

# 非等距节点曲面拟合的一种方法\*

郭 涛

(郑州工学院化学工程系)

**摘 要:** 本文给出了一种在非等距节点情况下,利用含有控制参数的三次样条进行曲面拟合的方法。控制参数的引入是为了调整曲面的形状从而满足相应的精度要求。计算结果表明,该方法具有较高精度,应用灵活且简单易行。

**关键词:** 样条, 曲面拟合方法

**中国图书分类号:** O241

在工程实际中,常常会遇到多元函数的逼近问题,其中二元函数的逼近尤其具有代表性。例如在飞机机身、汽车车身、船体等的设计以及实验数据的处理工作中,往往要求用一个函数去逼近一个曲面而不是一条曲线。因此,曲面拟合问题的研究在工程上具有重要意义。

与曲线逼近一样,曲面逼近通常有两种情况:一是全局逼近。即寻找一个模型函数  $F(x, y)$ , 要求  $F(x, y)$  在整个区间上与原函数  $f(x, y)$  的误差最小。这种方法的优点是拟合表达式简单,但满足精度要求的模型函数  $F(x, y)$  的寻找非常困难。另外一种情况是局部逼近。即把整个拟合区间划分为一个个子区间,在每一个子区间上构造函数  $F_i(x, y)$ , 要求在该区间内,  $F_i(x, y)$  与被拟合函数  $f(x, y)$  的误差最小,这就是样条拟合的概念。

目前,对矩形域上二元函数拟合问题的研究,只限于等距节点的情形(见文献[1]、[2]、[3]、[4])。本文根据矩形域等距节点曲面拟合的思想,推导了矩形域非等距节点情况下含有控制参数的三次曲面样条拟合公式,并用该公式进行了数值计算。结果表明,该方法精度较高,工程应用方便。

## 1 公式推导

### 1.1 非等距节点曲线拟合公式推导

问题的提出: 给定区间  $[a, b]$  内的一组不等距划分  $x_i$  及相应的  $y_i = f(x_i)$ , 要求在每个子区间  $[x_i, x_{i+1}] (i = 1, 2, \dots, n-1, x_1 = a, x_n = b)$  上找出一个三次样条  $P(i)$

---

\* 收稿日期: 1990.12.22

$= At^3 + Bt^2 + Ct + D$ , 满足下列条件:

$$\begin{cases} P(0) = y_i + \lambda h_i h_{i+1} f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \\ P(1) = y_{i+1} = \lambda h_{i+1} h_{i+2} f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] \\ P'(0) = h_{i+1} \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h_i + h_{i+1}} \\ P'(1) = h_{i+1} \cdot \frac{y_{i+2} - y_i}{h_{i+1} + h_{i+2}} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $t = \frac{x - x_i}{h_{i+1}}$ ,  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ ,  $f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$  表示  $f(x)$  在  $x_i$  处的二阶差商。

式中  $\lambda$  称为控制参数, 其物理意义可用等距节点情形定性说明。实际上, 原始数据的二阶差分刻画了被拟合曲线的凹凸性<sup>[1]</sup>。如图1可以直观地看到: 当  $y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} < 0$  时, 曲线向上凸。这样, 参数  $\lambda$  其实控制了拟合曲线在  $x_i$  处对  $y_i$  的逼近程度。 $\lambda = 0$  时, 显然在  $x = x_i$  时  $y = y_i$ , 此时成为插值曲线; 当  $\lambda > 0$  时, 拟合曲线将成为图示虚线, 它实际上是一种磨光曲线。

$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} > 0$  的情况 (如图2) 仿此不难理解。

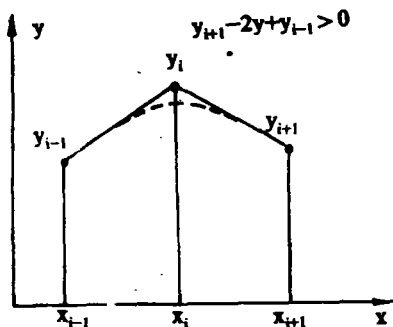


图1

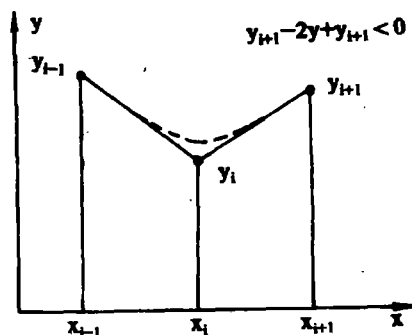


图2

等距节点时,  $h_i = h_{i+1}$ , 问题变成[4]所讨论的情况:

$$\begin{cases} P(0) = y_i + \lambda \Delta^2 y_{i-1} \\ P(1) = y_{i+1} + \lambda \Delta^2 y_i \\ P'(0) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2} \\ P'(1) = \frac{y_{i+2} - y_i}{2} \end{cases}$$

