第13卷 第2期 郑州工学院学报 Vol.13 No.2
1992年 6月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Jun. 1992

对偶不分明序同态*

赵万忠

(数力系)

摘 要：本文给出文〔1〕中Fuzzy序同态、Fuzz函数Zadeh型函数的对偶形式，讨论了它们的性质与构造。

关键词：对偶Fuzzy序同态、对偶Fuzz函数，对偶Zadeh型函数．

中国图书分类号：O174

1 对偶逆映射

本文中L.L_j表完全分配格。0.1分别表其最小最大元，i：$L\to L$为恒同映射 .X、Y表普通非空集 .$A_0=\{x:\ A(x)>0\}$为L不分明集A的承集．约定$\wedge\phi=1$，$\vee\phi=0$.

命题1.1 若映射f：$L_1\to L_2$保交（并），则f保序.

定义1.1 映射f：$L_1\to L_2$的对偶逆（映射）f^+：$L_2\to L_1$ 规定如下：$\forall b\in L_2$

$$f^+(b)=\wedge\{a\in L_1:\ f(a)\geqslant b\}$$

命题1.2 ①$f^+(0)=0$；②$f^+f\leqslant i_1$；③f^+保序

命题1.3 设f：$L_1\to L_2$保交．则①$ff^+\geqslant i_2$；②f为单映射$\Rightarrow f^+f=i_1$；③f为满映射$\Rightarrow ff^+=i_2$；④f为双射$\Rightarrow ff^+=i2$且$f^+f=i_1\Rightarrow f^+$为双射；⑤$f(a)\geqslant b\Rightarrow a\geqslant f^+(b)$；⑥$f^+$保并．

证明：①、②、③、④、⑤略

⑥由$\vee f^+(bm)\leqslant a=\vee m f^+(bm)\Rightarrow \forall m$，$f^+(bm)\leqslant a$，由⑤$\Rightarrow\underset{m}{\vee}f(a)\geqslant bm\Rightarrow f(a)\geqslant\underset{m}{\vee}bm$，由⑤$\Rightarrow f^+(\underset{m}{\vee}b.n)\leqslant a=\underset{m}{\vee}f^+(bm)$．由⑤$f^+(\underset{m}{\vee}bm)\leqslant=a_1 1\equiv f^+(\underset{m}{\vee}bm)$及$\Rightarrow\underset{m}{\vee}bm\leqslant f(a_1)\Rightarrow\underset{m}{\vee}$，$bm\leqslant f(a_1)$由⑤$\Rightarrow\underset{m}{\forall}$，$f^+(bm)\leqslant a_1\Rightarrow\underset{m}{\vee}f^+(bm)\leqslant a_1=f^+(\underset{m}{\vee}bm)$，故$f^+(\underset{m}{\vee}bm)=\underset{m}{\vee}f^+(bm)$，即$f^+$保并，证完．

*收稿日期:1991-07-03

命题 1.4，设映射 f: $L_1 \to L_2$ 及 f^+ 皆保交且 $f^{++}=f$，则 f 及 f^+ 皆为双射.

由命题1.3④即得

命题 1.5，若 f: $L_1 \to L_2$ 为单射且保交（并），则 $\forall a_1$、$a_2 \in L_1$，$a_1 \leqslant a_2 \Rightarrow f(a_1) \leqslant f(a_2)$

定理 1.1，设 f: $L_1 \to L_2$ 及其对偶逆 f^+ 都保交则 ①f为双射⇔②f^+ 为双射⇒③$f^{++}=f$

证明 ①⇔②就是命题1.3④

③⇔①由命题1.4即得

①⇔③，$\forall a \in L_1$，

$$f^{++}(a) = \wedge\{b: f^+(b) \geqslant a\} = \wedge\{b: f^{++}(b) \geqslant f(a)\} \quad \text{(命题1.5)}$$
$$= \wedge\{b: b \geqslant f(a)\} = f(a)$$

故 $f^{++}=f$，证完

命题 1.6，设 f: $L_1 \to L_2$ 与 g: $L_2 \to L_3$ 为映射，f^+ 保交 g 保序，则 $(gf)^+ = f^+g^+$.

