第12卷 第4期 郑州工学院学报 Vol.12 No.4
1991年 12 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Dec. 1991

关于 A^+ 的两个性质的简明证法及其定理*

侯双印

(郑州工学院)

摘 要: 本文先对性质：设 $\forall A\in C^{m\times n}$，则有
$A^+=(A^HA)^+A^H=A^H(AA^H)^+$ 给出简明证法.
其次，证明了关于 A^+ 的两个定理.

关键词: 酉矩阵；广义逆矩阵；厄米特矩阵
中国图书分类号: O241

1 预备知识

矩阵的最大秩分解式的定义：设 $A\in C^{m\times n}$，且 $\mathrm{rank}(A)=r\geqslant 1$，如果 $A=BC$，其中 B 是 $m\times r$ 矩阵，C 是 $r\times n$ 矩阵，且 $\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(C)=r$，则称 BC 为 A 的最大秩分解式。

广义逆矩阵 A^+ 的定义：设 $A\in C^{m\times n}$，如果 $n\times m$ 的矩阵 G 满足 Penrose—Moore 方程:

(1) $AGA=A$ (2) $GAG=G$

(3) $(GA)^H=GA$ (4) $(AG)^H=AG$

的全部，则称 G 为 A 的广义逆矩阵记作 A^+.

定理 设 $\forall A\in C^{m\times n}$，且 $\mathrm{rank}(A)=r\geqslant 1$，则 A^+ 存在且唯一；又如果 A 的一个最大秩分解式为 BC，则有 $A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$.

2 A^+ 的两个性质的简明证法

由广义逆矩阵的定义，易证

(1) $(A^H)^+=(A^+)^H$

---

* 收稿日期: 1990.12.22

(2) $(AA^H)^+=(A^H)^+A^+$

(3) $(A^HA)^+=A^+(A^H)^+$

下面对A^+的两个性质给出简明证法，即证

定理　设$\forall A\in C^{m\times n}$，则有

①$A^+=A^H(AA^H)^+$

②$A^+=(A^HA)^+A^H$

证：①的证明：

①的右端$=A^H(A^H)^+A^+=A^H(A^+)^HA^+=(A^+A)^HA^+=A^+AA^+=A^+$

$=$①的左端.

②的证明：

②的右端$=A^+(A^H)^+A^H=A^+(A^+)^HA^H=A^+(AA^+)^H=A^+AA^+=A^+$

$=$②的左端.

3　关于A^+的两个定理

定理一　设$\forall A\in C^{m\times n}$，且$\mathrm{rank}(A)=r\geqslant 1$，则

(1) 存在$m\times m$的酉矩阵$\vee$，使

$\vee^{-1}AA^H\vee=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)=\wedge$

其中：①$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$为$AA^H$的全部特征值，$\overline{\wedge}=\wedge$，$\prod_{k=1}^{r}\lambda_k\neq 0$，$\lambda_{r+1}=\cdots$

$=\lambda_m=0$;

②$\vee$的第k个列向量是AA^H的对应于λ_k的一个单位特征向量$(k=1, 2, \cdots, m)$.

(2) $(AA^H)^+=\vee\wedge^+\vee^H$ 且 $A^+=A^H\vee\wedge^+\vee^H$

(3) $A^+=A^HP_1Q^{-1}P_1^H$

其中：①P_1为$\vee$的前r个列向量组成的矩阵；

② $Q=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r)$.

证明　(1) 的证明：

因为AA^H为$m\times m$的Hermite矩阵，且$\mathrm{rank}(AA^H)=r$，所以 (1) 为真.

(2) 的证明：

令 $\wedge_1=\begin{bmatrix}\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)\\ 0\end{bmatrix}_{m\times r}$，$\wedge_2=(E_r, 0)_{r\times m}$

则 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$ 的一个最大秩分解式为：

$\wedge=\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)=\wedge_1\wedge_2$

$\therefore \wedge^+ = \wedge_2^H(\wedge_2\wedge_2^H)^{-1}$　即 $(\wedge_1^H\wedge_1)^{-1}\wedge_1^H$

而　$AA^H = \vee \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)\vee^H$

$\therefore AA^H = \vee\wedge_1\wedge_2\vee^H$

令　$B = \vee\wedge_1$　$C = \wedge_2\vee^H$　则 B为$m\times r$矩阵，C为$r\times m$矩阵，且$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(C) = r$.

$\therefore AA^H = BC$为AA^H的一个最大秩分解式.

$$
\begin{aligned}
\text{故}(AA^H)^+ &= C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H\\
&= (\wedge_2\vee^H)^H[\wedge_2\vee^H(\wedge_2\vee^H)^H]^{-1}[(\vee\wedge_1)^H\vee\wedge_1]^{-1}(\vee\wedge_1)^H\\
&= \vee\wedge_2^H[\wedge_2\vee^H\vee\wedge_2^H]^{-1}[\wedge_1^H\vee^H\vee\wedge_1]^{-1}\wedge_1^H\vee^H\\
&= \vee\wedge_2^H(\wedge_2\wedge_2^H)^{-1}(\wedge_1^H\wedge_1)^{-1}\wedge_1^H\vee^H\\
&= \vee\wedge^+\vee^H
\end{aligned}
$$

且　$A^+ = A^H(AA^H)^+ = A^H\vee\wedge^+\vee^H$.