下面推导公式。

由于  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ ,  $h_{i+2} = x_{i+2} - x_{i+1}$ , 若记  $f(x)$  在  $x_i$  处的一阶差分为  $g_i$ , 则

$$g_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad g_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}, \quad g_{i+2} = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+2}}$$

因此

$$\begin{aligned} f_i &= f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{g_{i+1} - g_i}{h_{i+1} + h_i} \\ &= \frac{1}{(h_i + h_{i+1})} \cdot \frac{1}{h_{i+1}} y_{i+1} - \frac{1}{h_i + h_{i+1}} \cdot \left[ \frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_i} \right] y_i \\ &\quad + \frac{1}{(h_i + h_{i+1})} \cdot \frac{1}{h_i} y_{i-1} \\ f_{i+1} &= \frac{1}{(h_{i+1} + h_{i+2})} \cdot \frac{1}{h_{i+2}} y_{i+2} - \frac{1}{(h_{i+1} + h_{i+2})} \cdot \left[ \frac{1}{h_{i+2}} + \frac{1}{h_{i+1}} \right] y_{i+1} \\ &\quad + \frac{1}{(h_{i+1} + h_{i+2})} \cdot \frac{1}{h_{i+1}} y_i \end{aligned}$$

对  $P(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$  求导得:

$$P'(t) = 3At^2 + 2Bt + C$$

结合 (1) 得到:

$$\begin{cases} y_i + \lambda h_i h_{i+1} f_i = D \\ y_{i+1} + \lambda h_{i+1} h_{i+2} f_{i+1} = A + B + C + D \\ h_{i+1} \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h_i + h_{i+1}} = C \\ h_{i+1} \cdot \frac{y_{i+2} - y_i}{h_{i+1} + h_{i+2}} = 3A + 2B + C \end{cases} \quad (2)$$

解上式得到 A、B、C、D 的表达式:

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{h_{i+1}(2\lambda - 1)}{h_i + h_{i+1}} y_{i-1} + \left[ 2(1 - \lambda) - \frac{h_{i+1} + 2\lambda h_{i+2}}{h_{i+1} + h_{i+2}} \right] y_i \right. \\ &\quad \left. + \left[ -2(1 - \lambda) + \frac{h_{i+1} + 2\lambda h_i}{h_i + h_{i+1}} \right] y_{i+1} + \left[ \frac{h_{i+1}(1 - 2\lambda)}{h_{i+1} + h_{i+2}} \right] y_{i+2} \right] \\ B &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i} - \frac{3h_{i+1}(2\lambda - 1)}{h_{i+1} + h_i} \right] y_{i-1} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_{i+2}} + 3 \left[ 2(1 - \lambda) - \frac{h_{i+1} + 2\lambda h_{i+2}}{h_{i+1} + h_{i+2}} \right] \right] y_i \right\} \end{aligned}$$

$$-\left[\frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_{i+2}}+3\left[-2(1-\lambda)+\frac{h_{i+1}+2\lambda h_i}{h_i+h_{i+1}}\right]\right]y_{i+1}$$

$$+\left[\frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_{i+2}}-3\left[\frac{h_{i+1}(1-2\lambda)}{h_{i+1}+h_{i+2}}\right]\right]y_{i+2}\}$$

$$C=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}y_{i+1}-\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}y_{i-1}$$

$$D=(1-\lambda)y_i+\frac{\lambda h_i}{h_i+h_{i+1}}y_{i+1}+\frac{\lambda h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}y_{i-1}$$

这样便得到:

$$P(t)=At^3+Bt^2+Ct+D$$

$$=[t^3, t^2, t, 1] \cdot M_\lambda \cdot [y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, h_{i+2}]^T \quad (3)$$