证明 $\forall c \in L_3$，$f^+g^+(c) = f^+(\wedge\{b: g(b) \geqslant c\})$

$$= \wedge\{f^+(b): g(b) \geqslant c\} = \bigwedge_{g(b)\geqslant c}(\wedge\{a: f(a) \geqslant b\}) = \wedge\{a: gf(a) \geqslant c\} = (gf)^+(c)$$，即 $(gf)^+ = f^+g^+$.证完.

2 对偶 Fuzzy 序同态、对偶 Fuzz 函数

定义 2.1 如果 f: $L_1^X \to L_2^Y$ 及 f^+ 皆保交且 $f(1) = f^+(1) = 1$，则称映射 f 为对偶 *Fuzzy* 序同态，简记 *DFOH*

由于任何格 L 可视为 L^X（这里 X 为通常单点集）故满足 f 及 f^+ 皆保交且 $f(1) = f^+(1) = 1$ 的映射 f: $L_1 \to L_2$ 也是 *DFOH*.

定义 2.2 设 L_1、L_2 都是 *Fuzzes*（即有逆序对合的完全分配格）f: $L_1^X \to L_2^Y$ 满足 ①$f(1)=1$；②f保交；③f^+ 倚余（即 $f^+(B') = [f^+(B)]'$）则称 f 为对偶 *Fuzz* 函数，简记作 *DFF*.

如同定义 2.1 后面的说明，满足定义 2.2 诸条件的映射 f: $L_1 \to L_2$ 也是 *DFF*.

命题2.1 设 f 为 *DFF*，则 f^+ 保交、$f^+(1) = 1$. 从而 f 也是 *DFOH*.

命题2.2 设 f: $L \to L$ 是 *DFF*，且 $\forall a \in L$，$f(a) \leqslant a$，则 $f = f^+ = i$.

证明 ①$\forall b \in L$，$f^+(b) = \wedge\{a: f(a) \geqslant b\} \geqslant \{f(a): f(a) \geqslant b\} \geqslant b \Rightarrow b' \geqslant [f^+(b)]' = f^+(b')$ 由 b 的任意性有 $b \geqslant f^+(b)$，故 $f^+(b) = b$，从而 $f^+ = i$。

②由①及命题1.3①即得.证完

定理2.1 设f: $L_1^X \to L_2^Y$为$DFOH$.则①f双射$\Leftrightarrow$②f^+双射$\Leftrightarrow$③$f^{++}=f$.从而当f双射时;f^+也是$DFOH$.

这是定理1.1的直接结果

设f^{-1}: $L_2 \to L_1$为文〔1〕中定义的f: $L_1 \to L_2$的逆映射.即$\forall b \in L_2$

$f^{-1}(b) = \vee\{a \in L_1: f(a) \leqslant b\}$

f^+与f^{-1}有如下关系

定理2.2,若f: $L_1^X \to L_2^Y$为双射DFF,则$f^+ = f^{-1} \Leftrightarrow f$保余.

证明 若f保余,$\forall B \in L_2^Y$,$f^{-1}(B) = \vee\{A: f(A) \leqslant B\} = [\wedge\{A': f(A) \leqslant B\}]' = [\wedge\{A': f(A') \geqslant B'\}]' = [f^+(B')]' = f^+(B)$.

若$f^+ = f^{-1}$则f^{-1}保并,由定理2.1 $f = f^{++}$,故f保并,由文〔1〕定理5有$f^{-1-1} = f$,于是$\forall A \in L_1^X$,$f(A') = f^{++}(A') = \wedge\{B: f^+(B) \geqslant A'\}$
$= [\vee\{B': f^+(B) \geqslant A'\}]' = [\vee\{B': f^{-1}(B') \leqslant A'\}]' = [f^{-1-1}(A)]'$
$= [f(A)]'$.证完

定义2.3 格L叫正则的,如果$a \neq 0$,$b \neq 0$,则$a \wedge b \neq 0$.

