

# 空间角投影规律性的研究\*

孙伯鲁

(机械工程系)

**摘 要:** 本文是文献[1]的续篇。专门研究“线线型”空间角的投影规律、定量变换的自动定位及其 $2^n$ 等分角线投影的确定等问题。文中通过对该类型空间角的组成形式进行统计分类,确立了适用于所有组合形式的几何模型,完善了当前广泛使用的、建立在某种特定条件下的空间角及其正投影间的函数关系表达式,并揭示了它们之间的内在规律。除可静态地解决空间角的计算外,还可动态地研究空间角定量变换(包含一般位置非直角投影存真)的自动定位,并首次提出了解决角度 $2^n$ 等分角线投影的数学表达式。

**关键词:** 空间角, 投影规律性, 定量变换, 等分角线  
**中国图书分类号:**

所有不在投影面上的几何元素(直线、平面)形成的有关角度,与其投影间具有空间关系,称之为空间角度。根据它的组成特点,可以分为三个类型:

1. 以单一直线或平面与投影面间所形成角度为基础的简单型:所形成的角度表现为对投影面的倾角和对投影轴的投影角、迹线角;
2. 以线面从属关系为基础的线面型:在文献[1]中已作了详述;
3. 以相交两直线间关系为基础的线线型:为本文讨论的主题,所形成的夹角简称为空间角。

空间角的投影不同于直线段,它可能大于等于或小于角本身,内在关系比较复杂,加上空间关系的千变万化,给根据投影判断它的空间情况、解决度量和定位问题带来很大困难。为此,迫切需要解决空间角投影的规律性问题。同行学者对此进行了不少有益的探讨。笔者在前人工作的基础上,建立了包容所有可能存在的空间情况的通用几何模型;完善了广泛使用的数学表达式。为全面揭示空间角投影的内在规律,提供了数学依据。在此基础上,较全面、系统地解决了画法几何学中关于角度投影的一些深层问题,如空间角的定量变换,非直角投影存真及角度 $2^n$ 等分角线投影的确定等。更具重要意义的是为使用计算机作研究工具创造了条件,使问题的解决,实现了自动化。

\* 河南省自然科学基金资助项目

\*\* 收稿日期: 1990.12.22

文中所得结论均经计算机运算或自动绘图检验, 证明了其正确性和通用性, 在图学理论和工程技术中有一定的实用价值。

## 1 几何模型及通用函数关系

由于组成空间角的每条直线在空间可能有四种不同的走向<sup>[1]</sup>, 故两条直线间共有  $C_4^1 \times C_4^1 = 16$  种不同的组合形式。抽出其共性, 可将它们归属为四个基本组合类型。它们分别是: 同型同向、同型反向、反型反向和反型同向, 见表1。同一种组合类型, 遵循相同函数关系的制约。分别用系数  $R$ 、 $l$  表示其特征。

现以反型同向组合关系为例, 讨论有关参数间的内在函数关系。

### 1.1 空间角与夹角边参数间的函数关系

参看图1。设:

$\theta$ —两直线  $SA$ 、 $SB$  组成的空间角;

$\theta_V$ — $\theta$  的  $V$  投影;

$\theta_H$ — $\theta$  的  $H$  投影;

$\alpha_a$ 、 $\alpha_b$ —两直线对  $H$  面的倾角;

$\beta_a$ 、 $\beta_b$ —两直线对  $V$  面的倾角;

$SA$ 、 $SB$  为一个单位长度。

1) 由余弦定理:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos\theta$$

$\because SA$ 、 $SB$  为一个单位长度。

$$\therefore AB^2 = 2(1 - \cos\theta) \quad (1)$$

同理, 在  $H$  投影中有:

$$ab^2 = \cos^2 \alpha_a + \cos^2 \alpha_b - 2 \cdot \cos \alpha_a \cdot \cos \alpha_b \cdot \cos \theta_H \quad (2)$$

2) 由实长与投影关系:

$$AB^2 = ab^2 + \triangle Z_{AB}^2 \Rightarrow 2(1 - \cos\theta) = ab^2 + \triangle Z_{AB}^2 \quad (3)$$

$$\triangle Z_{AB}^2 = \sin^2 \alpha_a + \sin^2 \alpha_b + 2 \sin \alpha_a \cdot \sin \alpha_b \quad (4)$$

