的弓形体,其物面压力系数分布亦在图中给出。水洞为矩形断面,宽 8cm,高 7cm,弓形体高为 1.67cm,长  $L = 10\text{cm}$ ,图中压力系数分布为测量值。

取气核平衡半径分布函数为:

$$n(R_0) = 810 R_0^{-4.0}$$

对一组不同的  $\sigma$  计算了流场空化状态,其结果如表 1 所示。在图 2 中给出了实验观察到的相应  $\sigma$  数下空化区的范围,由图 2 可定性判断出本文计算的结果是合理的。

表 1 不同空化数  $\sigma$  下流场空化状态的预测

空化数 $\sigma$	0.692	0.685	0.656	0.640	0.568
空化状态	初生 (实验值:0.702)	轻微空化	中等空化	较强空化	强空化
起始位置 $X_1$	5.2 (cm)	4.9	4.8	4.62	4.60

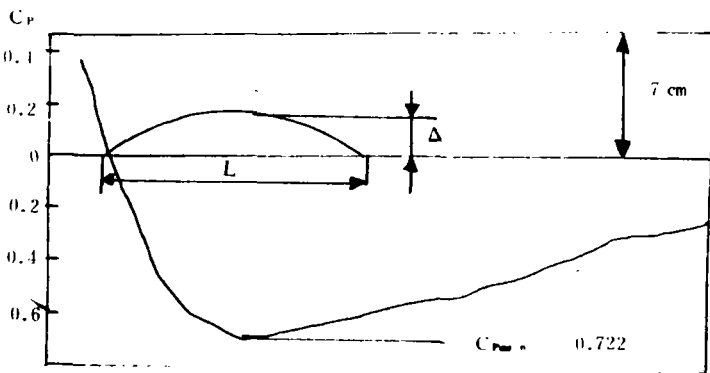


图 1 高速水洞内的弓形体及其物面压力系数的分布

( $R_{eL} = 1.2 \times 10^6$ )

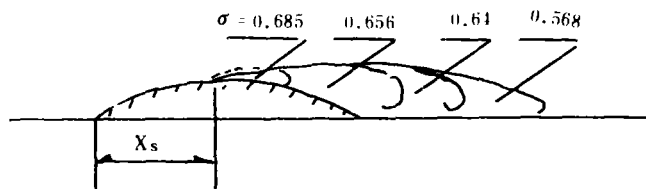


图2 不同空化数  $\sigma$  下弓形体绕流场空化区范围实验结果

### 参 考 文 献

- [1] 19th ITTC 空化委员会工作报告, 1990.
- [2] 黄建波, 潘森森. 二维非恒定空化流的数学模型, 水科学青年学术论文集, 水利电力出版社, 1990, 科技新书目: 230-114.
- [3] 黄建波. 紊流场中气核运动及空化状态的预测. 全国第一届计算水利学学术讨论会论文集, 大连, 1991.
- [4] 黄建波. 初生空化数及空化荷载的预测, 博士学位论文, 大连理工大学, 1987.

## On Cavitation Phenomena In Hydraulic Engineering

Huang Jianbo

(East China Institute of Metallurgy Maanshen 243002, Anhui Province)

**Abstract:** Based on the Navier-Stokes equations and the equations for bubble motion and its diffusive growth, an unified mathematical model for describing cavitation process of gas nuclei in a turbulent flow is proposed. From this model, the similitude principles for cavitation of turbulent flows are derived. It is pointed out that cavitation similitude includes two sides: macroscopic and microscopic. Cavitation phenomenon is in fact the process of criterion transition of gas nuclei in a flow—from microscopic to macroscopic. This character should be taken into account when consider cavitation incipience and its similitude. The paper shows that under depressurizing conditions, cavitation similitude modelling is very difficult. It is an adoptable mean to combine the methods of numerical and experimental simulating of the phenomenon to overcome the so called "scale effects" of cavitation in hydraulic engineering.

**Keywords:** Cavitation, Cavitation incipience, Similitude modelling, Bubble dynamics