引理2.1 设L_1正则,f: $L_1^X \to L_2^Y$为$DFOH$,B_1、$B_2 \in L_2^Y$若$f^+(B_1) \wedge f^+(B_2) \neq 0$,则$B_1 \wedge B_2 \neq 0$.

证明 若$B_1 \wedge B_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = f^+(0) = f^+(B_1 \wedge f^+(B_2) \geqslant x_\lambda \wedge x_\mu = x_{\lambda\wedge\mu} \Leftrightarrow \lambda \wedge \mu = 0$与$L_1$正则矛盾这里$x$是$f^+(B_1)$与$f^+(B_2)$的公共承点$\lambda \leqslant f^+(B_1)(x).\mu \leqslant f^+(B_2(x)$.证完.

命题2.3 设L_1正则,f: $L_1^X \to L_2^Y$为$DFOH$,则①f^{++}映X上$Fuzzy$点为Y上$Fuzzy$点;②具有相同承点的$Fuzzy$点在f^{++}下的像也有相同的承点;③f诱导两个映射.

$\tilde{f}$: $X \to Y$ 使$\forall x \in X$,$\lambda \in L_1$ $\tilde{f}(x) = [f^{++}(x_\lambda)]$.

f_x: $L_1 \to L_2$ 使$\forall \lambda \in L_1$,$f_x(\lambda) = f^{++}(x_\lambda)(y)$ 其中$y = \tilde{f}(x)$,

④$f^{++}(x_\lambda) = (\tilde{f}(x))_{f_x(\lambda)}$;⑤$f^+{}_x(\mu) = f^{+++}(y)_\mu(x)$ $\mu \in L_2$,$y = \tilde{f}(x)$

证明 ①令$g = f^+$: $L_2^Y \to L_1^X$、$g^+: L_1^X \to L_2^Y$则$g^+g \leqslant i_2$,$gg^+ \geqslant i_1$,设$g^+(x_\lambda) = B$,则$x_\lambda \leqslant gg^+(x_\lambda) = f^+(B) = f^+(\vee\{y_{B(y)}: y \in B_0\})$
$= \vee\{f^+(y_{B(y)}): y \in B_0\}$。由引理2.1存在唯一的$y \in B_0$使$x_\lambda \leqslant f^+(y_{B(y)})$。(因为,若有$z \neq y$使$x_\lambda \leqslant f^+(z_{B(z)})$.由引理得$z_{B(z)} \wedge y_{B(y)} \neq 0$。这是不可能的)于

是，$g^{+}(x_\lambda)\leqslant g^{+}g(y_{B(y)})\leqslant v_{(B)}$ 这说明 x_λ 在 $g^{+}-f^{++}$ 下的像是 Fuzzy 点。

② $\forall x\in X$、λ、$\mu\in L_1$，设 $g^{+}(x_\lambda)=v_\rho$，$g^{+}(x_\mu)=z_\sigma\Rightarrow x_\lambda\leqslant gg^{+}(x_\lambda)$ $=g(y_\rho)=f^{+}(y_\rho)$．$x_\mu\leqslant f^{+}(z_\sigma)$，由引理 2.1 $z_\sigma\wedge y_\rho\neq 0\Rightarrow y=z$.

由①及②，③和④自然成立。

⑤ 左 $=\wedge\{\rho:\ f_x(\rho)\geqslant\mu\}=\wedge\{\rho:\ f^{++}(x_\rho)(y)\geqslant\mu\}=\wedge\{\rho:\ f^{++}(x_\mu)\geqslant y\mu\}$. 右 $[\wedge\{A:f^{++}(A)\geqslant y_\mu\}](x)=\wedge\{A(x):\ f^{++}(x_{A(x)})\geqslant y_\mu\}$（此因，$y_\mu\leqslant f^{++}(A)=f^{++}(\vee\{z_{A(z)}:\ z\in A_0\})=\vee\{f^{++}(z_{A(z)}):\ z\in A_0\}$，由引理 2.1 存在唯一的 $z\in A_0$ 使 $y_\mu\leqslant f^{++}(z_{A(z)})$，注意到 $\tilde{f}(x)=y\Rightarrow z=x$）故⑤式成立。证完