3) 将 (2)、(4) 式代入 (3), 并化简, 可得:

$$\cos\theta = \cos \theta_H \cdot \cos \alpha_a \cdot \cos \alpha_b - \sin \alpha_a \cdot \sin \alpha_b \quad (5)$$

同理, 可推出  $\cos\theta = \cos \theta_V \cdot \cos \beta_a \cdot \cos \beta_b - \sin \beta_a \cdot \sin \beta_b$  (6)

4) 由于系数  $k$ 、 $l$  与组合形式有关, 将它们引入公式 (5)、(6) 后, 便可得出适用于所有组合类型的通用关系式:

$$\cos\theta = \cos \theta_H \cdot \cos \alpha_a \cdot \cos \alpha_b + k \cdot \sin \alpha_a \cdot \sin \alpha_b \quad (7)$$

和:  $\cos\theta = \cos \theta_V \cdot \cos \beta_a \cdot \cos \beta_b + l \cdot \sin \beta_a \cdot \sin \beta_b$  (8)

$k$ 、 $l$  分别取 1 或 -1。各种组合形式的  $k$ 、 $l$  值见表1。

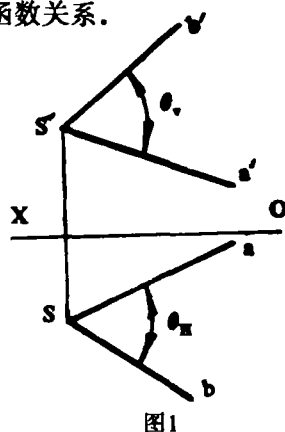


图1

## 1.2 空间角与所在平面参数间的函数关系

两夹角边可以确定一个平面, 设:  $\alpha_1$ —平面对 H 面的倾角  $\beta_1$ —平面对 V 面的倾角

则  $\triangle SAB$  的面积

$$\triangle = \frac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \sin\theta \Rightarrow \triangle = \frac{1}{2} \sin\theta$$

在 H 投影中  $\triangle sab$  的面积

$$\triangle_H = \frac{1}{2} sa \cdot sb \cdot \sin\theta_H \Rightarrow \triangle_H = \frac{1}{2} \cos\alpha_a \cdot \cos\alpha_b \cdot \sin\theta_H$$

而  $\triangle_H = \triangle \cdot \cos\alpha_1$

$$\therefore \frac{1}{2} \cos\alpha_a \cdot \cos\alpha_b \cdot \sin\theta_H = \frac{1}{2} \cdot \sin\theta \cdot \cos\alpha_1$$

$$\text{整理可得: } \sin\theta_H = \frac{\sin\theta \cdot \cos\alpha_1}{\cos\alpha_a \cdot \cos\alpha_b} \quad (9)$$

$$\text{同理: } \sin\theta_V = \frac{\sin\theta \cdot \cos\beta_1}{\cos\beta_a \cdot \cos\beta_b} \quad (10)$$

各公式均适用于夹角边不为单位长度时。

## 1.3 分析和讨论

由 (7) 式可以看出, 空间角 ( $\theta$ ) 与其投影 ( $\theta_H$ ) 之间的函数关系与夹角边的空间位置 (倾角)、组合形式 (系数  $k$ ,  $l$ ) 和角性 (锐、钝) 等有关。(7) 式与 (8) 式是对偶的, 锐角与钝角互补, 各种情况下推出的结论均可推广。直角中属直角投影定理范畴者, 此处不另讨论。

现以 (7) 式等为例, 分析夹角的一边或两边处于某特定位置时, 其投影的规律性。

### 1.3.1 当夹角之一边平行于投影面时, 如: $\alpha_a = 0$ 则 (7) 式成为:

$$\cos\theta = \cos\theta_H \cdot \cos\alpha_b$$

$$\because 0 < \cos\alpha_b < 1$$

$$\therefore \text{当 } \theta < 90^\circ \text{ 时: } \theta > \theta_H$$

而当  $\theta > 90^\circ$  时, 则  $\theta < \theta_H$

### 1.3.2 当夹角之一边为其所在平面的最大斜度线时, 如 $\alpha_a = \alpha_1$ , 则代入 (9) 式可得:

$$\sin\theta_H = \sin\theta / \cos\alpha_b$$

当  $\theta < 90^\circ$  时, 则  $\theta < \theta_H$  当  $\theta > 90^\circ$  时, 则  $\theta > \theta_H$