其中,  $M_\lambda$  为  $4 \times 4$  阶矩阵, 即

$$M_\lambda =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-h_{i+1}+2\lambda h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}, & 2(1-\lambda)-\frac{h_{i+1}+2\lambda h_{i+2}}{h_{i+1}+h_{i+2}}, & \frac{1}{2}\left[\frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_i}-\frac{3h_{i+1}(2\lambda-1)}{h_i+h_{i+1}}\right], & -\frac{1}{2}\left[\frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_{i+2}}+3\left[2(1-\lambda)-\frac{h_{i+1}+2\lambda h_{i+2}}{h_{i+1}+h_{i+2}}\right]\right] \\ -\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}, & 0, & \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}, & \frac{\lambda h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}, \\ \frac{\lambda h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}, & (1-\lambda), & \frac{\lambda h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}, & \frac{\lambda h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}} \end{bmatrix}$$

$$M_\lambda =$$

$$\begin{bmatrix} -2(1-\lambda)+\frac{h_{i+1}+2\lambda h_i}{h_i+h_{i+1}}, & \frac{h_{i+1}(1-2\lambda)}{h_{i+1}+h_{i+2}}, & -\frac{1}{2}\left[\frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_{i+2}}+3\left[-2(1-\lambda)+\frac{h_{i+1}+2\lambda h_i}{h_i+h_{i+1}}\right]\right], & \frac{1}{2}\left[\frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_{i+2}}-3\left[\frac{h_{i+1}(1-2\lambda)}{h_{i+1}+h_{i+2}}\right]\right] \\ \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}, & 0, & \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}, & \frac{\lambda h_i}{h_i+h_{i+1}} \end{bmatrix}$$

式(3)便是非等距节点时区间  $(x_i, x_{i+1})$  上的三次样条函数。计算时可根据  $x, y$  的数值选用相应区间内的样条函数的具体表达式。值得指出的是:

$\lambda=0$  时, (3) 表示一种插值曲线。

$\lambda = \frac{1}{3}$  时, (3) 表示一种保凸的磨光曲线.

$\lambda = \frac{1}{2}$  时, (3) 退化为一二次曲线, 从  $M_\lambda$  矩阵可清楚地看出这一点.

## 1.2 非等距节点曲面拟合公式推导

问题的提出: 设曲面  $Z = f(x, y)$  在矩形网格点  $(x_i, y_j) (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m)$  上的函数值  $f_{ij}$  为已知. 要求在每个单元矩形

域  $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+1})$  上找到一个二元函数  $F(x, y)$ , 使得在整个单元域上,  $F(x, y)$  趋近于  $f(x, y)$ , 或记为  $F(x, y) \rightarrow f(x, y)$ . 本问题可通过对 (3) 作乘积型推广<sup>[1]</sup> 得到解决.

固定  $y = y_j$ , 在  $x_i$  处对  $x$  作曲线拟合, 由 (3) 得:

$$P_x(x, y_j) = (u^3, u^2, u, 1) \cdot M_\lambda \cdot [f_{i-1, j}, f_{i, j}, f_{i+1, j}, f_{i+2, j}]^T \quad (4)$$

其中,  $u = \frac{x - x_i}{h_{i+1}}$ ,  $h_i = x_i - x_{i-1}$

对式 (4), 固定  $x = x_i$ , 对  $y$  在  $y_j$  处作曲线拟合, 由 (3) 式得:

$$\begin{aligned} P_y P_x(x, y) &= (v^3, v^2, v, 1) \cdot M_\mu \cdot \\ &\left\{ \begin{aligned} &(u^3, u^2, u, 1) \cdot M_\lambda \cdot (f_{i-1, j-1}, f_{i, j-1}, f_{i+1, j-1}, f_{i+2, j-1})^T \\ &(u^3, u^2, u, 1) \cdot M_\lambda \cdot (f_{i-1, j}, f_{i, j}, f_{i+1, j}, f_{i+2, j})^T \\ &(u^3, u^2, u, 1) \cdot M_\lambda \cdot (f_{i-1, j+1}, f_{i, j+1}, f_{i+1, j+1}, f_{i+2, j+1})^T \\ &(u^3, u^2, u, 1) \cdot M_\lambda \cdot (f_{i-1, j+2}, f_{i, j+2}, f_{i+1, j+2}, f_{i+2, j+2})^T \end{aligned} \right\} \\ &= J \cdot M_\mu \cdot F \cdot M_\lambda^T \cdot U^T \quad (5) \end{aligned}$$

式中,  $J = (v^3, v^2, v, 1)$ ,  $v = \frac{y - y_j}{\tau_{j+1}}$ ,  $\tau_j = y_j - y_{j-1}$

$U = (u^3, u^2, u, 1)$

$F =$

$$\begin{bmatrix} f_{i-1, j-1} & f_{i, j-1} & f_{i+1, j-1} & f_{i+2, j-1} \\ f_{i-1, j} & f_{i, j} & f_{i+1, j} & f_{i+2, j} \\ f_{i-1, j+1} & f_{i, j+1} & f_{i+1, j+1} & f_{i+2, j+1} \\ f_{i-1, j+2} & f_{i, j+2} & f_{i+1, j+2} & f_{i+2, j+2} \end{bmatrix}$$

$f_{i, j} = f(x_i, y_j)$

$M_\mu$  与  $M_\lambda$  一样是  $4 \times 4$  阶矩阵, 如果令  $\mu$  为  $y$  方向拟合时的控制参数, 那么,

在  $M_\lambda$  矩阵中将  $\tau_j, \tau_{j+1}, \tau_{j+2}$  代替  $h_i, h_{i+1}, h_{i+2}$ , 把  $\lambda$  换成  $\mu$ , 即得  $M_\mu$  矩阵.