系：设 L_1 正则，f: $L_1^X\to L_2^Y$ 为双射 DFOH 则、于 f 映 X 上 Fuzzy 点为 Y 上 Fuzzy 点；② $\forall x\in X$、λ、μ、$\in L_1$、$[f(x_\lambda)]_0=[f^{++}(x_\mu)]_0$。③ $\tilde{f}(x)=[f(x_\lambda)]_0$，$f_x(\lambda)=f(x_\lambda)(y)$，$y=\tilde{f}(x)$。④ $f(x_\lambda)=(\tilde{f}(x))_{f_x(\lambda)}$；⑤ $f^{+}{}_x(\mu)=f^{+}(y_\mu)(x)y=\tilde{f}(x)$.

定理 2.3，设 L_1 正则，f: $L_1^X\to L_2^Y$ 为双射 DFOH 则 f 在每个 x 处的局限 fx 都是 DFOH。

证明　由命题 2.3 系及 f、f^{+} 保交易得 f_x 与 f^{+}、都保交。由 $f(1)=1$，$\Rightarrow f_x(1)=1$，$f^{+}{}_x(1)=1$ 故 fx 是 DFOH，证完

定理 2.4，设 L_1　L_2 正则，f: $L_1^X\to L_2^Y$ 为 DFOH 则 f 双射 $\Leftrightarrow\tilde{f}$ 及 f_x 皆双射

证明，由定理 2.1，f 双射 $\Leftrightarrow f^{++}=f$。由命题 2.3④ 并注意到 f^{++} 保并知充分性成立。今证必要性。① $\tilde{f}$ 满、事实上，$\forall y\in Y$，$y_1\in L_2^y$ 由 f 满 $\Leftrightarrow$ 存在 $A\in L_1^x$ 使 $f(A)=y_1$，而 $f(A)=f(\vee\{x_{A(x)}:\ x\in A_0\})=\vee\{f(x_{A(x)}):\ x\in A_0\}=\vee\{(\tilde{f}(x))_{f(A(x))}:\ x\in A_0\}$. 故存在 $x\in X$ 使 $\tilde{f}(x)=y$，② $\tilde{f}$ 单，事实上，设 x，$z\in X$ 使 $\tilde{f}(x)=\tilde{f}(z)=y$，

记 $f(x_1)=y_\mu$，$f(z_1)=y_v$，由 L_2 正则，$\delta=\mu\wedge v\neq 0$。由 f 满，存在 $A\in L_1^x$ 使 $f(A)=y_\delta$，于是有 $f(A)\leqslant y_\mu=f(x_1)$ 且 $f(A)\leqslant y_v=f(z_1)$，由命题 1.5，$A\leqslant x_1$ 且 $A\leqslant z_1$，从而 $x=z$，③ f_x 双射 $\Rightarrow f_x f_x=i_1$ 且 $f_x f_x^{+}=i_2$。由 f 双射及命题 1.3④ 有 $f^{+}f=i_1$，$ff^{+}=i_2$。记 $\tilde{f}(x)=y$。$f(x_\lambda)=y_\mu$，$\forall\lambda\in L_1$，$f_x(\lambda)=f(x_\lambda)(y)=\mu\Leftrightarrow f_x^{+}f_x(\lambda)=f_x^{+}(\mu)=f^{+}(y_\mu)(x)=f^{+}f(x_\lambda)(x)=x_\lambda(x)=\lambda$，故 $f_x^{+}f_x=i_1$. $\forall\mu\in L_2$，$y_\mu\in L_2^Y$，由 f 满 $\Leftrightarrow$ 存在 $A\in L_1^x$ 使 $f(A)=y_\mu$，由 f 保并、$\tilde{f}$ 单及 $y=\tilde{f}(x)$ 易证 $A=x_\lambda$（否则 $f(A)$ 至少有两个承点）. 由 f 保序及单 $\Leftrightarrow\forall\delta<\lambda,f(x_\delta)<f(x_\lambda)=y_\mu$ 于是 $f^{+}(y_\mu)=\wedge\{A:\ f(A)\geqslant y_\mu\}=x_\lambda$，由命题 2.3