### 1.3.3 当夹角之两边同名倾角相等时, 如: $\alpha_a = \alpha_b$

(1) 若  $\alpha_a = \alpha_b \neq 0$

由 (7) 式可得:  $\cos\theta = \cos\theta_H \cdot \cos^2\alpha_a + k \cdot \sin^2\alpha_a$

即  $\cos\theta = \cos\theta_H + \sin^2\alpha_a (k - \cos\theta_H)$

当  $K = 1$ , 则  $K - \cos\theta_H \geq 0 \quad \theta \leq \theta_H$

当  $K = -1$ , 则  $K - \cos\theta_H \leq 0 \quad \theta \geq \theta_H$

如  $\theta = \theta_H$  则  $k - \cos\theta_H = 0 \Rightarrow \cos\theta_H = k$

由于  $k = \pm 1$ . 所以, 如果  $\theta = \theta_H$ , 则  $\cos\theta_H = \pm 1$ . 即  $\theta = \theta_H = 0^\circ$  或  $180^\circ$ . 因此可得出结论: 当夹角两边有不为零的相等同名倾角时, 除非  $\theta$  为平角或零度外, 在相应投影面上的投影一般不等于角本身.

(2) 若  $\alpha_a = \alpha_b = 0$

代入 (7) 式可得  $\cos\theta = \cos\theta_H$ , 即众所周知的反映实形的情况.

1.3.4 当角度  $\theta = 90^\circ$  而夹角边无任何特征时, 则由式 (7) 可得:

$$\cos\theta_H = -k \cdot \lg\alpha_a \cdot \lg\alpha_b$$

若  $k = 1$  则  $\theta_H > 90^\circ$   $k = -1$  则  $\theta_H < 90^\circ$

即在一般情况下, 直角的投影可为锐角或钝角, 视两夹角边的组合型式而定, 见表1.

1.3.5 其它情况下, 角度投影的定义域, 分别按锐角、钝角和直角三种情况, 列成表1, 供讨论分析其规律性时参考.

表1中角度投影的定义域有两个类型:

1) 与角本身的对比关系是确定的. 或大于、或小于, 如锐角中的 2-2、3-1 等.

2) 与角本身的对比关系不确定, 可能大于、等于或小于. 如锐角中的 1-1、1-2, 钝角中的 4-1、4-2 等. 共有六种情况.

## 2 空间角的定量变换

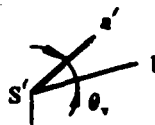
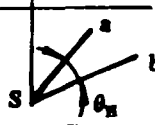

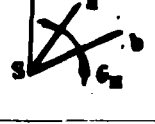
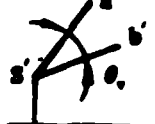
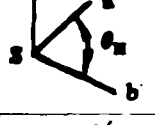
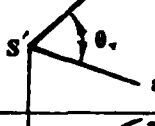
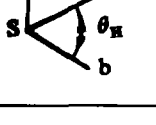
### 2.1 概述

定量变换系指将已知空间角投影成予定值的变换. 当予定值等于角本身, 成为投影存真的变换.

根据角度投影定理<sup>(2)</sup>: “任意角度都可作为给定角度的正投影.” 证明了定量变换的可能性. 但要准确地确定给定角度的大小与空间位置的对应关系, 却比较困难. 为此, 从40年代起, 国内外学者纷纷用图解和解析法去探求答案[2]、[3]、[4], 终因图解和计算繁难, 空间关系复杂, 所得效果均不理想.

在建立了通用数学模型的基础上, 并辅以计算机作为工具, 则这一繁难问题的解决变得非常容易. 如上所述, 当已知空间角的位置, 可由 (7) 或 (8) 式求得其大小. 反之, 作为它的逆问题, 已知空间角的大小及不完善的位置条件, 也可由 (7) 或 (8) 式进行准确的定位. 由于可以计算机为工具, 这一工作可以自动进行, 使得对空间角进行定量变换成为现实, 展现了丰富的理论和实际内涵.