(3) 的证明：记　$\vee = (\underset{m\times r}{P_1},\ \underset{m\times(m-r)}{P_2})$，　$Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$

$$
\begin{aligned}
\text{则}AA^H &= \vee\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)\vee^H\\
&= (P_1, P_2)\begin{bmatrix} Q & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1^H\\ P_2^H\end{bmatrix}\\
&= (P_1Q, 0)\begin{bmatrix} P_1^H\\ P_2^H\end{bmatrix}\\
&= P_1QP_1^H
\end{aligned}
$$

令　$B = P_1Q$，$C = P_1^H$则B为$m\times r$矩阵，C为$r\times m$矩阵，且$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(C) = r$

$\therefore AA^H = BC$为AA^H的一个最大秩分解式.

$$
\begin{aligned}
\text{故}(AA^H)^+ &= C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H\\
&= P_1(P_1^HP_1)^{-1}(Q^HP_1^HP_1Q)^{-1}Q^HP_1^H\\
&= P_1(Q^HQ)^{-1}Q^HP_1^H\\
&= P_1(Q^2)^{-1}QP_1^H\\
&= P_1Q^{-1}P_1^H
\end{aligned}
$$

$\therefore A^+ = A^H(AA^H)^+ = A^HP_1Q^{-1}P_1^H$

例1　设$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$ 求A^+

解法一 用定理一的结论（2）做

由$\left|AA^H-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -4\\ -4 & 8-\lambda\end{vmatrix}=-10\lambda+\lambda^2=0$得$AA^H$的特征值为$\lambda=10$，0

AA^H的对应于$\lambda=\lambda_1=10$的一个单位特征向量为 $\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$

AA^H的对应于$\lambda=\lambda_2=0$的一个单位特征向量为 $\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$

令 $\wedge=\mathrm{diag}(10,\ 0)$则$\vee=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$

$$\therefore A^+=A^H\vee\wedge^+\vee^H$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

解法二 用定理一的结论（3）做

由解法一知 $P_1=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$ $Q=(10)$

$$\therefore A^+=A^HP_1Q^{-1}P_1^H$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}(10)^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt5},\ \frac{2}{\sqrt5}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

类似地可以证明下面的定理二：

定理二　设$\forall A\in C^{m\times n}$，且$\mathrm{rank}(A)=r\geqslant 1$　则

(1) 存在$n\times n$的酉矩阵U，使

$$U^{-1}A^{H}AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\wedge$$

其中：①$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$A^HA$的全部特征值，$\overline{\wedge}=\wedge$，$\prod_{k=1}^{r}\lambda_k\neq 0$，$\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$;

②U的第k个列向量是A^HA的对应于λ_k的一个单位特征向量$(k=1,\cdots,n)$.

(2) $(A^HA)^+=U\wedge^+U^H$ 且 $A^+=U\wedge^+U^HA^H$

(3) $A^+=P_1Q^{-1}P_1^HA^H$

其中：①P_1为U的前r个列向量组成的矩阵；

②$Q=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$.

例2　设　$A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&-2\\4&-4\end{bmatrix}$　求A^+

解法一　用定理二的结论 (2) 做

由 $\left|A^HA-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}21-\lambda&-21\\-21&21-\lambda\end{vmatrix}=(21-\lambda)^2-21^2=0$

得　A^HA的特征值　$\lambda=42,0$.

A^HA的对应于$\lambda=\lambda_1=42$的一个单位特征向量为 $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{-1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

A^HA的对应于$\lambda=\lambda_2=0$的一个单位特征向量为 $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

令　$\wedge=\mathrm{diag}(42,0)$　则$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

$\therefore A^+=U\wedge^+U^HA^H$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}42&0\\0&0\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&4\\-1&-2&-4\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{42}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

解法二 用定理二的结论 (3) 做

由解法一知 $P_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ $Q=(42)$

$$\therefore A^+=P_1Q^{-1}P_1^HA^H$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}(42)^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{42}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

参考文献

〔1〕 丁学仁，蔡高厅编．工程中的矩阵理论．天津大学出版社． 1985年9月

〔2〕 Ben— Isreal A., Greville T.N.E.. Generalized inverses. theory and applications. Wiley, New York—London—Sydney—Toronto. 1974

〔3〕 Boullion, T.L., Odell P.L.. Generalized inverse matrices. Wiley, New York, 1971

On Concise proof about two properties of A^+ and two theorems about A^+

Hou Shuangyin
(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper, We first proved concisely that

$$A^+=(A^HA)^+A^H=A^H(AA^H)^+$$

for all $A\in C^{m\times n}$ and then proved two theorems about A^+.

Keywords: Unitary matrices, Generalized inverse matrices, Hermitian matrices.