系5，$f_x^+(\mu)=f^+(y_\mu)(x)=\lambda$，$\Leftrightarrow f_x f^+ x(\mu)=f_x(\lambda)=f(x_\lambda)(y)=ff^+(y_\mu)(y)=y_\mu(y)=\mu$。故 $f_x f_x^+=i_2$。证完。

引理 2.2　设 L_1 正则，f: $L_1^X\to L_2^Y$ 为 $DFOH$，$x\in X$，$y=\tilde{f}(x)$，$B\in L_2^Y$，若 $B(y)=0$，则 $f^+(B)(x)=0$。

证明　若 $f^+(B)(x)\neq 0$，则 $\forall\rho(\neq 0)\in L_1$，$f^+(B)\wedge x_\rho=x_\alpha\neq 0\Rightarrow f^{++}(x_\alpha)=f^{++}(f^+(B)\wedge x_\rho)\leqslant f^{++}f^+(B)\leqslant B$（命题 1.2）由命题 2.3④，$f^{++}(x_\alpha)=y_\beta$，于是 $B(y)\geqslant\beta\neq 0$ 与假设矛盾，证完。

定理 2.5　设 L_1 为正则 $Fuzzes$，f: $L_1^X\to L_2^Y$ 为双射 $DFOH$，则 f 为 $DFF\Rightarrow\forall x\in X$，$fx$ 为 DFF。

证明　必要性。由定理 2.3，只须证 $\forall x\in X f_x^+$ 保余。记 $y=\tilde{f}(x)$，$\forall\mu\in L_2$ 取 $B\in L_2^Y$ 使 $B(z)=\begin{cases}1 & z\neq y\\ 0 & z=y\end{cases}$，则 $(y_\mu)'=y_{\mu'}\vee B$。由引理 2.2 $f^+(B)(x)=0$，于是 $f^+((y_\mu)')(x)=f^+(y_{\mu'}\vee B)(x)=[f^+(y_{\mu'})(x)]\vee[f^+(B)(x)]=f^+(y_\mu)(x)=f_x^+(\mu')$ 由命题 2.3 系及 f^+ 保余，$[f_x^+(\mu)]'=[f^+(y_\mu)(x)]'=[f^+(y_\mu)]'(x)=f^+[(y_\mu)'](x)=f_x^+(\mu')$，即 f_x^+ 保余。

充分性，只须证 f^+ 保余。$\forall B\in L_2^Y$，$x\in X$，记 $y=\tilde{f}(x)$，将 B' 表为 $B'=y_\mu\vee H$，其中 $\mu=B'(y)$，$H(z)=\begin{cases}B'(z) & z\neq y\\ 0 & z=y\end{cases}$。由引理 2.2，$f^+(H)(x)=0$，于是，$\forall x\in X$，$f^+(B')(x)=f^+(y_\mu\vee H)(x)=f^+(y_\mu)(x)=f_x^+(\mu)$。同样，把 B 表为 $B=y_{\mu'}\vee K$，其中 $K(z)=\begin{cases}B(z) & z\neq y\\ 0 & z=y\end{cases}$，则 $f^+(B)(x)=f_x^+(\mu')=[f_x^+(\mu)]'$。从而 $f(B')(x)=[f^+(B)]'(x)$，即 f^+ 保余，证完。

命题 2.4　设 f: $L_1^X\to L_2^Y$ 与 g: $L_2^Y\to L_3^Z$ 为 $DFOH$（DFF）则 gf: $L_1^X\to L_3^Z$ 也为 $DFOH$（DFF）。