表 1: 一般情况下角度投影的定义域

序 号		组合类型		图 例	角投影的定义域		
					$\theta < 90^\circ$	$\theta > 90^\circ$	$\theta = 90^\circ$
1	1-1	同型 同向	$l=1$		$90^\circ > \theta_v \geq \theta$	不存在 此种组合	
	1-2		$k=1$		$90^\circ > \theta_H \geq \theta$		
2	2-1	同型 反向	$l=1$		$\theta_v \geq \theta$	$\theta_v > \theta$	
	2-2		$k=-1$		$\theta_H < \theta$	$\theta_H < \theta$	
3	3-1	反型 反向	$l=-1$		$\theta_v < \theta$	$\theta_v < \theta$	
	3-2		$k=1$		$\theta_H \geq \theta$	$\theta_H > \theta$	
4	4-1	反型 同向	$l=-1$		$\theta_v < \theta$	$\theta_v \leq \theta$	$\theta_v < \theta$
	4-2		$k=-1$		$\theta_H < \theta$	$\theta_H \leq \theta$	$\theta_H < \theta$

## 2.2 定量变换的数学关系式

### 2.2.1 定量变换予定值的有解范围

予定值不是可以随意指定的。由表 1 可以看出, 它必须在角度投影的定义域内, 才可能有解。当进行投影存真的定量变换时, 有解范围更窄, 只能在角度投影定义域为不确定的六种情况下才可能有解。所以, 在定量变换前, 应正确的给定予定值, 否则将无解。

### 2.2.2 数学关系式的推导

由于定量变换的求解, 是以基本关系式 (7)、(8) 为基础, 所以它的数学关系式是由 (7)、(8) 式派生而来。

已知条件: 在 (7)、(8) 两式中, 只需给出包含空间角  $\theta$  及角投影的大小等三个条件。在进行定量变换时, 已知条件通常以投影形式给出, 如图 2(b) 中的实线所示。

1) 定边 SA 的两投影;

2) 待定边 SB 的一个投影, 它与定边的一个投影应形成预定值。如图 2 (b) 中给出了  $S'b'$ ,  $\angle b'S'a'$  为空间角  $\theta$  在 V 投影中的预定值;

3) 空间角  $\theta$  的大小。

上述给定条件分别为  $\theta$ 、 $\theta_v$  和  $\alpha_a$ 、 $\beta_a$ 。将相关值代入 (8) 式, 则得:

$$\cos\theta = \cos\theta_v \cdot \cos\beta_a \cdot \cos\beta_b + k \cdot \sin\beta_a \cdot \sqrt{1 - \cos^2\beta_b}$$

经平方、化简整理, 可得:

$$(\cos^2\theta \cdot \cos^2\beta_a + \sin^2\beta_a) \cdot \cos^2\beta_b - 2\cos\theta \cdot \cos\theta_v \cdot \cos\beta_a \cdot \cos\beta_b + (\cos^2\theta - \sin^2\beta_a) = 0 \quad (11)$$

显然, 上式为以  $\cos\beta_b$  为变量的一元二次方程式, 它是在 V 投影中进行定量变换的基本方程式, 一般有两解。因待定边的一个投影已经指定, 故在投影图中也是两解。如图 2 (b) 中两条虚线  $Sb$ 、 $Sb_1$  及图 2 (a) 中的 B、 $B_1$  两点所示。