(5) 式即为非等距节点时含有控制参数  $\mu, \lambda$  的样条曲线面拟合公式。

当  $\mu = \lambda = 0$  时, (5) 表示一种插值曲面。

$\mu = \lambda = \frac{1}{3}$  时, (5) 表示一种保凸的磨光曲面。

$\mu = \lambda = \frac{1}{2}$  时, (5) 表示二次曲面。

显然, 还可以根据  $x, y$  方向上不同的拟合精度要求, 选用不同的  $\mu$  和  $\lambda$  值。例如取  $\mu = 0, \lambda = \frac{1}{3}$  便得到这样一种曲面: 固定  $y$  时, 在  $x$  方向上它是插值曲线; 固定  $x$  时, 在  $y$  方向上它是磨光曲线。

## 2 应用举例

在作者的科研工作中, 需对某实验数据进行曲面拟合。根据式 (5) 编制了电算程序, 拟合了四张曲面<sup>〔5〕</sup>。拟合精度在程序外通过  $\lambda, \mu$  的不同选取人为地进行控制。

应当指出, 本方法由于要用到  $f(x, y)$  的二阶导数, 所以, 为了提高在边界点的拟合精度, 可以对原始数据在边界点处作线性延拓, 或根据数据本身的物理背景作适当延拓。

下面给出一例<sup>〔5〕</sup>:

原 始 值			拟 合 值		
$x$	$y$	$F$	$\lambda = 0$ $\mu = 0$	$\lambda = 0.5$ $\mu = 0.5$	$\lambda = \frac{1}{3}$ $\mu = \frac{1}{3}$
0.23	1.602	0.9107	0.9107	0.9757	0.9541
0.23	1.903	1.2030	1.2030	1.2480	1.2330
0.23	2.301	1.7980	1.7980	1.6570	1.6960
0.23	2.477	1.5500	1.5500	1.5990	1.5900
0.53	1.602	0.8718	0.8718	0.8974	0.8884
0.53	1.903	0.9859	0.9859	1.0592	1.0390
0.53	2.301	1.5360	1.5360	1.3970	1.4506
0.53	2.477	1.6699	1.6699	1.3492	1.4409

## 参 考 文 献

- 〔1〕 李岳生, 黄友谦. 数值逼近. 人民教育出版社. 1978
- 〔2〕 黄友谦. 曲线曲面的数值表示和逼近. 上海科学技术出版社. 1984
- 〔3〕 孙家昶. 样条函数与计算几何. 科学出版社. 1982
- 〔4〕 陈大正. 三次曲线曲面的一种构造法. 中山大学学报. 自然科学版. 1981, Vol.1
- 〔5〕 朵报楨, 郭涛. 离心式压缩机. 西安交大出版社. 1989

(下转 106 页)

意的, 证明本实验的恒温方法是有效的。

### 参 考 文 献

- (1) Susan Buchanan etc.. Energy of Activation and Temperature for the Hydrolysis of Sucrose. I.J.chem.Kinetics. 15, 1229 1983
- (2) 傅献彩等编. 物理化学(下册). 人民教育出版社. 1981
- (3) 复旦大学编. 物理化学实验(上册). 人民教育出版社. 1979

## The Measure of Activation Energy for the Hydrolysis of Suerose

Liu Luona    Wu Jinchun  
(Zhengzhou Institute of Technology)

**Abstract:** Using a simple device of constant temperature, We measure the activation energy for the hydrolysis of sucrose. The result is conformable to literature's. It indicates that the device is effective.

**Keywords:** Activation energy, hydrolysis, rotation.

---

(上接 112 页)

## A Surface Fitting Method on Occasion of Non-equally Spaced Nodes

Guo Tao  
(Department of Chemical Engineering)

**Abstract:** On occasion of non-equally spaced nodes, a surface fitting method by using cubic splines is developed in this paper. With the introduction of "approximated parameters-  $\lambda$  and  $\mu$ , the spline type can be altered conveniently. There fore this surface fitting method has the advantages of both spline interpolation and spline fitting.

**Keywords:** Spline, surface fitting, Methods.