命题 2.5　设 L_1 正则，f: $L_1^X\to L_2^Y$ 为双射 $DFOH$，$A\in L_1^X$ 且 A_0 非单点集，则 $[f(A)]_0$ 也非单点集。

证明　设 $f(A)=y_\mu$，而 $f(A)=f\vee\{x_{A(x)}:x\in A_0\}=\vee\{f(x_{A(x)}):x\in A_0\}=\vee\{(\tilde{f}(x))_{f_x(A(x))}:x\in A_0\}\Leftrightarrow\forall x\in A_0, \tilde{f}(x)=y$，与按定理 2.4 $\tilde{f}$ 为单射矛盾．证完．

3　对偶 Zadeh 型函数

定义3.1　设 L 正则，$\tilde{f}:X\to Y$ 为通常集映射．$\forall A\in L^X$，定义 $f(A)\in L^Y$ 使 $\forall y\in Y$．

$f(A)(y)=\wedge\{A(x):\tilde{f}(x)=y\}$

称 $f:L^X\to L^Y$ 为由 $\tilde{f}$ 诱导的对偶Zadeh型函数简记作DZF．

命题3.1　DZF f 的对偶逆 $f^+:L^Y\to L^X$ 满足 $\forall B\in L^Y$，$f^+(B)=B\tilde{f}$

证明　$\forall x\in X$，$f^+(B)(x)=[\wedge\{A:f(A)\geqslant B\}](x)$

$=[\wedge\{A:\forall y\in Y,\ \wedge\{A(z):\tilde{f}(z)=y\}\geqslant B(y)\}](x)$

$=[\wedge\{A:\forall y\in Y,\ A(z)\geqslant B(y),\tilde{f}(z)=y\}](x)$

$=\wedge\{A(x):A(x)\geqslant B(y),\ \tilde{f}(x)=y\}$

$=B\tilde{f}(x)$

故 $f^+(B)=B\tilde{f}$　证完．

命题3.2　DZF保交．

命题3.3，DZF必为DFOH，而且L为Fuzzes时，它还是DFF．

命题3.4　设 L 正则，$f:L^X\to L^Y$ 为双射 DFOH，则 f 是DZF$\Leftrightarrow$每个 f_x：$L\to L$ 为恒同映射．

证明　必要性，设 f 是 $\tilde{f}:X\to Y$ 诱导的 DZF，$\forall x\in X$，记 $y=\tilde{f}(x)$ $\forall\lambda\in L$，$f(x_\lambda)(y)=\wedge\{x_\lambda(z):\tilde{f}(z)=y\}=\lambda$ 即 $f_x(\lambda)=\lambda$，故 $f_x=i$。

充分性，由定理2.1有 $f^{++}=f$ 从而 f 保并且保交 $\forall x\in A_0$，令 $B^x(y)=\begin{cases}0 & y=x\\ 1 & y\neq x\end{cases}$，则 $B^x=\bigvee_{y\neq x}y_1$，于是 $\forall A\in L^X$，$A=\bigwedge_{x\in A_0}(x_{A(x)}\vee B^x)$

$$f(A)=\bigwedge_{x\in A_0}(f(x_{A(x)})\vee f(B^x))$$

$$=\bigwedge_{x\in A_0}((\tilde{f}(x))_{f_x(A(x))}\vee(\bigvee_{y\neq x}f(y_1)))$$

$$=\bigwedge_{x\in A_0}((\tilde{f}(x))_{A(x)}\vee(\bigvee_{y\neq x}(f(y))_1)\quad(\text{由定理2.4}\tilde{f}\text{单})$$

$$=\bigwedge_{x\in A_0}(\tilde{f}(x))'_{A(x)}$$

于是，$\forall y\in Y$，$f(A)(y)=\bigwedge_{x\in A_0}((\tilde{f}(x))_{A(x)}(y))=\bigwedge_{\tilde{f}(x)=y}A(x)$ 这说明 f 是由 $\tilde{f}$ 诱导的DZF．证完