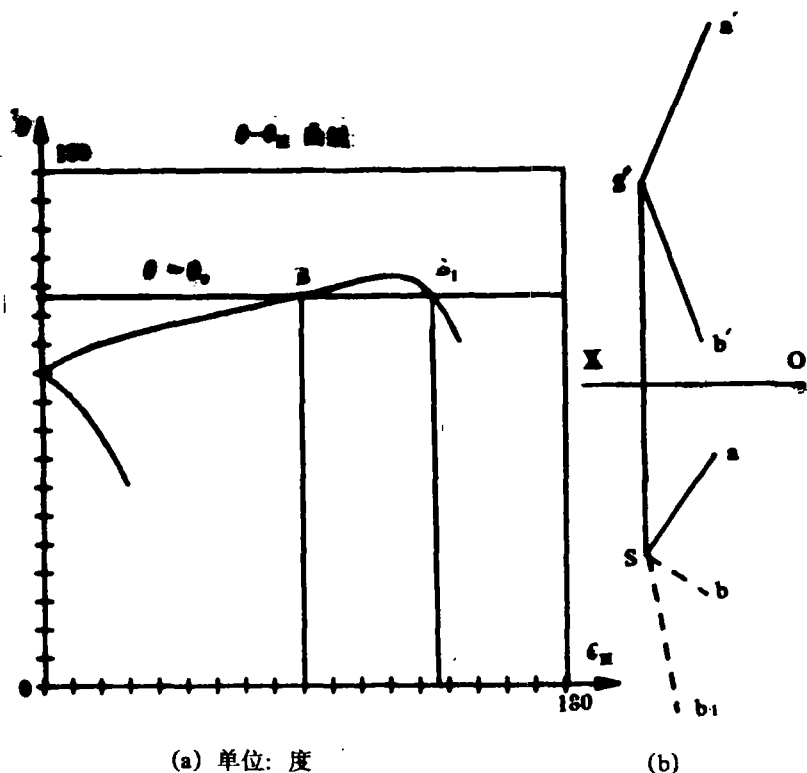


图 2

表 2:

No:	$\alpha_v$	$\beta_H$
1	66	125
2	110	34.11633
3		80.85603

同理, 可由(7)式推出与(11)式对偶的基本方程式, 用于在 H 投影上进行定量变换:

$$(\cos^2 \theta \cdot \cos^2 \alpha_a + \sin^2 \alpha_a) \cdot \cos^2 \alpha_b - 2 \cos \theta \cdot \cos \theta_H \cdot \cos \alpha_a \cdot \cos \alpha_b + (\cos^2 \theta - \sin^2 \alpha_a) = 0 \quad (12)$$

### 2.2.3 定量变换的特殊情况—投影存真(反映实形)

两边均处于无任何特征的位置时, 其一个投影可能反映真实大小。若使在 H 投影中存真, 则有  $\theta_H = \theta$ , 用(12)式可进行定量求解。若使在 V 投影中存真, 则有  $\theta_v = \theta$ , 用(11)式进行定量求解。将它们分别代入对应公式中, 便可得到一般位置非直角投影存真的定位数学关系式; 在 H 投影存真时有:

$$(\cos^2 \theta \cdot \cos^2 \alpha_a + \sin^2 \alpha_a) \cdot \cos^2 \alpha_b - 2 \cos^2 \theta \cdot \cos \alpha_a \cdot \cos \alpha_b + (\cos^2 \theta - \sin^2 \alpha_a) = 0 \quad (13)$$

$$\text{在 V 投影中存真有: } (\cos^2 \theta \cdot \cos^2 \beta_a + \sin^2 \beta_a) \cdot \cos^2 \beta_b - 2 \cos^2 \theta \cdot \cos \beta_a \cdot \cos \beta_b + (\cos^2 \theta - \sin^2 \beta_a) = 0 \quad (14)$$

### 2.3 定量变换的自动图解和动态显示

定量变换中待定边的定位, 除可用上述公式解析计算外, 还可利用函数关系曲线, 进行图解和显示其变化态势。

所依据原理是: 令待定边的未知投影角作  $0^\circ$  至  $180^\circ$  的连续变化, 描绘出  $\theta$  与变化的投影角间的函数关系曲线, 参看图 2(a)。利用轨迹扫描法, 动态显示图解过程, 并可直观地展现出有解范围, 有解数量和答案的准确定位。如果将(11)、(12)式的计算结果画入图中, 则与图解结果完全吻合。图 2(a)为据此原理画出的  $\theta - \theta_H$  曲线和在曲线上进行 V 投影中存真( $\theta_v = \theta$ )的图解定位过程。有关定量变换的一系列问题, 均可在图中分析和研究。

## 3 空间角 $2^n$ 等分角线投影的确定

空间角  $2^n$  等分角线的投影, 一般情况下, 不是角度投影的  $2^n$  等分角线。用图解法求解, 过程十分复杂, 且精度很低。

本文在利用空间角投影规律性的结论的基础上, 建立了简便的数学表达式, 并在计算机上经过运行验证, 确认了结论的正确性。

### 3.1 数学关系式的建立

参看图 3。设已知  $\triangle SAB$  及角 S 的分角线 SM 的两投影。

由分角线定理:

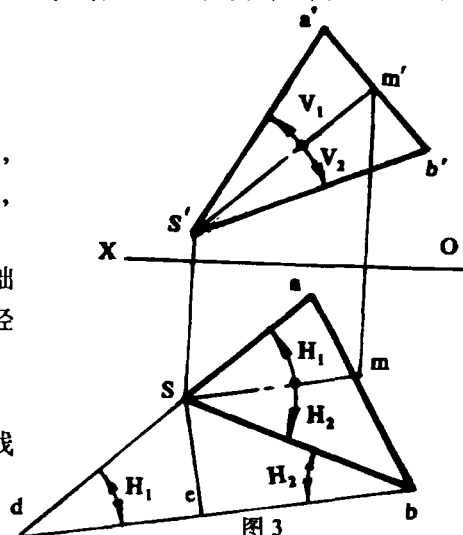


图 3

$$\frac{SA}{SB} = \frac{AM}{MB} = \frac{am}{mb} \quad (15)$$

而  $\because SA = \frac{Sa}{\cos\alpha_a}$ ,  $SB = \frac{Sb}{\cos\alpha_b}$  代入(15)式:

$$\frac{Sa \cdot \cos\alpha_b}{Sb \cdot \cos\alpha_a} = \frac{am}{mb} \quad (16)$$

设在 H 投影中, 分角线的投影 Sm 将  $\theta_H$  划分为  $H_1$ 、 $H_2$  两部分.

过 b 作  $bd \parallel Sm$ , 交 Sa 延长线于 d, 则在  $\triangle abd$  中, 有

$$\frac{Sa}{Sd} = \frac{am}{mb} \quad \text{代入 (16) 式得:}$$

$$\frac{Sa}{Sd} = \frac{Sa \cdot \cos\alpha_b}{Sb \cdot \cos\alpha_a} \Rightarrow Sd = Sb \cdot \frac{\cos\alpha_a}{\cos\alpha_b} \quad (17)$$

在  $\triangle Sbd$  中, 作  $Sc \perp bd$ , 则有

$$Sd \cdot \sin H_1 = Sb \cdot \sin H_2$$

代入 (17) 式, 整理:

$$\frac{\sin H_2}{\sin H_1} = \frac{\cos\alpha_a}{\cos\alpha_b} \quad (18)$$

设  $\frac{\cos\alpha_a}{\cos\alpha_b} = \varepsilon$ , 将  $H_2 = \theta_H - H_1$  代入上式:

$$\frac{\sin(\theta_H - H_1)}{\sin H_1} = \varepsilon, \Rightarrow \frac{\sin\theta_H}{\sin H_1} - \cos\theta_H = \varepsilon \Rightarrow \operatorname{tg} H_1 = \frac{\sin\theta_H}{\varepsilon + \cos\theta_H} \quad (19)$$

同理可推出

$$\operatorname{tg} V_1 = \frac{\sin\theta_v}{\Omega + \cos\theta_v} \quad (20)$$

式中  $\Omega = \cos\beta_a / \cos\beta_b$

如果将  $\angle ASB$  连续等分, 便可求出其  $2^n$  等分角线的投影, 图 4 中 SF 为  $\angle ASB$  二等分角线的投影.