定义3.2　称 $memA\equiv\wedge\{A(x):x\in A_0\}$ 为Fuzzy $A\in L^X$ 的最小从属度．

映射 $f:L^X\to L^Y$ 叫递减的，如果 $\forall A\in L^X$ $memf(A)\leqslant memA$

命题3.5　设 L 正则，$f:L^X\to L^Y$ 为双射 DFOH 则 f 递减$\Leftrightarrow\forall x\in L$，$f_x L\to L$ 递减．

证明　必要性，由定理2.1，$f^{++}=f$，$\forall\lambda\in L$，$x\in X$，记 $y=\tilde{f}(x)$，由假设，$f_x(\lambda)=f(x_\lambda)(y)=memf(X_\lambda)\leqslant mem\{x_\lambda\}=\lambda$，故 f_x 递减

充分性　$\forall A\in L^X$，$A=\bigvee_{x\in A_0}x_{A(x)}$，$f(A)=\bigvee_{x\in A_0}f(x_{A(x)})$

$=\bigvee_{x\in A_0}(\tilde{f}(x))_{f_x(A(x))}$，于是 $mem f(A)=\wedge\{f(A)(z):z\in[f(A)]_0=\tilde{f}(A_0)\}$

$=\wedge\{\bigvee_{x\in A_0}(\tilde{f}(x))_{f_x(A(x))}(z):z\in\tilde{f}(A_0)\}=\wedge\{f_x(A(x)):X\in A_0\}$（$\because\tilde{f}$单）

$\leqslant\wedge\{A(x):x\in A_0\}=mem A_0$}故$f$递减.证完

定理 3.1　设 L 为正则 $Fuzzes$，f: $L^X\to L^Y$ 为双射 DFF，则 ①f是 DFZ⇔② 每个 f_x 递减 ⇒③f递减

证明　由定理 2.5 每个f_x都是 DFF，由命题 2.2 及命题 3.4 得②⇔每个$f_x=i$⇔①.
由命题 3.5 得②⇔③，证完

4　连续对偶 Fuzz 函数

定义4.1　设δ_1，δ_2分别是$L^X{}_1$、$L^Y{}_2$上的$Fuzzy$拓扑，$DFFf$:（$L^X{}_1$、δ_1）

→（$L^Y{}_2$、δ_2）叫连续的，如果$\forall B\in\delta_2$，$f^+(B)\in\delta_1$.

定理 4.1　设 f:（L_1^X、δ_1）→（L_2^Y、δ_2）为 DFF. 则以下诸款彼此等价. ①f为连续 DFF，②$\forall F\in\bar{\delta}_2$(全体闭集)，$f^+(F)\in\bar{\delta}1$（全体闭集），③$\forall A\in L_1^X$，$f^{++}(\bar{A})\leqslant\overline{f^{++}(A)}$；④ $\forall B\in L_2^Y$，$\overline{f^+(B)}\leqslant f^+(\bar{B})$；⑤ $\forall B\in L_2^Y$，$f^+(B^0)\leqslant[f^+(B)]^0$；⑥ 设 B_α 为 δ_2 的任一基元（或子基元），则 $f^+(B_\alpha)\in\delta_1$.

证明　由f^+保余得①⇔②.

②⇔③ 由命题 1.3 $A\leqslant f^+f^{++}(A)\leqslant f^+(\overline{f^{++}(A)})\in\bar{\delta}_2$⇔$\bar{A}\leqslant f^+(\overline{f^{++}(A)})$⇔$f^{++}(\bar{A})\leqslant f^{++}f^+(\overline{f^{++}(A)})\leqslant\overline{f^{++}(A)}$.