表 3:

No:	$\alpha V$	$\beta H$
1	23	56
2	123	147



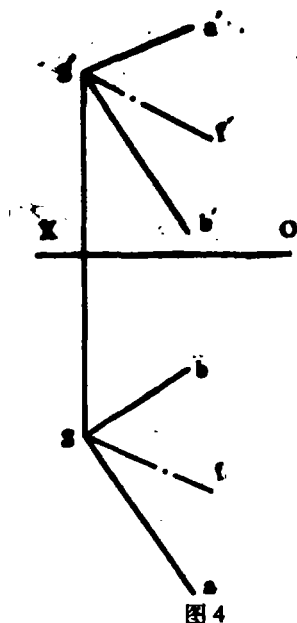


图 4

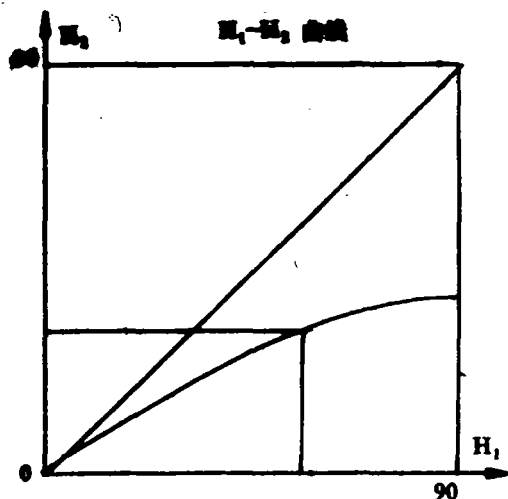


图 5 单位: 度

### 3.2 分析讨论

由式 (18) 可以看出:

1) 当  $\alpha_a = \alpha_b$  时, 则  $\varepsilon = 1$ ,  $H_1 = H_2$ .

即, 当夹角两边同名倾角相等时, 投影的分角线是分角线的投影。

2) 当  $\alpha_a \neq \alpha_b$  时,  $\varepsilon \neq 1$ .

若  $\varepsilon > 1$  则  $\alpha_a < \alpha_b$ ,  $H_2 > H_1$

$\varepsilon < 1$  则  $\alpha_a > \alpha_b$ ,  $H_2 < H_1$

即, 一般情况下, 投影的分角线靠近倾角小的一边。

为了直观说明这一现象, 画出  $H_1-H_2$  关系曲线, 见图 5。图中为  $\varepsilon < 1$  时的情况, 此时  $H_2$  永  $< H_1$ 。

求解分角线投影数学表达式的建立, 大大方便了图学理论及作图实际中的应用。有一定的理论和实际意义, 如求解入射光与反射光的分角线就是一例。

## 4 结束语

文中所导出的 (7)、(8) 两式, 是研究线线型空间角诸问题的基本关系式。

由于不平行的直线和平面、平面和平面间的夹角问题, 均可归结为线线夹角求解, 故由基本关系式可以定量解决:

- ① 不平行的两直线、直线和平面及平面与平面间夹角;
- ② 上述所有线面相关夹角的定量变换;
- ③ 不平行两直线, 两平面间夹角的  $2^n$  等分角线、面投影的确定; 等等。

其中, 关于角度  $2^n$  等分元素的定量确定, 国内外尚未见有类似研究, 属首次提出。

文中所有有关规律性结论, 均经计算机运算和绘图检验证明了立论的正确性。

### 参 考 文 献

- (1) 孙伯鲁. 空间角度自动计算的方案设计. 郑州工学院学报. 1990, 11 (1), 69
- (2) 艾运钧. 工程图学分析引论. 中国铁道出版社. 1984, 46
- (3) ГОРДОН.В. КУРС НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ. МОСКВА. 1956. 381
- (4) 朱辉等. 高等画法几何学. 上海科技出版社. 1985. 77

## A Study on Projection Law of Space Angles

Sun Bolu

(Department of Mechanical Engineering)

**Abstract:** This paper is a follow-up of reference[1]. It deals specially with the "line-line type" space angle projection law automatic location of quantitative transformation and definition of 2<sup>nd</sup> setrix curve projections. By statistical sorting to the combinatorial from of this kind of space angles, the paper establishes geometric model which is fit for any combinatorial forms, consummates the functional relation expressions of space angles and its orthogonal projection which are widely used established under some particular conditions, and also discloses the intrinsic law between them. Not only can it solve the space angle calculation statically, but it can also study the automatic location of quantitative transformation of space angles dynamically. And for the first time, it gives out the mathematical expression to solve the 2<sup>nd</sup> setrix curve projections.

**Keywords:** Space angle, projection law, setrix curve quantitative transformation.