③⇔④ $\forall B\in L_2^Y$，取 $A=f^+(B)$，由 ③ 及命题 1.2，$f^{++}(\overline{f^+(B)})\leqslant\overline{f^{++}f^+(B)}\leqslant\bar{B}$⇔$f^+(\bar{B})\geqslant f^+f^{++}(\overline{f^+(B)})\geqslant\overline{f^+(B)}$

④⇔② 若 $B\in\bar{\delta}_2$⇔$B=\bar{B}$，由 ④$\overline{f^+(B)}\leqslant f^+(\bar{B})$⇔$f^+(B)\in\bar{\delta}_1$

①⇔⑤ 由 $B^0\leqslant B$⇔$f^+(B^0)\leqslant f^+(B)$，由①，$f^+(B^0)\in\delta_1$⇔$f^+(B^0)=[f^+(B^0)]^0\leqslant[f^+(B)]^0$ 反过来，若 $B\in\delta_2$⇔$=B=B^0$ 由 ⑤$f^+(B)\leqslant[f^+(B)]^0$⇔$f^+(B)\in\delta_1$

①⇔⑥ 必要性自明. 今证充分性 $\forall B\in\delta_2$⇔$B=UB_\alpha$（B_α 为基元）由 f^+ 保并及 ⑥，$f^+(B)=Uf^+(B_\alpha)\in\delta$ 证完

命题 4.1，设 f:（L_1^X，δ_1）→（$L^Y{}_2$，δ_2）与 g:（$L^Y{}_2$，δ_2→（L_3^2，δ_3）都是连续 DFF，则 gf:（$L_1^X\delta_1\to L_3^2$，δ_3）也是 DFF.

定义 4.2$DFFf$:（L_1^X，δ_1)→(L_2^Y，δ_2）叫开的，如果 $\forall A\in\delta_1$，$f(A)\in\delta_2$；叫闭

的，如果 $\forall F\in\delta_1\ f(F)\in\bar{\delta}_2$.

定理4.2、DFF f: $(L_1^X, \delta_1)\to(L_2^Y, \delta_2)$ 是开的 $\Leftrightarrow \forall B\in L_2^Y$ 及 L_1 中 Fuzzy 闭集 $A\leqslant f^+(B)$，存在 $C\in\bar{\delta}_2$ 使 $C\leqslant B$ 且 $A\leqslant f^+(C)$.

证明　必要性，由 f 是开的，取 $C=f(A)\in\delta_2$ 又 $A\geqslant f^+(B)=f^+(B)\Leftrightarrow f(A)\geqslant ff^+(B)\geqslant B\Leftrightarrow B\geqslant f(A)=C$，而且 $f^+(C)=f^+(f(A))=f^+f(A)\geqslant A$

充分性，$\forall A\in\delta_1\geqslant$，令 $B=f(A)$，$f^+(B)=f^+f(A)\geqslant A\in\bar{\delta}_1$，由假设，存在 $C\in\bar{\delta}_2$ 使①$C\leqslant B$，②$A\leqslant f^+(C)$. 由①得 $f(A)\leqslant C$，由②得 $A\geqslant f^+(C)\Leftrightarrow f(A)\geqslant ff^+(C)\geqslant C\Leftrightarrow f(A)=C\in\delta_2$ 证完。

仿此可证。

• 定理4.3　DFF f: $(L^X{}_1\delta 1)\to(L^Y{}_2\delta_2)$ 是闭的 $\Leftrightarrow\forall B\in L_2^Y$ 及 L_1 中开 Fuzzy 集 $A\leqslant f^+(B)$，存在 $C\in\delta_2$ 使 $C\leqslant B$ 且 $A\leqslant f^+(C)$.

参 考 文 献

〔1〕 刘应明.Fuzzy Sets and Systems z1 (1987) 43－51

〔2〕 王国俊.数学进展 V01.16.No.1 (1987) 55—60

Dual Fuzzy Order Homomorp Hisms

Zhao Wanzhong

(Department of Mathematics and Dynamics)

Abstract: In this paper,We have given dual forms of the Fuzzy order homomorphism.Fuzz function and Zaden′ type function,and discussed its properties and structures.

Keywords: dual fuzzy order homomorphism、daul fuzz function、dual zadeh′ type function.